国家出版基金项目
NATIONAL PUBLICATION FOUNDATION

中外物理学精品书系

前沿系列·19

数学物理方法专题
——数理方程与特殊函数

吴崇试 编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

中外物理学精品书系·前沿系列19

数学物理方法专题——数理方程与特殊函数

吴崇试　1938年生。1962年毕业于北京大学物理系。北京大学物理学院教授，博士生导师。享受政府特殊津贴。1996年起被推举为高校数学物理方法研究会理事长。1998年被聘为北京大学主干基础课主持人。两度获得北京大学年度教学优秀奖。

科研方面也曾获得北京大学首届科学研究二等奖和国家教委科技进步奖（甲类二等）。

长期在北京大学主讲“数学物理方法”课程。该课程是北京大学优秀主干基础课程，2003年被评为北京市高等学校精品课程，2004年被评为国家级精品课程，并获得北京大学2004年教学成果奖一等奖和北京市2004年高等教育教学成果奖一等奖。

ISBN 978-7-301-21839-6

9 787301 218396 >

定价：85.00元

国家出版基金项目
NATIONAL PUBLICATION FOUNDATION

中外物理学精品书系

前沿系列 · 19

数学物理方法专题
——数理方程与特殊函数

吴崇试 编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

数学物理方法专题：数理方程与特殊函数/吴崇试编著. —北京：北京大学出版社，2012.12

(中外物理学精品书系·前沿系列)

ISBN 978-7-301-21839-6

Ⅰ. ①数…　Ⅱ. ①吴…　Ⅲ. ①数学物理方法　Ⅳ. ①O411.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 311165 号

书　　名：数学物理方法专题——数理方程与特殊函数

著作责任者：吴崇试　编著

责 任 编 辑：尹照原

标 准 书 号：ISBN 978-7-301-21839-6/O·0907

出 版 发 行：北京大学出版社

地　　址：北京市海淀区成府路 205 号　100871

网　　址：http://www.pup.cn　　新浪官方微博：@北京大学出版社

电　　话：邮购部 62752015　发行部 62750672　编辑部 62752021

出版部 62754962

电 子 邮 箱：zpup@pup.pku.edu.cn

印　刷　者：北京中科印刷有限公司

经　销　者：新华书店

730 毫米×980 毫米　16 开本　33 印张　647 千字

2012 年 12 月第 1 版　2012 年 12 月第 1 次印刷

定　　价：85.00 元

《中外物理学精品书系》
编 委 会

序　　言

物理学是研究物质、能量以及它们之间相互作用的科学。她不仅是化学、生命、材料、信息、能源和环境等相关学科的基础，同时还是许多新兴学科和交叉学科的前沿。在科技发展日新月异和国际竞争日趋激烈的今天，物理学不仅囿于基础科学和技术应用研究的范畴，而且在社会发展与人类进步的历史进程中发挥着越来越关键的作用。

我们欣喜地看到，改革开放三十多年来，随着中国政治、经济、教育、文化等领域各项事业的持续稳定发展，我国物理学取得了跨越式的进步，做出了很多为世界瞩目的研究成果。今日的中国物理正在经历一个历史上少有的黄金时代。

在我国物理学科快速发展的背景下，近年来物理学相关书籍也呈现百花齐放的良好态势，在知识传承、学术交流、人才培养等方面发挥着无可替代的作用。从另一方面看，尽管国内各出版社相继推出了一些质量很高的物理教材和图书，但系统总结物理学各门类知识和发展，深入浅出地介绍其与现代科学技术之间的渊源，并针对不同层次的读者提供有价值的教材和研究参考，仍是我国科学传播与出版界面临的一个极富挑战性的课题。

为有力推动我国物理学研究、加快相关学科的建设与发展，特别是展现近年来中国物理学者的研究水平和成果，北京大学出版社在国家出版基金的支持下推出了《中外物理学精品书系》，试图对以上难题进行大胆的尝试和探索。该书系编委会集结了数十位来自内地和香港顶尖高校及科研院所的知名专家学者。他们都是目前该领域十分活跃的专家，确保了整套丛书的权威性和前瞻性。

这套书系内容丰富，涵盖面广，可读性强，其中既有对我国传统物理学发展的梳理和总结，也有对正在蓬勃发展的物理学前沿的全面展示；既引进和介绍了世界物理学研究的发展动态，也面向国际主流领域传播中国物理的优秀专著。可以说，《中外物理学精品书系》力图完整呈现近现代世界和中国物理

科学发展的全貌，是一部目前国内为数不多的兼具学术价值和阅读乐趣的经典物理丛书。

《中外物理学精品书系》另一个突出特点是，在把西方物理的精华要义“请进来”的同时，也将我国近现代物理的优秀成果“送出去”。物理学科在世界范围内的重要性不言而喻，引进和翻译世界物理的经典著作和前沿动态，可以满足当前国内物理教学和科研工作的迫切需求。另一方面，改革开放几十年来，我国的物理学研究取得了长足发展，一大批具有较高学术价值的著作相继问世。这套丛书首次将一些中国物理学者的优秀论著以英文版的形式直接推向国际相关研究的主流领域，使世界对中国物理学的过去和现状有更多的深入了解，不仅充分展示出中国物理学研究和积累的“硬实力”，也向世界主动传播我国科技文化领域不断创新的“软实力”，对全面提升中国科学、教育和文化领域的国际形象起到重要的促进作用。

值得一提的是，《中外物理学精品书系》还对中国近现代物理学科的经典著作进行了全面收录。20 世纪以来，中国物理界诞生了很多经典作品，但当时大都分散出版，如今很多代表性的作品已经淹没在浩瀚的图书海洋中，读者们对这些论著也都是“只闻其声，未见其真”。该书系的编者们在这方面下了很大工夫，对中国物理学科不同时期、不同分支的经典著作进行了系统的整理和收录。这项工作具有非常重要的学术意义和社会价值，不仅可以很好地保护和传承我国物理学的经典文献，充分发挥其应有的传世育人的作用，更能使广大物理学人和青年学子切身体会我国物理学研究的发展脉络和优良传统，真正领悟到老一辈科学家严谨求实、追求卓越、博大精深的治学之美。

温家宝总理在 2006 年中国科学技术大会上指出，“加强基础研究是提升国家创新能力、积累智力资本的重要途径，是我国跻身世界科技强国的必要条件”。中国的发展在于创新，而基础研究正是一切创新的根本和源泉。我相信，这套《中外物理学精品书系》的出版，不仅可以使所有热爱和研究物理学的人们从中获取思维的启迪、智力的挑战和阅读的乐趣，也将进一步推动其他相关基础科学更好更快地发展，为我国今后的科技创新和社会进步做出应有的贡献。

《中外物理学精品书系》编委会 主任

中国科学院院士，北京大学教授

王恩哥

2010 年 5 月于燕园

内容简介

本书前八章属于数理方程，包括数理方程与特殊函数的一些概念性问题和特殊技巧，某些特殊形式的偏微分方程定解问题，以及有关数理方程的理论问题，包括函数空间、线性算符和广义函数，并且在广义函数的基础上讨论了常微分方程和偏微分方程的 Green 函数问题.

后七章属于特殊函数. 主要内容有：一、球函数和柱函数(包括虚宗量柱函数)的 Wroński 行列式，并结合递推关系而导出的恒等式；二、涉及球函数和柱函数的级数，包括 Legendre 多项式零点和 Bessel 函数零点的级数；三、球函数与柱函数的积分，包括柱函数的 Fourier 变换和 Laplace 变换，以及柱函数与虚宗量柱函数的不定积分；四、球函数和柱函数的 Christoffel 和式，以及超几何函数和合流超几何函数的 Christoffel 和式；五、Legendre 方程的本征值问题；六、有关电磁学或电动力学的球函数问题.

本书不是数学物理方法的教材，而是笔者对于传统教材内容的解读与发挥. 书中还汇集了笔者自己的许多计算，例如，有超过 200 个积分及近 900 个和式(有限和或无穷级数)的计算结果.

前　言

(一)

五十余年前，笔者就读于北京大学物理系，得到诸位前辈大师的教诲. 毕业之后，更在王竹溪与郭敦仁二位先生的指导下，从事数学物理方法课程的教学，迄今已届五十载. 笔者得到了二位先生生前的诸多教益. 在教学实践中，面对学生的各种诘问，促进了对于相关问题的深入思考；在与校内外同行的交流切磋中，更获益良多. 退休以后，笔者将这些收获与记录，汇集为《数学物理方法专题 —— 复变函数与积分变换》及《数学物理方法专题 —— 数理方程与特殊函数》二书，以此奉献给中国近代物理教育 100 年.

需要说明，这两本书都不是数学物理方法的教材，而是笔者备课与教学过程中笔记与练习的汇集. 从某种意义上说，这两本书所涉及的内容，恰恰是在传统教材之外，包括笔者对于教材中标准表述之外的解读与发挥. 笔者以一孔之见，希望能就教于国内从事数学物理方法课程教学的同行，希望能对于此门课程的教学有所裨益. 需要特别申明，这两本书均不以数学物理方法的初学者为对象. 当然，对于已经学习并掌握了数学物理方法课程基本内容的青年学子来说，这两本书或许也能成为他们进一步学习与思考的辅助读物. 他们将会发现，从已有的知识出发，只要再往前迈一小步，展现在面前的将是一片绚丽多彩的新天地.

正因为不是教材，所以这两本书的内容不受教学大纲的约束，与数学物理方法传统教材基本上不相重复，既不追求与数学物理方法教材的完全对应与覆盖，也不刻意追求理论的系统性与完整性. 书中有些内容可能是教材的补充与提高，但也有不少内容是现在教学中所不涉猎的.

正因为不是教材，所以这两本书可能存在内容前后倒置的情形. 尽管在整理书稿时，尽量希望理顺各章节乃至具体内容的前后次序，但也不排除有前面的内容需要用到后面的知识.

或许值得提到，这两本书中汇集了笔者自己的许多计算. 例如，这两本书中提供了超过 1200 个积分及超过 1200 个和式 (有限和或无穷级数) 的计算，这些结果，绝大多数都未出现在 I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik 的千页巨著 *Table of Integrals, Series, and Products* (7th ed., Elsevier (Singapore) Pte Ltd., 2007) 中.

或许这些就是这两本书的特点.

(二)

本书名为《数学物理方法专题 —— 数理方程与特殊函数》，共十五章，大体上可分为两部分，前八章属于数理方程，后七章属于特殊函数.

第一章与第二章的内容，可以看成是数学物理方法课程的补充. 第一章涉及数理方程与特殊函数的一些概念性问题和特殊技巧. 第二章来源于笔者有关分离变量法的几篇论文，涉及某些特殊形式的偏微分方程定解问题. 讨论这些问题，有助于深化对于分离变量法的理解，然而它们通常又都不在教学内容之列. 特殊的是 §2.5，讨论了端面有阻尼的弹性杆振动问题，笔者虽然设法给出了这个问题的解，但是却给我们提出了许多有待回答的问题.

第三章至第八章涉及数理方程的理论问题，包括函数空间、线性算符和广义函数，并且在广义函数的基础上讨论了常微分方程和偏微分方程的 Green 函数问题. 严格说来，这部分应该算是读书笔记，虽有笔者的整理与发挥，并尽可能或多或少地补充了一些例题，但其中的基本概念、基本观点和理论框架，都可以在相关文献中找到. 笔者之所以收入这些内容，原因是它们的重要性. 对于从事数学物理方法课程教学的老师，或是已经掌握了此课程基本内容的读者，这些都是提高自身的理论修养所必需的基础，也是进一步学习的入门.

关于特殊函数的部分，即书中的第九章至第十五章，基本上是笔者教学研究工作的记录. 第九章中计算了 Legendre 函数的 Wroński 行列式 $W[\mathrm{P}_\nu(x),\ \mathrm{P}_\nu(-x)]$，$W[\mathrm{P}_\nu(x),\ \mathrm{Q}_\nu(x)]$ 及连带 Legendre 函数的 Wroński 行列式 $W[\mathrm{P}_\nu^\mu(x),\ \mathrm{Q}_\nu^\mu(x)]$，并由此出发，结合 Legendre 函数与连带 Legendre 函数的递推关系，导出了有关这些函数的 70 余个恒等式. 这些恒等式，除了极个别的几个外，绝大多数在现有的主要工具书中都未能检出. 第九章中还讨论了 Legendre 方程的本征值问题及含有 Legendre 多项式或连带 Legendre 函数的积分. 第十章集中讨论了涉及 Legendre 多项式或连带 Legendre 函数的级数展开. 在这些级数中，笔者给出的新结果超过 100 个. 第十一章中讨论了电磁学或电动力学的问题，澄清了计算中易犯的一些错误. 它们都要用到球函数. 这些内容都源自笔者已发表的论文.

对于第十三章中有关柱函数的讨论，都可以在他处发现类似的内容. §13.1 中给出了有关柱函数的恒等式. 从柱函数的 Wroński 行列式出发，结合递推关系，就能导出这些恒等式，这一做法和球函数 (§9.2) 十分类似. 书中列出的有关柱函数的恒等式，有百余个，它们绝大多数在现有的主要工具书中也不能检出. §13.2 讨论了一些涉及柱函数的级数展开，使用的方法与《数学物理方法专题 —— 复变函数与积分变换》一书的第四章亦有相似之处，不同的是，那里是找到待展开函数所满足的常微分方程，进而通过求解常微分方程得到该函数的幂级数展开式，而在本书的

§13.2 中，则是找到待展开函数满足的偏微分方程，进而得到该函数的展开式. 这里需要用到有关展开式的唯一性，既有按本征函数展开或 Fourier 展开的唯一性，也用到按 Bessel 函数展开的唯一性，本质上仍然是 Taylor 展开的唯一性，但并非它的原始形式. 至于 §13.3 有关 Bessel 函数零点的级数，第九章中也有类似的内容.

第十四章是关于柱函数的积分. 此处讨论了柱函数的 Fourier 变换和 Laplace 变换，柱函数的 Mellin 变换已在《数学物理方法专题 —— 复变函数与积分变换》一书中给出，该书中还由此计算了大量含柱函数的积分，本书不再重复. 在第十四章中还讨论了柱函数及虚宗量柱函数的不定积分. 这是一个饶有兴趣的问题. 笔者也得到了近 200 个不定积分.

最后要提到第十二章和第十五章. 现有文献中可以搜索到两个关于 Legendre 多项式的 Christoffel 和式，分别称为第一和式与第二和式. 本着同样的思路，笔者导出了更多的和式，包括连带 Legendre 函数及超几何函数的 Christoffel 和式. 这些结果都收录在第十二章中. 将这一做法加以推广，还可以得到柱函数及虚宗量柱函数的 Christoffel 和式，也能写出合流超几何函数的 Christoffel 和式. 这些结果见第十五章. 在这两章中，列出的 Christoffel 和式，总数超过 600 个. 事实上，读者不难写出更多的和式. 这一做法，也还可以进一步应用于其他特殊函数.

(三)

需要声明，本书成书于现在，但资料积累跨越数十年. 尽管书中的计算均为笔者所为，但也不乏某些内容，或是直接采自某书籍资料，或是受其启发而就，现在由于笔者记录不全，原始资料也难以寻觅，以致无法一一列出文献出处. 有些计算结果，或许可能已经见诸文献，但笔者孤陋寡闻，还误以为是新结果，因此文字表述亦有不实之嫌. 笔者深致歉意之余，亦请知情者指出，本书再版时，自当补正.

最后，在此书付梓之际，笔者感谢《中外物理学精品书系》编委会诸位对于本书的支持. 在本书出版过程中，北京大学出版社提供了方便，陈小红和尹照原编辑为此付出了辛勤劳动，笔者一并致谢.

吴崇试

2012 年于蓝旗营

本书常用符号

数 学 符 号

符号	含义
$\forall$	任何；凡
$\exists$	有；存在
$\exists!$	存在唯一的
$\nexists$	不存在
$\wedge$	并且；与
$\vee$	或
$a \in A$	(元素) a 属于 (集合) A
$a \notin A$	a 不属于 A
$\cup$	并集
$\cap$	交集
$\supset$	包含
$\subset$	子集
$A \setminus B$	$\{a : a \in A,\, a \notin B\}$
$\overline{\lim}$	上极限
$\underline{\lim}$	下极限
$\\| \quad \\|$	范数
$(\alpha)_n$	$\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)$

符号	含义
$\mathbb{N}$	非负整数 (自然数)
$\mathbb{Z}$	整数
$\mathbb{R}$	实数
$\mathbb{R}^+$	正数
$\mathbb{R}^-$	负数
$\mathbb{C}$	复数；复平面
$\overline{\mathbb{C}}$	复数 (包括 ∞) 扩充的复平面
$\mathscr{R}_n$	n 维实空间
$\mathscr{C}_n$	n 维复空间
$\mathscr{E}_n$	n 维 Euclid 空间
$\mathscr{C}$	连续函数空间
$\mathscr{C}^n$	$\mathscr{C}^n$ 类函数空间 (n 阶连续可微函数的集合)
$\mathscr{H}$	Hilbert 空间
$\mathscr{D}$	分段连续且只有有限个第一类间断点的函数类
$\mathscr{L}_1$	绝对可积函数类
$\mathscr{L}_2$	平方可积函数类

符号	含义	符号	含义
$\mathscr{F}\{f\}$	f 的 Fourier 变换	$\mathscr{F}^{-1}\{f\}$	f 的 Fourier 逆变换
$\mathscr{M}\{f\}$	f 的 Mellin 变换	$\mathscr{M}^{-1}\{f\}$	f 的 Mellin 逆变换
$\mathscr{L}\{f\}$	f 的 Laplace 变换	$\mathscr{L}^{-1}\{f\}$	f 的 Laplace 逆变换
$F(p) \risingdotseq f(t)$	$F(p) = \mathscr{L}\{f(t)\}$	$f(t) \fallingdotseq F(p)$	$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(p)\}$

特殊函数与常数符号一览表

符　　号	名　　称
$A_n(z;a)$	Abel 多项式
$Ai(z)$	Airy 函数
$B(p,q)$	Beta 函数
$B_\alpha(p,q)$	不完全 Beta 函数
$bei_\nu(z)$	Kelvin 函数
$ber_\nu(z)$	Kelvin 函数
$Bi(z)$	Airy 函数
$B_k^{(n)}$	广义 Bernoulli 数
$B_k^{(n)}(x)$	广义 Bernoulli 多项式
B_n	Bernoulli 数
$B_n(x)$	Bernoulli 多项式
$C(z)$	Fresnel 积分
$C_\alpha^\lambda(z)$	Gegenbauer 函数
$C_n^\lambda(z)$	Gegenbauer 多项式
$D_\nu(z)$	抛物线柱函数 (Weber 函数)
$Ei(z)$	指数积分
E_n	Euler 数
$E_n(x)$	Euler 多项式
$\mathbb{E}_\nu(z)$	Weber 函数
$erf(z)$	误差函数
$erfc(z)$	余误差函数
$F(\alpha,\beta;\gamma;z)$	超几何函数
$F(\alpha;\gamma;z)$	合流超几何函数 (Kummer 函数)
${}_pF_q(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p;\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_q;z)$	广义超几何级数
$G_n(\zeta;\alpha,\beta)$	Gould 多项式

(续表)

符　　号	名　　称
γ	Euler 常数
$\gamma(\nu,z)$, $\Gamma(\nu,z)$	不完全 Gamma 函数
$\Gamma(z)$	Gamma 函数
$\mathrm{H}_n(x)$	Hermite 多项式
$\mathbb{H}_\nu(z)$	Struve 函数
$\mathrm{h}_\nu^{(1)}(z)$,　$\mathrm{h}_\nu^{(2)}(z)$	球 Hankel 函数
$\mathrm{H}_\nu^{(1)}(z)$,　$\mathrm{H}_\nu^{(1)}(z)$	第三类柱函数 (Hankel 函数)
$\mathrm{I}_\nu(z)$	虚宗量 Bessel 函数
$\mathrm{J}_\nu(z)$	第一类柱函数 (Bessel 函数)
$\mathbb{J}_\nu(z)$	Anger 函数
$\mathrm{j}_\nu(z)$	球 Bessel 函数
$\mathrm{K}_\nu(z)$	虚宗量 Bessel 函数
$\mathrm{li}(z)$	对数积分
$\mathrm{L}_n(x)$	Laguerre 多项式
$\mathrm{L}_n^{(\alpha)}(x)$	广义 Laguerre 多项式
$\mathrm{L}_n^{(n+\alpha)}(x)$	赝 Laguerre 多项式
$\mathrm{M}_{k,\mu}(z)$	Whittaker 函数
$\mathrm{M}_n(z)$	Mittag-Leffler 多项式
$\mathrm{n}_\nu(z)$	球 Neumann 函数
$\mathrm{N}_\nu(z)$	第二类柱函数 (Neumann 函数)
$\mathrm{O}_n(t)$	Neumann 多项式
$\mathrm{P}_l^m(x)$	m 阶 l 次第一类连带 Legendre 函数
$\mathrm{P}_n(z)$	Legendre 多项式
$\mathrm{P}_n^{(\alpha,\beta)}(x)$	Jacobi 多项式
$\mathrm{P}_n^\lambda(x;a,b)$	Pollaczek 多项式
$\mathrm{P}_n^\lambda(x,\phi)$	Pollaczek 多项式
$\mathrm{P}_{n-\frac{1}{2}}^m(\cosh\eta)$	圆环函数

(续表)

符　　号	名　　称
$\mathrm{P}_\nu(z)$	第一类 Legendre 函数
$\mathrm{P}_\nu^\mu(z)$	第一类连带 Legendre 函数
$\mathrm{P}_{\nu-\mu}^{(\mu,\mu)}(z)$	超球函数
$\mathrm{P}^\mu_{-\frac{1}{2}+\mathrm{i}p}(\cos\theta)$	圆锥函数
$\psi(z)$	Psi 函数
$\mathrm{Q}_l^m(x)$	m 阶 l 次第二类连带 Legendre 函数
$\mathrm{Q}^m_{n-\frac{1}{2}}(\cosh\eta)$	圆环函数
$\mathrm{Q}_\nu(z)$	第二类 Legendre 函数
$\mathrm{Q}_\nu^\mu(z)$	第二类连带 Legendre 函数
$\mathrm{Q}^\mu_{-\frac{1}{2}+\mathrm{i}p}(\cos\theta)$	圆锥函数
$\mathrm{Q}_{\nu-\mu}^{(\mu,\mu)}(z)$	超球函数
$\mathrm{R}_{m,\nu}(z)$	Lommel 多项式
$\mathrm{S}(z)$	Fresnel 积分
$\mathrm{Si}(z)$, $\mathrm{si}(z)$	正弦积分
$\mathrm{s}_{\mu,\nu}(z)$	Lommel 函数
$\mathrm{S}_{\mu,\nu}(z)$	Lommel 函数
$\mathrm{S}_n(t)$	Schläfli 多项式
$\mathrm{T}_n(x)$	第一类 Chebyshev 多项式
$\mathrm{U}(\alpha;\gamma;z)$	合流型超几何函数 (Kummer 函数)
$\mathrm{U}_n(x)$	第二类 Chebyshev 多项式
$\mathrm{W}_{k,\mu}(z)$	Whittaker 函数
$\mathrm{Y}_\nu(z)$	第二类 Bessel 函数 (Neumann 函数)
$\mathrm{Z}_\nu(z)$	柱函数
$\zeta(s)$	Reimann ζ 函数
$\zeta(s,a)$	广义 ζ 函数

目　　录

第一章　数学物理方程定解问题

§1.1　关于数理方程的若干问答

1. 何谓偏微分方程的解？何谓偏微分方程的通解？

为了便于叙述，不妨以定义在平面区域 $(x,y)\in\mathscr{D}$ 内的两个自变量的二阶线性偏微分方程

$$\boldsymbol{L}(D_x,D_y)u\equiv\left[A_1D_x^2+A_2D_xD_y+A_3D_y^2+B_1D_x+B_2D_y+C\right]u=f(x,y)$$

为例，其中 $D_x\equiv\partial/\partial x$, $D_y\equiv\partial/\partial y$；系数 A_1,A_2,A_3,B_1,B_2,C 及非齐次项 f 均为 x,y 的已知 (连续) 函数．若存在二元函数 $u(x,y)$，在 $\mathscr{D}$ 内：

(1) 有二阶连续偏导数；

(2) 处处满足上述方程 (即将 $u(x,y)$ 及其偏导数代入，方程即成为恒等式)，则称此二元函数为上述方程的解．

在偏微分方程的解中，如果不含有任何不确定的因子 (即不含有任意常数或任意函数)，则称该解为方程的特解．反之，在 (二阶线性) 偏微分方程的通解中，一定含有 (两个) 任意函数 (仍然要具有二阶连续偏导数)，因而足以涵盖方程的全部特解．

当然，这里的讨论都是基于传统的 (经典的) 微积分概念，因而得到的解应当称为经典解．与之形成对照的是，偏微分方程还可以有所谓弱解与广义解．

2. 何谓偏微分方程的弱解？何谓偏微分方程的广义解？

上一问题中介绍了偏微分方程解的概念．作为偏微分方程的解，包括两方面的要求，即在求解区域内的连续性及逐点满足偏微分方程．这样得到的是偏微分方程的经典解 (严格解)．特别是，作为偏微分方程的特解，可以有无穷多个．这样就可能出现某种特解序列 $\{u_n\}$，其中每一个 u_n 都是偏微分方程的解，但 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$ 本身却可能不具有连续的二阶偏导数，因而 $u=\lim\limits_{n\to\infty}u_n$ 可能不是偏微分方程的 (严格) 解．我们将这种特解序列的极限称为偏微分方程的弱解．当然，从概念上说，若 u 本身也是偏微分方程的解，也符合弱解的要求，因此，偏微分方程的经典解也一定是该方程的弱解；反之，偏微分方程的弱解却不一定是它的经典解．

这种状况与引进 δ 函数时出现的形式 (过程) 颇为相似．我们有所谓的 δ 序列．序列中的每一个成员 (函数) 都具有足够好的连续性，因而可以进行所希望的微积分运算．但作为 δ 序列的极限，在经典意义下并不存在．我们就把这样的极限函数

称为 δ 函数. 现在我们面临的是: 函数序列中的每一个成员 (函数) 都是偏微分方程的 (经典) 解, 不论这个函数序列的极限是否是偏微分方程的解, 我们都把它称为偏微分方程的弱解.

完全类似地, 也可以采用泛函方法定义偏微分方程 $\boldsymbol{L}u=f$ 的弱解, 即只需满足积分等式 (以两个自变量的情形为例, 更多个自变量的情形可作相应修改)

$$\iint_{\mathscr{D}}(\boldsymbol{L}u-f)\phi\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0 \qquad \text{或} \qquad \iint_{\mathscr{D}}(\boldsymbol{L}u)\phi\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\mathscr{D}}f\phi\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 $\phi(x,y)$ 就是所谓的检验函数. 更进一步, 把满足

$$\iint_{\mathscr{D}}u(\boldsymbol{L}^{\dagger}\phi)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\mathscr{D}}f\phi\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad (\boldsymbol{L}^{\dagger}\ \text{是}\ \boldsymbol{L}\ \text{的伴算符})$$

的 $u(x,y)$ 称为 $\boldsymbol{L}u=f$ 的广义解. 从概念上说, 作为偏微分方程的广义解, 甚至可能并不存在在经典意义下的偏导数. 上面出现的积分也可能纯粹只是 (泛函意义下的) 一个记号, 或是一个运算规则, 而非 Riemann 积分或 Lebesgue 积分.

当然, 偏微分方程的经典解或弱解也一定是该方程的广义解.

3. 何谓偏微分方程定解问题的解? 偏微分方程定解问题有特解与通解之分吗?

所谓偏微分方程定解问题 (这里限定于适定的偏微分方程定解问题) 的解, 必须满足下列要求:

(1) 是偏微分方程的解, 即使方程在其定义域内成为恒等式;

(2) 是定解条件的解, 即在边界点上使边界条件成为恒等式, 在初始时刻使初始条件成为恒等式.

作为 (适定的) 偏微分方程定解问题, 满足这样要求的解一定是唯一的. 因此, 对于 (适定的) 偏微分方程定解问题来说, 只有唯一一个特定的解, 既无特解与通解之分, 也不存在通解的说法.

与此相关的问题是, 在用分离变量法求解偏微分方程定解问题时, 我们往往先求得满足偏微分方程及 (齐次) 边界条件的特解, 而后将全部特解叠加起来, 得到的是既满足偏微分方程、又满足边界条件的一般解. 需要注意, 这样的解并不是偏微分方程的通解, 它只属于偏微分方程解空间内的一个子空间.

4. 何谓偏微分方程定解问题的弱解?

这可以看成问题 2 的具体化. 因此, 不妨以两端固定弦的横振动问题为例. 设

有定解问题

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, && 0<x<l,\ t>0,\\
&u\big|_{x=0}=0, \qquad u\big|_{x=l}=0, && t\geqslant 0,\\
&u\big|_{t=0}=\phi(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi(x), && 0\leqslant x\leqslant l.
\end{aligned}$$

应用分离变量法，可得到既满足齐次偏微分方程、又满足齐次边界条件的一般解：

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\sin\frac{n\pi}{l}at+D_n\cos\frac{n\pi}{l}at\right)\sin\frac{n\pi}{l}x,$$

利用初始条件，能够定出叠加系数：

$$\begin{aligned}
C_n&=\frac{2}{n\pi a}\int_0^l\psi(x)\,\sin\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x,\\
D_n&=\frac{2}{l}\int_0^l\phi(x)\,\sin\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

按照 Fourier 级数的理论 (例如，见笔者编著的《数学物理方法专题 —— 复变函数与积分变换》(北京大学出版社)，第十一章，定理 11.1)，只要 $\phi(x)\in\mathscr{C}^2(0,l)$, $\psi(x)\in\mathscr{C}^1(0,l)$，就有

$$\lim_{n\to\infty}n^2C_n=0,\qquad \lim_{n\to\infty}n^2D_n=0,$$

因此上述一般解一致收敛，可以逐项微商两次，从而保证分离变量法求解步骤 (特别是逐项积分定叠加系数) 合法，保证这样求得的 $u(x,t)$ 的确是波动方程的解.

如果 $\phi(x)$ 和 (或) $\psi(x)$ 不满足上述要求，例如，取初位移 $\phi(x)$ 为如图 1.1 所示的折线，其表达式为

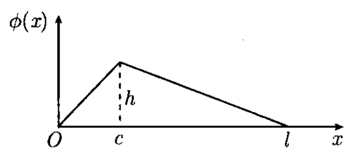


图 1.1 初位移连续，但其导数不连续

$$\phi(x)=\begin{cases}\dfrac{h}{c}x, & 0\leqslant x\leqslant c,\\[2mm] \dfrac{h}{l-c}(l-x), & c\leqslant x\leqslant l,\end{cases}$$

而 $\psi(x)=0$，则尽管我们在形式上仍能求得解

$$u(x,t)=\frac{2hl^2}{\pi^2c(l-c)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{l}c\,\sin\frac{n\pi}{l}x\,\cos\frac{n\pi}{l}at,$$

这个级数解显然满足定解问题中的边界条件及初始条件，然而并不满足波动方程，因为这个级数显然不能逐项微分两次 (逐项微分两次后得到的级数不收敛). 我们把这样的解称为定解问题的弱解.

可以换一个角度来讨论这个定解问题. 我们将初位移改为

$$\phi_k(x)=\frac{2hl^2}{\pi^2c(l-c)}\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{l}c\,\sin\frac{n\pi}{l}x.$$

显然函数 $\phi_k(x)\in\mathscr{C}^\infty$，因此定解问题的严格解存在，即为

$$u_k(x,t)=\frac{2hl^2}{\pi^2c(l-c)}\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{l}c\,\sin\frac{n\pi}{l}x\,\cos\frac{n\pi}{l}at.$$

读者可以立即看到，当 $k\to\infty$ 时，$u_k(x,t)$ 的极限正是上面求得的弱解．事实上，$\lim\limits_{k\to\infty}\phi_k(x)$ 也正是图 1.1 中的折线．

类似于问题 2，我们也可以采用泛函的语言定义偏微分方程定解问题的弱解与广义解．

5．对于第三类边界条件 $\left[\alpha(\partial u/\partial x)+\beta u\right]_{x=a}=0$ 中的系数 α,β 是否有正负的限制？

可以从不同的角度回答这个问题．为了便于叙述，不妨假定 α,β 都是常数．

(1) 从数学上说，可以说对于 α,β 的正负无限制．

(2) 从物理上说，有限制，而且与涉及的区间有关：如果 $x=a$ 是区间的左端点，则 α 与 β 异号；如果 $x=a$ 是区间的右端点，则 α 与 β 同号．或者换成法向微商的写法，将边界条件改写为 $\left[\alpha'(\partial u/\partial \boldsymbol{n})+\beta' u\right]_{x=a}=0$，则 α' 一定与 β' 同号．造成这一限制的原因，在力学问题中来源于弹性恢复力总是与形变异号，在热学问题中则是体系与外界交换热量，热量总是由高温流向低温．

(3) 从分离变量法求解的过程来看，这又涉及导出的本征值问题是否有解的问题．在上述 (2) 所述的限制之下，本征值问题一定有解，而且有无穷多个解；否则，本征值问题可能无解．详见第五章例 5.3 的讨论．恰恰在这一点上，我们看到了物理现象与数学理论之间的协调一致性．

6．在常微分方程的本征值问题中，若区间端点为奇点，则该处的边界条件应当是有界条件．这个说法是否正确？

可以从两个不同的角度来回答这个问题．从本征值问题解的存在性来回答，则上述说法不完全正确．原因是，以二阶线性常微分方程为例，方程的奇点固然可能是解的奇点，但也可以不是解的奇点，即方程的两个线性无关解在方程的奇点处均解析，因此提出有界条件是“无的放矢”，毫无作用．也可以有另一种极端情形，即方程的两个线性无关解在方程的奇点处均不解析，且具有不同的奇异行为①，这时的有界条件也发挥不了作用．

① 例如常微分方程 $x^2\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+(1-\alpha-\beta)x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\alpha\beta y=0,\ \alpha\neq\beta.$

有界条件只能出现在一种情形下，即在方程的奇点处，一解 (通常是第一解) 有界而另一解无界，这时有界条件的作用就是摒弃掉第二解而只保留第一解. 在数学物理方法教材中不乏这样的例子. 但同时也可以找到另一类例子: 即使我们能够求得既满足 (含有待定参数的) 齐次常微分方程、又满足有界条件的非零解，多数情况下本征值为连续谱，相应的本征函数也无法归一化 (到有限值). 我们不妨举两个简单的例子. 第一个例子是 Euler 方程

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\lambda y=0, \qquad 0<x<a.$$

$x=0$ 是奇点 (正则奇点)，在边界条件

$$y(0)\ \text{有界}, \qquad y(a)=0$$

下，可以求得此方程的解为

$$\text{本征值} \qquad \lambda=\nu^2, \qquad \nu>0,$$

$$\text{本征函数} \qquad y(x)=\sin\left(\nu\ln\frac{x}{a}\right).$$

但积分

$$\int_0^a y^2(x)\,\rho(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^a\sin^2\left(\nu\ln\frac{x}{a}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x^2}=\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^t\,\sin^2\nu t\,\mathrm{d}t$$

不存在. 第二个例子是 Bessel 方程

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+\lambda R=0, \qquad a<x<\infty,$$

$r=\infty$ 是奇点 (非正则奇点). 如果加上边界条件

$$R(a)=0, \qquad R(\infty)\ \text{有界},$$

则解为

$$\text{本征值} \qquad \lambda=\left(\frac{\nu}{a}\right)^2, \qquad \nu>0,$$

$$\text{本征函数} \qquad R(r)=\mathrm{N}_0(\nu)\mathrm{J}_0\left(\frac{\nu}{a}r\right)-\mathrm{J}_0(\nu)\mathrm{N}_0\left(\frac{\nu}{a}r\right).$$

换一个角度回答. 当区间端点是微分方程的奇点时，无论区间有限或无限，出现的本征值问题都属于奇异情形. 我们需要从区间内部逼近端点，从而导出 (在奇点处) 边界条件的恰当形式 (不一定是有界条件). 详细的讨论见第五章 §5.4.

7. 以含时间的偏微分方程 (即波动方程或热传导方程) 定解问题为例，在用分离变量法求解时，对于非齐次方程，可以不必齐次化，而采用按相应齐次问题本征函数展开的方法求解，但对于非齐次边界条件，则必须首先齐次化，为什么?

可以从几个不同的角度回答这个问题.

从技术层面上来说，只有齐次边界条件才能分离变量，进而才能求出“相应齐次问题的本征函数”，从而按照分离变量法的标准步骤求解.

诚然，从理论上说，无论是否将边界条件齐次化，就给定的偏微分方程定解问题而言，其“相应齐次问题的本征函数”总是客观存在的，也总是可以求出来的；可是，倘若边界条件是非齐次的，即使方程是齐次的，我们虽然可以按照某种原则另行选择齐次边界条件 (哪怕是“相应的齐次边界条件”)，从而构造出齐次方程在齐次边界条件下的一般解，但是这样的解肯定不可能满足非齐次的边界条件. 这就是说，无论怎样选择叠加系数，总不可能得到原定解问题的解，即使放宽到原定解问题在平均收敛意义下的解，乃至广义解，也不可能.

从本征函数完备性的角度，就可以从根本上理解，为什么在应用分离变量法解偏微分方程定解问题时，如果边界条件是非齐次的，必须首先将边界条件齐次化，因为只有满足与本征函数相同的 (齐次) 边界条件的函数，才能 (至少在平均收敛的意义下) 按照该组本征函数展开.

8. 在圆形区域内的定解问题中，常常遇到本征值问题

$$\begin{aligned}&\Phi''+\lambda\Phi=0, && 0<\phi<2\pi,\\ &\Phi(0)=\Phi(2\pi), && \Phi'(0)=\Phi'(2\pi),\end{aligned}\qquad \text{亦即}\qquad \begin{aligned}&\Phi''+\lambda\Phi=0, && -\infty<\phi<\infty,\\ &\Phi(\phi)=\Phi(\phi+2\pi),\end{aligned}$$

难道方程 $\Phi''+\lambda\Phi=0$ 的解还可以不具有周期性吗？

为了叙述的方便，我们将具有周期系数的微分方程称为周期微分方程. 以下从几个层面回答这个问题：

(1) 的确，某些周期微分方程存在周期解，且其周期与方程系数的周期相同，正因为如此，这个本征值问题才有解，我们才能求得一系列的 λ 值，使得微分方程有周期为 2π 的周期解.

(2) 需要说明，即使周期微分方程的解具有周期性，其周期也可以不同于方程系数的周期. 上面列出的本征值问题其实就说明了这个事实：方程的系数 (1 及 λ) 以任意常数为周期，但是求得的周期解 $\sin m\phi$ 与 $\cos m\phi$ 则以 2π 为周期.

(3) 一般说来，周期微分方程的解甚至可以不是周期函数. 例如，对于常微分方程 $y''(x)-y(x)=0$，其系数 ±1 是以任意常数为周期，但其线性无关解 $\mathrm{e}^{\pm x}$ 或 $\sinh x$ 与 $\cosh x$ 就不是周期函数 (这个结论仅限于实数域，如果在复数范围来讨论，则它们都是周期函数，周期为纯虚数 $2\pi\mathrm{i}$).

(4) 更一般的周期微分方程有 Hill 方程

$$y''+F(x)y=0,\qquad F(x+2\pi)=F(x).$$

它的解不一定具有周期性，但可以证明①，至少总有一个解具有拟周期性：

$$y(x+2\pi)=\mathrm{e}^{\mu x}y(x),\qquad \mu \text{ 为常数}.$$

只有当 $\mu=0$ 或 i 时，$y(x)$ 才是 (以 2π 为周期的) 周期函数.

9. 在求解定解问题

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}=0,\qquad 0<r<a,\ 0<\phi<2\pi,$$

$$u\big|_{\phi=0}=u\big|_{\phi=2\pi},\quad \frac{\partial u}{\partial \phi}\bigg|_{\phi=0}=\frac{\partial u}{\partial \phi}\bigg|_{\phi=2\pi},\qquad 0\leqslant r\leqslant a,$$

$$u\big|_{r=0}\text{有界},\qquad u\big|_{r=a}=f(\phi),\qquad 0\leqslant\phi\leqslant 2\pi$$

时，我们会得到既满足齐次方程、又满足周期条件的特解 1, $\ln r$, $r^m\cos m\phi$, $r^m\sin m\phi$, $r^{-m}\cos m\phi$ **和** $r^{-m}\sin m\phi$ (m **为自然数**)，**能说它们都是 Laplace 方程在圆域** $r<a$ **内的特解吗?**

不能! 注意上面列出的这些特解只是在块形域 $0<r<a$, $0<\phi<2\pi$ 内满足 Laplace 方程及周期条件，换言之，只是在环域 $0<r<a$ 内满足 Laplace 方程. 事实上，函数 1, $r^m\cos m\phi$ 和 $r^m\sin m\phi$ 都是 Laplace 方程在圆域 $r<a$ 内的特解，但 $\ln r$，$r^{-m}\cos m\phi$ 和 $r^{-m}\sin m\phi$ 则否，后者在 $r=0$ 均不可导，因此在 $r=0$ 点并不满足 Laplace 方程.

这个问题从另一个角度说明了直角坐标系中的 Laplace 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\qquad x^2+y^2<a^2$$

与平面极坐标系中

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}=0,\qquad 0<r<a,\ 0<\phi<2\pi,$$

$$u\big|_{\phi=0}=u\big|_{\phi=2\pi},\quad \frac{\partial u}{\partial \phi}\bigg|_{\phi=0}=\frac{\partial u}{\partial \phi}\bigg|_{\phi=2\pi},\qquad 0\leqslant r\leqslant a,$$

$$u\big|_{r=0}\text{有界},\qquad 0\leqslant\phi\leqslant 2\pi$$

之间的等价性.

类似地，还可以提到，函数 $\mathrm{J}_m(kr)\cos m\phi$, $\mathrm{J}_m(kr)\sin m\phi$, $\mathrm{N}_m(kr)\cos m\phi$ 和 $\mathrm{N}_m(kr)\sin m\phi$ ($m=0,1,2,\cdots$, $k>0$) 都是在块形区域内满足 Helmholtz 方程

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}+k^2u=0,\qquad 0<r<a,\ 0<\phi<2\pi$$

① 即 Floquet 定理，见文献：F. M. Arscott. *Periodic Differential Equations*. Oxford: Pergamon Press, 1964: 29.

及周期条件

$$u\big|_{\phi=0}=u\big|_{\phi=2\pi},\quad \frac{\partial u}{\partial\phi}\Big|_{\phi=0}=\frac{\partial u}{\partial\phi}\Big|_{\phi=2\pi},\qquad 0\leqslant r\leqslant a$$

的特解，但只有 $\mathrm{J}_m(kr)\cos m\phi$ 和 $\mathrm{J}_m(kr)\sin m\phi$ 是圆内 Helmholtz 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+k^2u=0,\qquad x^2+y^2<a^2$$

的特解，而 $\mathrm{N}_m(kr)\cos m\phi$ 和 $\mathrm{N}_m(kr)\sin m\phi$ 只是环域内 Helmholtz 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+k^2u=0,\qquad 0<x^2+y^2<a^2$$

的特解，后者在原点 $(x,y)=(0,0)$ 不满足 Helmholtz 方程.

10.　在求解定解问题

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\Big)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\Big(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\Big)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}=0,$$
$$0<r<a,\ \ 0<\theta<\pi,\ \ 0<\phi<2\pi,$$

$$u\big|_{\theta=0}\text{有界},\qquad u\big|_{\theta=\pi}\text{有界},\qquad 0\leqslant r\leqslant a,\ \ 0\leqslant\phi\leqslant 2\pi,$$

$$u\big|_{\phi=0}=u\big|_{\phi=2\pi},\quad \frac{\partial u}{\partial\phi}\Big|_{\phi=0}=\frac{\partial u}{\partial\phi}\Big|_{\phi=2\pi},\qquad 0\leqslant r\leqslant a,\ \ 0\leqslant\theta\leqslant\pi,$$

$$u\big|_{r=0}\text{有界},\qquad u\big|_{r=a}=f(\theta,\phi),\qquad 0\leqslant\theta\leqslant\pi,\ \ 0\leqslant\phi\leqslant 2\pi$$

时，我们会得到既满足齐次方程、又满足 (关于 θ 的) 有界条件与 (关于 ϕ 的) 周期条件的特解

$$\begin{matrix} r^l\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\cos m\phi, & r^l\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\sin m\phi, \\ r^{-l-1}\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\cos m\phi, & r^{-l-1}\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\sin m\phi \end{matrix}\qquad (l=0,1,2,\cdots,\ m=0,1,2,\cdots,l),$$

能说它们都是 Laplace 方程在球内区域 $r<a$ 的特解吗？

不能！$r^l\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\cos m\phi$ 与 $r^l\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\sin m\phi$ 是 Laplace 方程在球内区域 $r<a$ 的特解，但 $r^{-l-1}\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\cos m\phi$ 与 $r^{-l-1}\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\sin m\phi$ 则否. 理由与问题 9 相仿：后者在 $r=0$ 处不满足 Laplace 方程.

11.　如果偏微分方程具有一定的对称性 (不变性)，它的解是否一定具有同样的对称性 (不变性)？

不一定! 例如，二维 Laplace 方程具有平移不变性、反射不变性及旋转不变性，但是它的解 x 或 y 就不具有这些不变性. 同样，x^2-y^2 也是二维 Laplace 方程的解，但是它也不具有平移不变性和旋转不变性.

但是，反过来说，如果解具有一定的对称性，一般说来 (换言之，不排除有偶然的例外)，它应当是方程具有相应对称性的反映. 讨论解的对称性与方程的不变性之间的联系，正是群论的研究内容之一.

严格说来，上面问题的提法还不够准确. 我们只提及偏微分方程还不够，还必须指明所要求解的空间区域.

更进一步，就偏微分方程定解问题而言，如果要讨论解的对称性，只是考察微分方程及求解区域还不够，还必须考察定解条件.

12. 如果只要求在 $x=1$ 点有界，Legendre 方程 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+\nu(\nu+1)y=0$ 的解是否就是 Legendre 多项式?

不对! 从 Legendre 方程在 $x=1$ 的指标 $\rho_1=\rho_2=0$ 就可以看出，Legendre 方程在 $x=1$ 点的第一解 (第一类 Legendre 函数 $\mathrm{P}_\nu(x)$) 在 $x=1$ 点就有界. 事实上，$\mathrm{P}_\nu(1)=1$，不论 ν 取何值.

如果在 $x=0$ 点求解 Legendre 方程，得到的两个解的确都是在 $x=1$ 点对数发散. 但是，将它们作适当的线性组合，仍然可以满足在 $x=1$ 点有界的要求. 其实，这样的线性组合，给出的一定就是 Legendre 函数 $\mathrm{P}_\nu(x)$ (可差常数倍).

13. 连带 Legendre 方程 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+\left(\lambda-\dfrac{\mu}{1-x^2}\right)y=0$ 在有界条件 $y(\pm1)$ 有界下构成本征值问题. 本征值 $\lambda=l(l+1), l=0,1,2,\cdots$. 这个结论对不对? 为什么?

不对! 在连带 Legendre 方程中有两个待定常数: λ 与 μ. 通常，μ 首先应当由另一个本征值问题

$$\varPhi''+\mu\varPhi=0,$$

$$\varPhi(0)=\varPhi(2\pi),\qquad \varPhi'(0)=\varPhi'(2\pi)$$

定出: $\mu=m^2$, $m=0,1,2,\cdots$. 如果没有明确 μ 的取值，我们无法定出 λ，甚至也无从认定 λ 是本征值. 即使令 $\mu=m^2$ 而 m 的取值未定，根据有界条件的要求，我们也只能定出

$$\lambda=l(l+1),\qquad l=m,m+1,m+2,\cdots.$$

如果 m 不是整数，l 也将不是整数; 如果 m 不是实数，l 也将不是实数.

还要指出，即使已经定出了 $\mu = m^2$, $m = 0, 1, 2, \cdots$，则有关本征值

$$\lambda = l(l+1), \qquad l = 0, 1, 2, \cdots$$

的写法也不对．正确写法仍然应当是

$$\lambda = l(l+1), \qquad l = m, m+1, m+2, \cdots.$$

因为当 $m \neq 0$ 时，$l = 0, 1, \cdots, m-1$ 给出的"本征函数" $\Phi(\phi) \equiv 0$.

14. 连带 Legendre 方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[(1-z^2)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right] + \left[\nu(\nu+1) - \frac{m^2}{1-z^2}\right]w = 0, \qquad m = 1, 2, 3, \cdots$$

在圆域 $|z-1| < 2$ 内的两个线性无关解可取为

$$\mathrm{P}_\nu^m(z) = \left(z^2-1\right)^{m/2}\frac{\mathrm{d}^m \mathrm{P}_\nu(z)}{\mathrm{d}z^m} \quad 与 \quad \mathrm{Q}_\nu^m(z) = \left(z^2-1\right)^{m/2}\frac{\mathrm{d}^m \mathrm{Q}_\nu(z)}{\mathrm{d}z^m}.$$

若 ν 为整数，且 $\nu < m$ 时，显然有 $\mathrm{P}_\nu^m(z) \equiv 0$．难道这时连带 Legendre 方程只有一个非零解 $\mathrm{Q}_\nu^m(z)$ 吗？

可不必讨论 $m=0$ 的特殊情形，因为这时连带 Legendre 方程退化为 Legendre方程．

以上说法当然不对！问题的关键在于前提不完全正确：$\mathrm{P}_\nu^m(z)$ 和 $\mathrm{Q}_\nu^m(z)$ 的确是上述连带 Legendre 方程的解，但只在一定条件下才彼此线性无关．直接从它们之间的 Wronski 行列式

$$W[\mathrm{P}_\nu^m(z),\ \mathrm{Q}_\nu^m(z)] = \frac{(-1)^m}{1-z^2}\,\frac{\Gamma(\nu+m+1)}{\Gamma(\nu-m+1)}$$

就可以看出，当 $\nu - m$ 为负整数时，$\nu - m + 1$ 必为零或负整数，所以

$$W[\mathrm{P}_\nu^m(z),\ \mathrm{Q}_\nu^m(z)] = 0,$$

亦即 $\mathrm{P}_\nu^m(z)$ 与 $\mathrm{Q}_\nu^m(z)$ 线性相关．事实上，正如问题中所指出的，这时一定有 $\mathrm{P}_\nu^m(z) \equiv 0$．然而，如果我们将连带 Legendre 方程的第一解取为

$$\frac{\Gamma(\nu-m+1)}{\Gamma(\nu+m+1)}\mathrm{P}_\nu^m(z) = \lim_{\mu\to m}\frac{\Gamma(\nu-\mu+1)}{\Gamma(\nu+\mu+1)}\mathrm{P}_\nu^\mu(z),$$

则当 $\nu - m$ 为负整数时，它与 $\mathrm{Q}_\nu^m(z)$ 仍然保持线性无关[①]．其实，这样定义的第一解，正是第一类连带 Legendre 函数 $\mathrm{P}_\nu^{-m}(z)$.

① 既然它与 $\mathrm{Q}_\nu^m(z)$ 线性无关，所以一定是非零解．

还可以顺便讨论一下更一般的连带 Legendre 方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[(1-z^2)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right]+\left[\nu(\nu+1)-\frac{\mu^2}{1-z^2}\right]w=0$$

的解．我们看到，在变换 $\nu\mapsto-(\nu+1)$, $\mu\mapsto-\mu$ 或 $z\mapsto-z$ 之下，连带 Legendre 方程不变，因此，如果

$$\mathrm{P}_\nu^\mu(z)=\frac{1}{\Gamma(1-\mu)}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\mu/2}\mathrm{F}\left(-\nu,\nu+1;1-\mu;\frac{1-z}{2}\right)$$

是连带 Legendre 方程的解 ①，则 $\mathrm{P}_\nu^\mu(-z)$ 及 $\mathrm{P}_{-\nu-1}^\mu(\pm z)$, $\mathrm{P}_\nu^{-\mu}(\pm z)$, $\mathrm{P}_{-\nu-1}^{-\mu}(\pm z)$ 也一定是解．同样，如果

$$\mathrm{Q}_\nu^\mu(z)=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\mu}\sqrt{\pi}}{2^{\nu+1}}\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu+3/2)}z^{-\nu-\mu-1}\left(z^2-1\right)^{\mu/2}\mathrm{F}\left(\frac{\nu+\mu}{2}+1,\frac{\nu+\mu+1}{2};\nu+\frac{3}{2};z^{-2}\right)$$

是连带 Legendre 方程的解①，则 $\mathrm{Q}_\nu^\mu(-z)$ 及 $\mathrm{Q}_{-\nu-1}^\mu(\pm z)$, $\mathrm{Q}_\nu^{-\mu}(\pm z)$, $\mathrm{Q}_{-\nu-1}^{-\mu}(\pm z)$ 也一定都是解．从这 16 个函数中，我们总可以找到两个线性无关的特解，而其余的 14 个函数总可以表示为这两个线性无关特解的线性组合．连带 Legendre 函数之间的这些关系式，在有关的专著中都可以找到．

15. 在上半球内的 Laplace 方程边值问题中，为什么不可能取

$$u(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}A_l r^l\mathrm{P}_l(\cos\theta)$$

作为它的一般解？这里假定定解问题绕 z 轴旋转对称，即 u 与 ϕ 无关．

对于上半球内的 Laplace 方程边值问题，其一般解不可能是

$$u(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}A_l r^l\mathrm{P}_l(\cos\theta),$$

理由如下：

(1) $\mathrm{P}_l(\cos\theta)$ 作为本征函数，适用的区间必须是 $0<\theta<\pi$，且相应的边界条件为 $\Theta(0)$ 有界，$\Theta(\pi)$ 有界．

(2) 在上半球的范围内，将 Laplace 方程分离变量，能得到 Legendre 方程

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)+\lambda\Theta=0,$$

① $\mathrm{P}_\nu^\mu(z)$ 和 $\mathrm{Q}_\nu^\mu(z)$ 都是在由 $z=1$ 沿负实轴割开的 z 平面上单值解析．参阅文献：王竹溪，郭敦仁．特殊函数概论．北京：北京大学出版社，2000：245 – 249．

但边界条件为

$$\Theta(0)\ 有界$$

以及下列诸式之一：

$$\begin{cases}\Theta(\pi/2)=0, & 若原题中半球底面为第一类边界条件,\\ \Theta'(\pi/2)=0, & 若原题中半球底面为第二类边界条件,\\ \alpha\Theta'(\pi/2)+\beta\Theta(\pi/2)=0, & 若原题中半球底面为第三类边界条件.\end{cases}$$

由此方能求出相应的本征函数，进而写出正确的一般解形式. 关于这几个本征值问题的解 (本征值与本征函数)，详见第九章 §9.3.

16. 在球壳内的 Laplace 方程边值问题

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}=0,$$

$$a<r<b,\quad 0<\theta<\pi,\quad 0<\phi<2\pi,$$

$$u\big|_{\theta=0}\ 有界,\qquad u\big|_{\theta=\pi}\ 有界,\qquad a<r<b,\quad 0\leqslant\phi\leqslant 2\pi,$$

$$u\big|_{\phi=0}=u\big|_{\phi=2\pi},\qquad \frac{\partial u}{\partial\phi}\bigg|_{\phi=0}=\frac{\partial u}{\partial\phi}\bigg|_{\phi=2\pi},\qquad a<r<b,\quad 0\leqslant\theta\leqslant\pi,$$

$$u\big|_{r=0}\ 有界,\qquad u\big|_{r=a}=f(\theta,\phi),\qquad 0\leqslant\theta\leqslant\pi,\quad 0\leqslant\phi\leqslant 2\pi$$

中，是否能将一般解写成

$$u(r,\theta,\phi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{l}\left(A_l r^l+B_l r^{-l-1}\right)\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\left(C_m\sin m\phi+D_m\cos m\phi\right)?$$

不能！对于球壳内的区域，满足 Laplace 方程及 (关于 ϕ 的) 周期条件和 (关于 θ 的) 有界条件的特解有四类，即

$$r^l\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\cos m\phi,\qquad r^l\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\sin m\phi,$$
$$r^{-l-1}\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\cos m\phi,\qquad r^{-l-1}\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\sin m\phi,$$

因而一般解，作为这四组特解的任意线性叠加，应当是

$$\begin{aligned}u(r,\theta,\phi)=&\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{l}r^l\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\left(A_{lm}\sin m\phi+B_{lm}\cos m\phi\right)\\&+\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{l}r^{-l-1}\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\left(C_{lm}\sin m\phi+D_{lm}\cos m\phi\right),\end{aligned}$$

应该含有四组独立的叠加系数. 而原问题中和式内 r^l 与 r^{-l-1} 项之间的比例系数只与 l 有关，$\sin m\phi$ 与 $\cos m\phi$ 之间的比例系数只与 m 有关，即

$$\begin{aligned}u(r,\theta,\phi) &= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{l}\left(A_l r^l + B_l r^{-l-1}\right)\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\left(C_m\sin m\phi + D_m\cos m\phi\right)\\ &= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{l} A_l C_m\left(r^l + \frac{B_l}{A_l}r^{-l-1}\right)\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\left(\sin m\phi + \frac{D_m}{C_m}\cos m\phi\right)\\ &= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{l} A'_{lm}\left(r^l + B'_l r^{-l-1}\right)\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\left(\sin m\phi + D'_m\cos m\phi\right),\end{aligned}$$

因此独立的叠加系数只有三组：A_{lm}, $A_{lm}B'_l$ 与 $A_{lm}B'_l D'_m$. 或者令

$$g_l(\theta,\phi) = \sum_{m=0}^{l}\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\left(C_m\sin m\phi + D_m\cos m\phi\right),$$

则原问题中的和式意味着将解式限制于

$$u(r,\theta,\phi) = \sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l r^l + B_l r^{-l-1}\right)g_l(\theta,\phi)$$

这种特殊形式，即如果将 $u(r,\theta,\phi)$ 在环域 $a<r<b$ 内作 Laurent 展开，r^l 项与 r^{-l-1} 项的系数对于 θ, ϕ 有相同的依赖形式.

对于这种球壳内的 Laplace 方程边值问题，其实将一般解写成

$$u(r,\theta,\phi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left(A_{lm}r^l + B_{lm}r^{-l-1}\right)\mathrm{P}_l^{|m|}(\cos\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi},$$

在形式上更简单些.

17. 设有热传导方程的定解问题

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}\right] = 0, && 0<r<a,\ 0<\phi<2\pi,\ t>0,\\ &u\big|_{\phi=0} = u\big|_{\phi=2\pi},\quad \frac{\partial u}{\partial\phi}\bigg|_{\phi=0} = \frac{\partial u}{\partial\phi}\bigg|_{\phi=2\pi}, && 0\leqslant r\leqslant a,\ t>0,\\ &u\big|_{r=0}\ \text{有界},\qquad u\big|_{r=a} = f(\phi,t), && 0\leqslant\phi\leqslant 2\pi,\ t>0,\\ &u\big|_{t=0} = g(r,\theta), && 0<r<a,\ 0<\phi<2\pi.\end{aligned}$$

由于边界条件是非齐次的，故采用分离变量法求解时，必须先将边界条件齐次化.

为确定起见，不妨设 $f(\phi,t)=A\cos 2\phi$，其中 A 为已知常数. 这时选择齐次化函数要考虑哪些原则？

设 $u(r,\phi,t)=v(r,\phi,t)+w(r,\phi,t)$.

(1) 作为最低要求，齐次化函数 w 必须满足原题中的边界条件，即

$$w\big|_{\phi=0}=w\big|_{\phi=2\pi},\qquad \frac{\partial w}{\partial\phi}\bigg|_{\phi=0}=\frac{\partial w}{\partial\phi}\bigg|_{\phi=2\pi},$$
$$w\big|_{r=0}\text{有界},\qquad w\big|_{r=a}=A\cos 2\phi.$$

(2) 更高的要求是 w 还满足原题中的偏微分方程，即

$$\frac{\partial w}{\partial t}-\kappa\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\phi^2}\right]=0.$$

(3) 考虑到非齐次边界条件中出现的函数与 t 无关，故可取 w 与 t 无关，即取 $w=w(r,\phi)$，使得 $w(r,\phi)$ 满足原定解问题中的偏微分方程 (因而只是 Laplace 方程) 及边界条件.

(4) 考虑到 $r^m\cos m\phi$ 与 $r^{-m}\cos m\phi$ 都是 Laplace 方程的解，故齐次化函数的最佳选择是 $w=A(r/a)^2\cos 2\phi$. 但不可取 $w=A(a/r)^2\cos 2\phi$，因为它不满足 $w\big|_{r=0}$ 有界的要求.

(5) 也可以取 $w=A\cos 2\phi$. 但因为它不满足 Laplace 方程，所以由此导出的 $v(r,\phi,t)$ 将不满足齐次偏微分方程.

(6) 取 $w=A(r/a)\cos 2\phi$ 可能是最不明智的选择，因为这时 $v(r,\phi,t)$ 满足非齐次偏微分方程，并无特别简单之处；而且在进一步求解 $v(r,\phi,t)$ 时，还将会遇到积分计算的额外困难.

本问题的普遍意义在于：当我们处理圆形区域的与时间有关的问题时，或是处理柱形区域的定解问题时，如果需要将边界条件齐次化，要格外小心，值得选取不同齐次化函数进行比较，并且还要预见到后续计算中将会遇到的问题.

18. 圆柱体做径向振动，其波动方程是

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{a^2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)=0$$

吗？其中 u 是柱体振动时的径向位移，a 是弹性波在柱体内的传播速率.

不对！因为圆柱体做径向振动时，其 (径向) 位移应为矢量

$$\boldsymbol{u}(r,\phi,z,t)=v(r,\phi,z,t)\,\boldsymbol{e}_r,$$

故而满足矢量波动方程

$$\frac{\partial^2\boldsymbol{u}}{\partial t^2}-a^2\nabla^2\boldsymbol{u}=0,$$

其中①

$$\nabla^2\boldsymbol{u}=\nabla^2(v\,\boldsymbol{e}_r)=\Big(\nabla^2 v-\frac{v}{r^2}\Big)\boldsymbol{e}_r+\frac{2}{r^2}\frac{\partial v}{\partial\phi}\boldsymbol{e}_\phi.$$

由此即可导出

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}-a^2\Big(\nabla^2 v-\frac{v}{r^2}\Big)=0,\qquad \frac{\partial v}{\partial\phi}=0.$$

因此，径向位移与 ϕ 无关，原则上仍然与 z 有关，即 $v=v(r,z,t)$，它满足的波动方程应该为

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}-a^2\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\frac{\partial v}{\partial r}\Big)-\frac{v}{r^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right]=0.$$

即使进一步假定 v 与 z 无关，即 $v=v(r,t)$，它满足的波动方程也应当是

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}-a^2\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\frac{\partial v}{\partial r}\Big)-\frac{v}{r^2}\right]=0.$$

19. Bessel 函数 $\mathrm{J}_\nu(z)$ 与 Neumann 函数 $\mathrm{N}_\nu(z)$ 能否有共同的零点?

不可能! 因为如果 Bessel 函数 $\mathrm{J}_\nu(z)$ 与 Neumann 函数 $\mathrm{N}_\nu(z)$ 有某一个共同零点 $z=z_0$，则 Wronski 行列式 $W[\mathrm{J}_\nu(z),\mathrm{N}_\nu(z)]_{z=z_0}=0$，因而 $W[\mathrm{J}_\nu(z),\mathrm{N}_\nu(z)]\equiv 0$，由此就会得出 $\mathrm{J}_\nu(z)$ 与 $\mathrm{N}_\nu(z)$ 线性相关的错误结论.

根据同样的理由，还能论证除了 $z=0$ 点之外，$\mathrm{J}_\nu(z)$ 与 $\mathrm{J}_\nu'(z)$ 也不可能有共同的零点. 在 $z=0$ 点，$\mathrm{J}_\nu(z)$ 与 $\mathrm{J}_\nu'(z)$ 可以同时为 0，但因为该点是 $\mathrm{N}_\nu(z)$ 的奇点，故 $W[\mathrm{J}_\nu(z),\mathrm{N}_\nu(z)]$ 可以不为 0. 事实上，当 $\mathrm{Re}\,\nu>1$ 时，就有 $\mathrm{J}_\nu(0)=\mathrm{J}_\nu'(0)=0$.

关于本题的讨论具有普遍意义. 读者不难应用于其他二阶线性常微分方程.

20. 微分算符 $\boldsymbol{A}\equiv\mathrm{i}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ 是自伴算符吗?

在回答这个问题之前，需要先回忆一下自伴算符的定义：设有算符 $\boldsymbol{A}$ 及其伴算符 $\boldsymbol{A}^\dagger$，若它们的定义域

$$\mathscr{D}_{\boldsymbol{A}}=\mathscr{D}_{\boldsymbol{A}^\dagger},$$

而且在此共同的定义域 (简写为 $\mathscr{D}$) 内

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^\dagger,\qquad \text{即}\qquad \boldsymbol{A}u=\boldsymbol{A}^\dagger u,\ \forall u\in\mathscr{D},$$

则称算符 $\boldsymbol{A}$ 为自伴算符. 因此，绝不能离开定义域去讨论算符及其伴算符. 或者说，离开算符的定义域，笼统地谈论该算符是否自伴，这种做法本身就不恰当.

① 参阅：吴崇试. 数学物理方法. 第 2 版. 北京：北京大学出版社，2004：222.

为了明确起见，不妨考虑定义在有界区间上的 $\mathscr{L}_2(0,1)$. 这时，算符 $\boldsymbol{A}\equiv \mathrm{i}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ 不可能定义在整个 $\mathscr{L}_2(0,1)$ 上，因为组成这个空间的元素 (函数) 可以不可导. 所以，算符 $\boldsymbol{A}$ 只能定义在 $\mathscr{L}_2(0,1)$ 的某个子空间上，例如

$$\boldsymbol{A}u\equiv \mathrm{i}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x},\qquad \mathscr{D}_{\boldsymbol{A}}: u(x)\ \text{绝对连续}^{①},\ u'(x)\in\mathscr{L}_2(0,1).$$

直接分部积分即得

$$\int_0^1 v^*\left(\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right)^* u\mathrm{d}x+\mathrm{i}\big[v^*(1)u(1)-v^*(0)v(0)\big],$$

即

$$\langle v,\boldsymbol{A}u\rangle=\langle \boldsymbol{A}^\dagger v,u\rangle+\mathrm{i}\big[v^*(1)u(1)-v^*(0)v(0)\big].$$

因此，作为 $\boldsymbol{A}\equiv \mathrm{i}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ 的伴算符，

$$\boldsymbol{A}^\dagger v=\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x},\qquad \mathscr{D}_{\boldsymbol{A}^\dagger}: v(x)\ \text{绝对连续},\ v'(x)\in\mathscr{L}_2(0,1),\ v(0)=v(1)=0.$$

由于定义域并不相同，所以 $\boldsymbol{A}$ 并不是自伴算符.

还可以对 $\boldsymbol{A}$ 的定义域加以进一步的限制 (通常是加上适当的边界条件)，比如

$$\boldsymbol{A}u\equiv \mathrm{i}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x},\qquad \mathscr{D}_{\boldsymbol{A}}: u(x)\ \text{绝对连续},\ u'(x)\in\mathscr{L}_2(0,1),\ u(0)=0,$$

重复上述计算，就得到

$$\boldsymbol{A}^\dagger v=\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x},\qquad \mathscr{D}_{\boldsymbol{A}^\dagger}: v(x)\ \text{绝对连续},\ v'(x)\in\mathscr{L}_2(0,1),\ v(1)=0,$$

所以这时的 $\boldsymbol{A}$ 仍不是自伴算符. 类似地，如果定义

$$\boldsymbol{A}u\equiv \mathrm{i}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x},\qquad \mathscr{D}_{\boldsymbol{A}}: u(x)\ \text{绝对连续},\ u'(x)\in\mathscr{L}_2(0,1),\ u(0)=u(1)=0,$$

则

$$\boldsymbol{A}^\dagger v=\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x},\qquad \mathscr{D}_{\boldsymbol{A}^\dagger}: v(x)\ \text{绝对连续},\ v'(x)\in\mathscr{L}_2(0,1),$$

$\boldsymbol{A}$ 也不是自伴算符.

考虑到以上的几种情形中，算符 $\boldsymbol{A}$ 之所以不自伴，原因只是 $\mathscr{D}_{\boldsymbol{A}}\neq\mathscr{D}_{\boldsymbol{A}^\dagger}$. 所以适当规定算符 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^\dagger$ 的定义域，$\boldsymbol{A}\equiv \mathrm{i}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ 就可以是自伴的. 一种做法就是缩

---

① 即存在可积函数 $v(x)$，使得 $u(x)=\int_0^x v(t)\,\mathrm{d}t+u(0)$，因此，$u(x)$ 几乎处处可微，并且是它的导函数的广义原函数. 连续而不绝对连续的例子就是所谓的 Lebesgue-Cantor 函数，它不恒为常数，但导数几乎处处为 0.

小算符 $\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{A}^\dagger$ 的定义域，例如限制到上面求得的 $\mathscr{D}_{\boldsymbol{A}}$ 与 $\mathscr{D}_{\boldsymbol{A}^\dagger}$ 的公共区域内，即

$$\mathscr{D}_{\boldsymbol{A}}:\quad u(x)\ \text{绝对连续},\ u'(x)\in\mathscr{L}_2(0,1),\ u(0)=u(1)=0,$$
$$\mathscr{D}_{\boldsymbol{A}^\dagger}:\quad v(x)\ \text{绝对连续},\ v'(x)\in\mathscr{L}_2(0,1),\ v(0)=v(1)=0,$$

则 $\boldsymbol{A}$ 就是自伴的. 还有另外一种选择，即将算符 $\boldsymbol{A}$ 定义在 $\mathscr{L}_2(0,1)$ 的另一类子空间上：

$$\boldsymbol{A}u\equiv \mathrm{i}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x},\qquad \mathscr{D}_{\boldsymbol{A}}: u(x)\ \text{绝对连续},\ u'(x)\in\mathscr{L}_2(0,1),\ u(0)=\pm u(1),$$

这时 $\boldsymbol{A}$ 也是自伴算符，因为显然有

$$\boldsymbol{A}^\dagger v=\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x},\qquad \mathscr{D}_{\boldsymbol{A}^\dagger}: v(x)\ \text{绝对连续},\ v'(x)\in\mathscr{L}_2(0,1),\ v(0)=\pm v(1).$$

21. 自伴算符与 Hermite 算符是否完全等价？换言之，自伴算符是否一定 Hermite？Hermite 算符是否一定自伴？

这里又涉及 Hermite 算符的定义：若

$$\langle v,\boldsymbol{A}u\rangle=\langle \boldsymbol{A}v,u\rangle,\qquad u,v\in\mathscr{D}_{\boldsymbol{A}},$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 为 Hermite 算符. 对照自伴算符的定义，我们就看到：

(1) 自伴算符一定是 Hermite 算符.

(2) Hermite 算符不一定自伴. 例如上面提到的

$$\boldsymbol{A}u\equiv \mathrm{i}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x},\qquad \mathscr{D}_{\boldsymbol{A}}: u(x)\ \text{绝对连续},\ u'(x)\in\mathscr{L}_2(0,1),\ u(0)=u(1)=0,$$

它不是自伴的，然而却是 Hermite 的.

进一步的结论是：

(3) 有界的 Hermite 算符一定自伴.

(4) $\mathscr{U}_n$ 内的线性算符都是有界的，因此 $\mathscr{U}_n$ 内的自伴算符与 Hermite 算符是等价的：自伴算符一定 Hermite，Hermite 算符也一定自伴.

有关讨论，详见第四章.

§1.2 特殊区域的分离变量法

能否应用分离变量法求解偏微分方程定解问题，既取决于方程的数学形式，也取决于区域的形状. 本节介绍几种特殊几何形状的区域，讨论这几种区域中分离变

量法的应用. 严格说来, 有些几何形状并不特殊, 本来就可以直接应用分离变量法, 但因为涉及一些似乎值得注意的问题, 也一并列在这里. 在讨论过程中对于微分方程的形式未加以特殊考虑. 如果可能, 我们就只处理 Laplace 方程的定解问题.

1.2.1 扇形区域

例 1.1 求解扇形区域内 Laplace 方程的边值问题

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}=0,\qquad 0<r<a,\ \ 0<\phi<\alpha,\tag{1.1a}$$

$$u\big|_{\phi=0}=0,\qquad u\big|_{\phi=\alpha}=0,\qquad 0\leqslant r\leqslant a,\tag{1.1b}$$

$$u\big|_{r=0}\text{有界},\qquad u\big|_{r=a}=f(\phi),\qquad 0\leqslant\phi\leqslant\alpha.\tag{1.1c}$$

解 令 $u(r,\phi)=R(r)\varPhi(\phi)$, 代入方程 (1.1a) 与边界条件 (1.1b), 分离变量得

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)-\frac{\lambda}{r^2}R=0\tag{1.2}$$

与

$$\frac{\mathrm{d}^2\varPhi}{\mathrm{d}\phi^2}+\lambda\varPhi=0,\tag{1.3a}$$

$$\varPhi(0)=0,\qquad \varPhi(\alpha)=0.\tag{1.3b}$$

由本征值问题 (1.3) 可以解得

$$\text{本征值}\qquad \lambda_n=\left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)^2,\qquad n=1,2,3,\cdots;\tag{1.4a}$$

$$\text{本征函数}\qquad \varPhi_n(\phi)=\sin\frac{n\pi}{\alpha}\phi.\tag{1.4b}$$

再由方程 (1.2), 解得

$$R_n(r)=A_n\left(\frac{r}{a}\right)^{n\pi/\alpha}+B_n\left(\frac{r}{a}\right)^{-n\pi/\alpha}.$$

所以得到既满足偏微分方程 (1.1a)、又满足齐次边界条件 (1.1b) 的一般解

$$u(r,\phi)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\left(\frac{r}{a}\right)^{n\pi/\alpha}+B_n\left(\frac{r}{a}\right)^{-n\pi/\alpha}\right]\sin\frac{n\pi}{\alpha}\phi.\tag{1.5}$$

因为 $u\big|_{r=0}$ 有界, 故 $B_n=0$. 又由 $u\big|_{r=a}=f(\phi)$, 即

$$\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{n\pi}{\alpha}\phi=f(\phi),$$

利用本征函数的正交性即可定出叠加系数

$$A_n = \frac{2}{\alpha}\int_0^\alpha f(\phi)\sin\frac{n\pi}{\alpha}\phi\,\mathrm{d}\phi. \tag{1.6}$$

☞ **讨论** 应该说，求解本题并无任何特别困难之处. 我们有兴趣于它的一种特殊情形，即 $\alpha = 2\pi$ 的情形. 将 $\alpha = 2\pi$ 代入到上面的结果中，即得

$$u(r,\phi) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(\frac{r}{a}\right)^{n/2} \sin\frac{n\phi}{2}, \tag{1.7a}$$

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\phi)\sin\frac{n\phi}{2}\,\mathrm{d}\phi. \tag{1.7b}$$

需要注意，这时的区域形状应为玦形，如图 1.2 所示，它根本不是圆形区域.

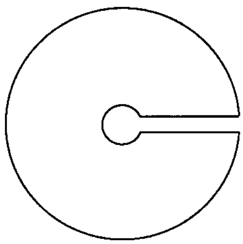


图 1.2 玦形区域

1.2.2 半圆形区域

半圆形区域其实是扇形区域的特殊情形，即 $\alpha = \pi$，所以原则上可以适用上面的结果. 但是，半圆形区域也有它的特殊之处，见下面的例子.

例 1.2 求解 Laplace 方程在半圆形区域内的边值问题①

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0, \qquad 0 < r < a,\ 0 < \phi < \pi, \tag{1.8a}$$

$$u\big|_{r=0}\text{有界}, \qquad u\big|_{r=a} = f(\phi), \qquad 0 \leqslant \phi \leqslant \pi, \tag{1.8b}$$

$$u\big|_{\phi=0} = 0, \qquad u\big|_{\phi=\pi} = 0, \qquad 0 \leqslant r < a. \tag{1.8c}$$

解法一 直接引用例 1.1 的结果，只需令 $\alpha = \pi$ 即可得到

$$u(r,\phi) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\left(\frac{r}{a}\right)^n + B_n\left(\frac{r}{a}\right)^{-n}\right]\sin n\phi, \tag{1.9a}$$

① 在半圆形区域的情形下，一定仍然是利用关于 ϕ 的微分方程及边界条件构成本征值问题，因此底边 $\phi = 0, \pi$ 上的边界条件必须是齐次的；否则必须先齐次化.

$$A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(\phi)\sin n\phi \,\mathrm{d}\phi, \tag{1.9b}$$

$$B_n = 0. \tag{1.9c}$$

解法二　延拓法. 延拓法的基本思想是假设偏微分方程在更大的区域内成立，并且设法给出未知函数在新区域边界上的数值，使之确保在原区域边界上的已知条件得以满足，则新定解问题与原有定解问题在原区域上等价.

在本题中所作延拓包括两方面，即方程的延拓与边界条件的延拓：

(1) 将原有的半圆补成完整的圆形，假设 Laplace 方程在圆内处处成立；

(2) 除了未知函数 u 在上半圆仍满足原来的边界条件外，更假设 u 在下半圆满足

$$u\big|_{r=a} = -f(2\pi-\phi).$$

于是就得到了 Laplace 方程在圆内的边值问题，其求解过程不再重复. 可以预料，这样得到的解式与解法一完全一致.

之所以能作这样的延拓，是因为如果 $u(r,\phi)$是 Laplace 的解，则 $u(r,2\pi-\phi)$ 也是该方程的解，因此 $u(r,\phi)\pm u(r,2\pi-\phi)$ 也是原方程的解. 换言之，Laplace 方程的解可以具有 (相对于 x 轴的) 奇偶性. 现在所作延拓，即是选择了 (相对于 x 轴的) 奇函数，这样就保证了 $u\big|_{\phi=0,\pi}=0$，即原边界条件成立.

1.2.3　角形区域

所谓二维平面上的角形区域，指的是三维空间中的无穷长楔形区域，它和扇形区域的差别在于：扇形区域是有界区域，而角形区域 (在 r 方向上) 则是无界的.

例 1.3　设有二维平面上的角形区域 $-\alpha<\phi<\alpha, r>0$，其两边上 $r<a$ 的线段内温度为 1，其余部分温度为 0. 求角形区域内的稳定温度分布.

解　用分离变量法解此问题①.

设角形区域内 (r,ϕ) 处的温度为 $u(r,\phi)$，它满足的定解问题为

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}=0, \qquad r>0,\ -\alpha<\phi<\alpha, \tag{1.10a}$$

$$u\big|_{r=0}\text{有界}, \qquad u\big|_{r\to\infty}\to 0, \qquad -\alpha\leqslant\phi\leqslant\alpha, \tag{1.10b}$$

$$u\big|_{\phi=\pm\alpha}=\eta(a-r), \qquad 0\leqslant r<\infty, \tag{1.10c}$$

其中 $\eta(x)$ 是 Heaviside 函数. 因为 $r<a$ 时为非齐次边界条件，需要齐次化，同时考虑到边界条件 (1.10b)，故应设

① 此问题亦可用 Mellin 变换方法求解. 见吴崇试编著的《数学物理方法专题 —— 复变函数与积分变换》(北京大学出版社)，第十四章.

$$u(r,\phi)=\begin{cases}1+\sum_{n=1}^{\infty}C_n\left(\frac{r}{a}\right)^{n\pi/2\alpha}\sin\frac{n\pi}{2\alpha}(\phi+\alpha), & r<a,\\ \sum_{n=1}^{\infty}D_n\left(\frac{r}{a}\right)^{-n\pi/2\alpha}\sin\frac{n\pi}{2\alpha}(\phi+\alpha), & r<a.\end{cases}\tag{1.11}$$

当 $r=a$ 时，需满足连接条件

$$u\Big|_{r=a-}=u\Big|_{r=a+},\qquad \frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=a-}=\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=a+},$$

亦即

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\frac{n\pi}{2\alpha}(\phi+\alpha)=\sum_{n=1}^{\infty}D_n\sin\frac{n\pi}{2\alpha}(\phi+\alpha),\tag{1.12a}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}C_n n\sin\frac{n\pi}{2\alpha}(\phi+\alpha)=-\sum_{n=1}^{\infty}D_n n\sin\frac{n\pi}{2\alpha}(\phi+\alpha).\tag{1.12b}$$

将 (1.12a) 式左端的函数 1 也按本征函数 $\left\{\sin\frac{n\pi}{2\alpha}(\phi+\alpha)\right\}$ 展开：

$$1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right]\sin\frac{n\pi}{2\alpha}(\phi+\alpha),$$

代入 (1.12a) 式，而后比较 (1.12a) 与 (1.12b) 两式左右两端的系数，即得

$$\frac{2}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right]+C_n=D_n,\qquad C_n=-D_n.$$

解之得

$$C_n=-D_n=\frac{1-(-1)^n}{n\pi}=\begin{cases}0, & n=2m,\quad m=1,2,3,\cdots,\\ \dfrac{2}{(2m+1)\pi}, & n=2m+1,\quad m=0,1,2,\cdots.\end{cases}$$

因此

$$u(r,\phi)=\begin{cases}1-\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{r}{a}\right)^{(2n+1)\pi/2\alpha}\sin\frac{2n+1}{2\alpha}\pi(\phi+\alpha), & r<a,\\ \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{r}{a}\right)^{-(2n+1)\pi/2\alpha}\sin\frac{2n+1}{2\alpha}\pi(\phi+\alpha), & r>a.\end{cases}$$

再利用

$$\sin\frac{2n+1}{2\alpha}\pi(\phi+\alpha)=(-1)^n\cos\frac{2n+1}{2\alpha}\pi\phi$$

化简，就得到最后结果

$$u(r,\phi)=\begin{cases}1-\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}\left(\dfrac{r}{a}\right)^{(2n+1)\pi/2\alpha}\cos\dfrac{2n+1}{2\alpha}\pi\phi, & r<a,\\ \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}\left(\dfrac{r}{a}\right)^{-(2n+1)\pi/2\alpha}\cos\dfrac{2n+1}{2\alpha}\pi\phi, & r>a.\end{cases}\tag{1.13}$$

我们看到，它和用 Mellin 变换得到的形式完全相同.

1.2.4 直角三角形区域

例 1.4 求解等腰直角三角形区域内 Laplace 方程的边值问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\qquad x>0,\ y>0,\ x+y<1,\tag{1.14a}$$

$$u\big|_{x=0}=f(y),\qquad 0\leqslant y\leqslant 1,\tag{1.14b}$$

$$u\big|_{y=0}=g(x),\qquad 0\leqslant x\leqslant 1,\tag{1.14c}$$

$$u\big|_{x+y=1}=0,\qquad 0\leqslant x\leqslant 1.\tag{1.14d}$$

解 本题遇到的是三角形区域，其边界不可能与正交曲面坐标系的坐标面完全重合，因此斜边上的边界条件无法分离变量.

为了应用分离变量法，可以将等腰直角三角形外再拼接上一个等腰直角三角形，即延拓为正方形，如图 1.3 所示. 而新的定解问题则为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\qquad 0<x<1,\ 0<y<1,\tag{1.15a}$$

$$u\big|_{x=0}=f(y),\qquad u\big|_{x=1}=-g(1-y),\qquad 0\leqslant y\leqslant 1,\tag{1.15b}$$

$$u\big|_{y=0}=g(x),\qquad u\big|_{y=1}=-f(1-x),\qquad 0\leqslant x\leqslant 1.\tag{1.15c}$$

这里在直角边 $x=1$ 与 $y=1$ 上所加的边界条件，是为了保证未知函数 u 在对角线 (即原来的斜边) $x+y=1$ 上的数值为 0，而根据边值问题解的存在唯一性，则保证了定解问题 (1.15) 在原来的三角形区域内等价于定解问题 (1.14).

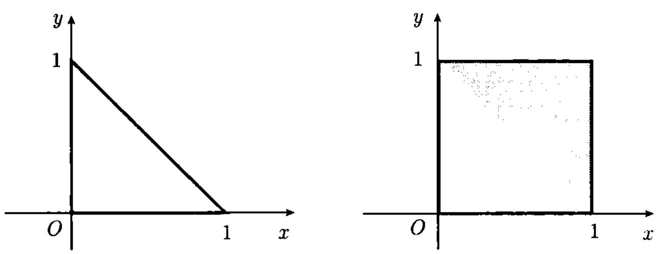


图 1.3 等腰直角三角形区域 (左)，可延拓为正方形区域 (右)

为了求解定解问题 (1.15)，又需要进一步分解为 $u = u_1 + u_2$，其中 u_1 与 u_2 分别是定解问题

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = 0, \qquad 0 < x < 1,\ 0 < y < 1, \tag{1.16a}$$

$$u_1\big|_{x=0} = 0, \qquad u_1\big|_{x=1} = 0, \qquad 0 \leqslant y \leqslant 1, \tag{1.16b}$$

$$u_1\big|_{y=0} = g(x), \qquad u_1\big|_{y=1} = -f(1-x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1 \tag{1.16c}$$

与

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = 0, \qquad 0 < x < 1,\ 0 < y < 1, \tag{1.17a}$$

$$u_2\big|_{x=0} = f(y), \qquad u_2\big|_{x=1} = -g(1-y), \qquad 0 \leqslant y \leqslant 1, \tag{1.17b}$$

$$u_2\big|_{y=0} = 0, \qquad u_2\big|_{y=1} = 0, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1 \tag{1.17c}$$

的解. 这样就转化为典型的分离变量法的问题. 不难求得，对于定解问题 (1.16)，

$$u_1(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \sinh n\pi x + B_n \sinh n\pi(1-x)\right] \sin n\pi y, \tag{1.18a}$$

$$A_n = -\frac{2}{\sinh n\pi} \int_0^1 g(1-y) \sin n\pi y \,\mathrm{d}y = (-1)^n \frac{2}{\sinh n\pi} \int_0^1 g(t) \sin n\pi t \,\mathrm{d}t, \tag{1.18b}$$

$$B_n = \frac{2}{\sinh n\pi} \int_0^1 f(t) \sin n\pi t \,\mathrm{d}t; \tag{1.18c}$$

对于定解问题 (1.17)，

$$u_2(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[C_n \sinh n\pi y + D_n \sinh n\pi(1-y)\right] \sin n\pi x, \tag{1.19a}$$

$$C_n = -\frac{2}{\sinh n\pi} \int_0^1 f(1-x) \sin n\pi x \,\mathrm{d}x = (-1)^n \frac{2}{\sinh n\pi} \int_0^1 f(t) \sin n\pi t \,\mathrm{d}t, \tag{1.19b}$$

$$D_n = \frac{2}{\sinh n\pi} \int_0^1 g(t) \sin n\pi t \,\mathrm{d}t. \tag{1.19c}$$

显然 $C_n = (-1)^n B_n$，$D_n = (-1)^n A_n$.

例 1.5 延拓法失效的例子：求解直角三角形区域内 Laplace 方程边值问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad x > 0,\ \ y > 0,\ x + by < 1, \tag{1.20a}$$

$$u\big|_{x=0} = f(y), \qquad 0 \leqslant y \leqslant 1/b, \tag{1.20b}$$

$$u\big|_{y=0} = g(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{1.20c}$$

$$u\big|_{x+by=1} = 0, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1. \tag{1.20d}$$

解 表面上看来，尽管现在遇到的区域不是等腰直角三角形，但是经过一个简单的变换 $\xi = x$, $\eta = by$ 就能化为等腰直角三角形，相应地，定解问题变为

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + b^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0, &&\xi > 0,\ \eta > 0,\ \xi + \eta < 1,\\
&u\big|_{\xi=0} = f\Big(\frac{\eta}{b}\Big), &&0 \leqslant \eta \leqslant 1,\\
&u\big|_{\eta=0} = g(\xi), &&0 \leqslant \xi \leqslant 1,\\
&u\big|_{\xi+\eta=1} = 0, &&0 \leqslant \xi \leqslant 1.
\end{aligned}$$

注意，这里的偏微分方程并不是 Laplace 方程. 尽管我们似乎仍然可以仿照例 1.4，将等腰直角三角形延拓为正方形，从而得到

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + b^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0, && &&0 < \xi < 1,\ 0 < \eta < 1,\\
&u\big|_{\xi=0} = f\Big(\frac{\eta}{b}\Big), &&u\big|_{\xi=1} = -g(1-\eta), &&0 \leqslant \eta \leqslant 1,\\
&u\big|_{\eta=0} = g(\xi), &&u\big|_{\eta=1} = -f\Big(\frac{1-\xi}{b}\Big), &&0 \leqslant \xi \leqslant 1,
\end{aligned}$$

再按照分离变量法的标准步骤，就能求得

$$\begin{aligned}
u(x,y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \big[A_n \sinh n\pi b\xi + B_n \sinh n\pi b(1-\xi)\big] \sin n\pi\eta\\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \Big[C_n \sinh \frac{n\pi}{b}\eta + D_n \sinh \frac{n\pi}{b}(1-\eta)\Big] \sin n\pi\xi\\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \big[A_n \sinh n\pi bx + B_n \sinh n\pi b(1-x)\big] \sin n\pi by\\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \Big[C_n \sinh n\pi y + D_n \sinh n\pi\Big(\frac{1}{b} - y\Big)\Big] \sin n\pi x,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_n &= -\frac{2}{\sinh n\pi b} \int_0^1 g(1-\eta) \sin n\pi\eta \, \mathrm{d}\eta = (-1)^n \frac{2}{\sinh n\pi b} \int_0^1 g(t) \sin n\pi t \, \mathrm{d}t,\\
B_n &= \frac{2}{\sinh n\pi b} \int_0^1 f\Big(\frac{\eta}{b}\Big) \sin n\pi\eta \, \mathrm{d}\eta = \frac{2b}{\sinh n\pi b} \int_0^{1/b} f(t) \sin n\pi bt \, \mathrm{d}t,\\
C_n &= -\frac{2}{\sinh(n\pi/b)} \int_0^1 f\Big(\frac{1-\xi}{b}\Big) \sin n\pi\xi \, \mathrm{d}\xi = \frac{(-1)^n\, 2}{\sinh(n\pi/b)} \int_0^1 f(t) \sin n\pi bt \, \mathrm{d}t,\\
D_n &= \frac{2}{\sinh(n\pi/b)} \int_0^1 g(\xi) \sin n\pi\xi \, \mathrm{d}\xi,
\end{aligned}$$

但是不难直接验证，这样得到的 $u(x,y)$ 并不满足 $u(x,y)\big|_{x+by=1}=0$ 的要求，因此说明它根本不是原定解问题的解.

上述求解过程错在哪里？在应用延拓法时，我们通常会比较注意边界条件的要求，但容易忽略对于方程的要求. 在上面的例子中，由等腰直角三角形到正方形的延拓是没有根据的. 为了看清这一点，不妨将延拓过程进一步分解为旋转与延拓两步 (见图 1.4). 第一步的旋转就是作变换

$$\sigma=\frac{1}{\sqrt{2}}\big(-\xi+\eta\big),\qquad \tau=\frac{1}{\sqrt{2}}\big(1-\xi-\eta\big).$$

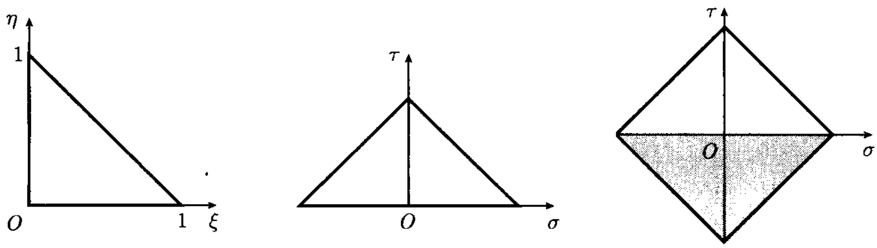


图 1.4　将等腰直角三角形区域延拓为正方形区域的分解步骤

在此变换下，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}=\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial\sigma^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial\sigma\partial\tau}+\frac{\partial^2 u}{\partial\tau^2}\Big),\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}=\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial\sigma^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial\sigma\partial\tau}-\frac{\partial^2 u}{\partial\tau^2}\Big),$$

因此原方程变为

$$(1+b^2)\frac{\partial^2 u}{\partial\sigma^2}+2(1-b^2)\frac{\partial^2 u}{\partial\sigma\partial\tau}+(1+b^2)\frac{\partial^2 u}{\partial\tau^2}=0.$$

这个方程的解显然不具有奇偶性. 换言之，如果 $u(\sigma,\tau)$ 是此方程的解，则 $u(\sigma,-\tau)$ 一定不是此方程的解 (除非 $b=\pm1$). 因此我们就没有任何理由认为此方程的解是 (相对于 σ 轴的) 奇函数. 这就是上面用延拓法求解失败的原因所在.

1.2.5　保角变换的应用

应用保角变换，可以将 z 平面上的区域变为 ζ 平面上的相应区域，而 Laplace 方程的形式不变. 利用这一特性，我们可以扩充分离变量法的应用范围，将一些表面上看来无法应用分离变量法的平面区域变为可以适用分离变量法. 这里不去讨论如何选择变换使得已知图形转化为合适的平面区域 (通常是圆内区域或上半平面)，而是采用相反的思路，考察某些图形 (例如矩形或三角形) 通过保角变换能变

成什么特殊图形. 例如，图 1.3 中的等腰直角三角形在变换 $\zeta=2z/(1+z)$，即

$$\xi=\frac{x(1+x)+y^2}{(1+x)^2+y^2},\qquad \eta=\frac{y}{(1+x)^2+y^2}$$

之下，就变为图 1.5 中的曲线三角形，直角三角形的两条直角边分别变为曲线三角形的底边及

$$(\xi-1)^2+\eta^2=1$$

上的一段圆弧，而斜边则变为另一段圆弧

$$\left(\xi-\frac{3}{2}\right)^2+\left(\eta-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}.$$

这里值得提请大家注意的是，曲线三角形的三个角中，也是一个为直角，另两个均为 45°. 这个例子也就反过来告诉我们，通过 $\zeta=2z/(1+z)$ 的逆变换 $z=\zeta/(2-\zeta)$ 就能将图 1.5 所示的曲线三角形区域变为 z 平面上的等腰直角三角形区域，因此，Laplace 方程在前一区域内的边值问题就转化为在后一区域内的边值问题，也就转化为能用分离变量法求解的问题.

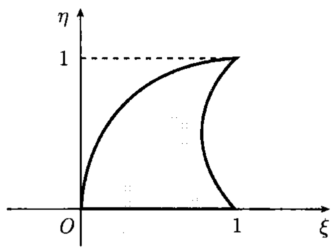


图 1.5　由等腰直角三角形区域变换得的曲线三角形区域

我们还可以寻找新的变换. 例如，对于同样的等腰直角三角形区域，在变换

$$\zeta=\frac{2z-(1+\mathrm{i})}{z-(1+\mathrm{i})},$$

亦即

$$\xi=\frac{(x-1)(2x-1)+(y-1)(2y-1)}{(x-1)^2+(y-1)^2},$$
$$\eta=\frac{x-y}{(x-1)^2+(y-1)^2}$$

之下，又将转化为图 1.6 中的月牙形区域，其中斜边对应于半圆弧

$$(\xi-1)^2+\eta^2=1,\qquad \xi<1,$$

而两个直角边则对应于两段圆弧

$$\left(\xi-\frac{3}{2}\right)^2+\left(\eta\mp\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}.$$

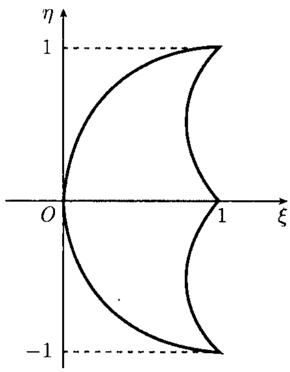


图 1.6 由等腰直角三角形区域变换得的另一种区域

以上讨论中出现的变换都属于线性分式变换. 这类变换的优点是: (1) 具有保角性; (2) Laplace 方程的形式不变. 因此，这类变换多用于二维 Laplace 方程乃至 Poisson 方程的边值问题中.

还值得提到，应用保角变换 $\zeta=z^{\pi/\alpha}$，即

$$\begin{cases}x=r\cos\phi,\\ y=r\sin\phi\end{cases}\quad\mapsto\quad\begin{cases}\xi=r^{\pi/\alpha}\cos\dfrac{\phi\pi}{\alpha},\\ y=r^{\pi/\alpha}\sin\dfrac{\phi\pi}{\alpha},\end{cases}$$

也可以将例 1.1 中的扇形区域变为半圆形区域. 在这个变换中，$z=0$ 点 (对应于 $\zeta=0$ 点) 并不保角: z 平面上的顶角 α 变为 ζ 平面上的平角. 但恰恰是因为在这一点 (而且是唯一的一点) 不保角，才能将扇形变换为半圆形.

§1.3 特殊的复变函数技巧 —— Wiener-Hopf 方法

本节介绍某些偏微分方程定解问题的一种特殊解法，即将原定解问题作 Fourier 变换，通过解析性的分析，再结合解析延拓的技巧，从而解出像函数，最后求得原定解问题的解.

作为例子，考虑荷电的半无穷平面产生的静电势问题[①]. 为便于求解，假设半无界平面上的电势 $u(x,y)$ 已知，但不为常数，即讨论二维 Laplace 方程定解问题

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}=0, \tag{1.21a}$$

$$u(x,0)\big|_{x<0}=\mathrm{e}^{\alpha x},\qquad \alpha>0, \tag{1.21b}$$

$$u(x,y)\big|_{x^2+y^2\to\infty}\to 0. \tag{1.21c}$$

容易看出，$u(x,y)$ 应当具有下列对称性：

$$u(x,y)=u(x,-y). \tag{1.22}$$

作 Fourier 变换

$$u(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}U(k,y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k, \tag{1.23a}$$

$$U(k,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u(x,y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x, \tag{1.23b}$$

则 Laplace 方程变为

$$\frac{\mathrm{d}^2U(k,y)}{\mathrm{d}y^2}-k^2U(k,y)=0. \tag{1.24}$$

考虑到无穷远条件 (1.21c)，方程 (1.24) 的解为

$$U(k,y)=\begin{cases}A(k)\,\mathrm{e}^{-|k|y}, & y>0,\\ B(k)\,\mathrm{e}^{+|k|y}, & y<0.\end{cases} \tag{1.25}$$

电势 $u(x,y)$ 在 $y=0$ 的连续性意味着 (1.25) 式中的 $A(k)=B(k)$. 我们因此得到 $U(k,y)=U(k,-y)$. 其实它只不过是对称性 (1.22) 在像函数上的反映.

再来分析偏导数 $\dfrac{\partial u}{\partial y}$. 为此将 (1.22a) 式求导，并用 (1.25) 式代入，即得

$$\left.\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right|_{y=0+}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[-|k|\,A(k)\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k, \tag{1.26}$$

$$\left.\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right|_{y=0-}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[+|k|\,A(k)\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k. \tag{1.27}$$

因此，对于任意 x，我们有

$$\left.\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right|_{y=0+}=-\left.\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right|_{y=0-}. \tag{1.28}$$

① 引自文献：H. W. Wyld. *Mathematical Methods for Physics*. Reading, Massachusetts: W. A. Benjamin, Inc. 1976: Chap. 14.

另一方面，电势 $u(x,y)$ 在正实轴上的连续性又意味着

$$\left.\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right|_{y=0+}=\left.\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right|_{y=0-}, \qquad x>0, \tag{1.29}$$

因此必有

$$\left.\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right|_{y=0+}=\left.\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right|_{y=0-}=0, \qquad x>0. \tag{1.30}$$

于是，现在就可以将 $u(x,y)$ 及 $\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y}$ 在 $y=0$ 的已知值及未知值列表如下：

	$x<0$	$x>0$
$u(x,0)$	$\mathrm{e}^{\alpha x}$	?
$\left.\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right\|_{y=0}$	?	0

这是一种混合边值问题，可以应用一种特殊的复变函数技巧 —— Wiener-Hopf 方法求解.

在 (1.23b) 式中代入 $y=0$，并应用 (1.25) 式，即得

$$\begin{aligned}A(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u(x,0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{\alpha x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty}u(x,0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\mathrm{i}}{k+\mathrm{i}\alpha}\right)_{+}+F_{-}(k).\end{aligned} \tag{1.31}$$

这里已经算出了 $u|_{x<0}$ 的 Fourier 变换，它是一个“+”型函数：函数在上半平面解析，唯一的一个奇点 $k=-\mathrm{i}\alpha$ 处于下半平面. $u(x,y)$ 在 $x>0$ 的未知部分给出的 Fourier 变换 $F_{-}(k)$ 在下半平面解析. 类似地，(1.26) 式的反演给出

$$\begin{aligned}-|k|\,A(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0+}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0}\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0+}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty}\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0+}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x\\ &= G_{+}(k)+0.\end{aligned} \tag{1.32}$$

需要分析 (1.32) 式左端 $|k|$ 的解析性. 不妨引进参数 $\varepsilon>0$，而在最后让 ε 趋于 0. 这样将 $|k|$ 改写为

$$\sqrt{k^2+\varepsilon^2}=\sqrt{(k+\mathrm{i}\varepsilon)(k-\mathrm{i}\varepsilon)}=(r_1r_2)^{1/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)/2}, \tag{1.33}$$

其中 $k+\mathrm{i}\varepsilon=r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}$，$k-\mathrm{i}\varepsilon=r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}$，$-\pi/2<\theta_1<3\pi/2$，$-3\pi/2<\theta_2<\pi/2$. 割线如图 1.7 所示. 为了醒目，我们将上式写成

$$\sqrt{k^2+\varepsilon^2}=(\sqrt{k+\mathrm{i}\varepsilon})_+(\sqrt{k-\mathrm{i}\varepsilon})_-, \tag{1.34}$$

其中因子 $(\sqrt{k+\mathrm{i}\varepsilon})$ 右下角的"+"号表明此因子在上半平面解析 (奇点位于下半平面)，同样，出现在因子 $(\sqrt{k-\mathrm{i}\varepsilon})$ 右下角的"−"号表明此因子在下半平面解析 (奇点位于上半平面).

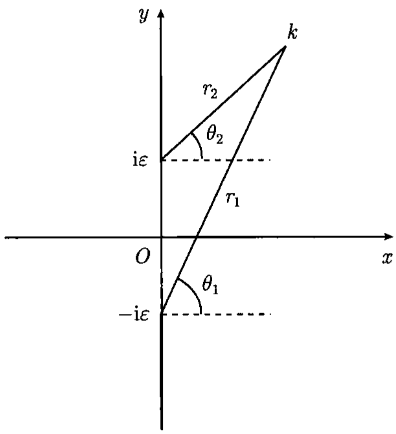


图 1.7　多值函数$\sqrt{k^2+\varepsilon^2}$

将 (1.34) 式代入 (1.32) 式，并且暂时保留 ε 为有限值，即得

$$A(k)=-\frac{G_+(k)}{(\sqrt{k+\mathrm{i}\varepsilon})_+}\frac{1}{(\sqrt{k-\mathrm{i}\varepsilon})_-}, \tag{1.35}$$

再代入 (1.31) 式，则有

$$-\frac{G_+(k)}{(\sqrt{k+\mathrm{i}\varepsilon})_+}=(\sqrt{k-\mathrm{i}\varepsilon})_-F_-(k)+\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2\pi}}\frac{(\sqrt{k-\mathrm{i}\varepsilon})_-}{(k+\mathrm{i}\alpha)_+}. \tag{1.36}$$

我们能将 (1.36) 式右端的第二项改写为 − 型函数与 + 型函数之和：

$$\frac{(\sqrt{k-\mathrm{i}\varepsilon})_-}{(k+\mathrm{i}\alpha)_+}=\left(\frac{\sqrt{k-\mathrm{i}\varepsilon}-\sqrt{-\mathrm{i}\alpha-\mathrm{i}\varepsilon}}{k+\mathrm{i}\alpha}\right)_-+\left(\frac{\sqrt{-\mathrm{i}\alpha-\mathrm{i}\varepsilon}}{k+\mathrm{i}\alpha}\right)_+. \tag{1.37}$$

这里加上并又减去常数项 $\sqrt{-\mathrm{i}\alpha-\mathrm{i}\varepsilon}$，目的是消去第一项中在 $k=-\mathrm{i}\alpha$ 处的奇异性. 将 (1.37) 式代入 (1.36) 式，并略加重排，就得到

$$-\frac{G_+(k)}{(\sqrt{k+\mathrm{i}\varepsilon})_+}-\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\sqrt{-\mathrm{i}\alpha-\mathrm{i}\varepsilon}}{k+\mathrm{i}\alpha}\right)_+$$
$$=(\sqrt{k-\mathrm{i}\varepsilon})_-F_-(k)+\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\sqrt{k-\mathrm{i}\varepsilon}-\sqrt{-\mathrm{i}\alpha-\mathrm{i}\varepsilon}}{k+\mathrm{i}\alpha}\right)_- . \tag{1.38}$$

这个关于复变量 k 的等式，左端在上半平面 (准确说是在 $\mathrm{Im}\,k>\max(-\varepsilon,-\alpha)$ 的上半平面) 解析，右端在下半平面 (准确说是在 $\mathrm{Im}\,k<\min(\varepsilon,\alpha)$ 的下半平面) 解析，且在公共区域内相等，故两端互为解析延拓. 它们共同定义了在全平面上的解析函数 (整函数，因此只能是多项式)，记为 $E(k)$. 这样，由 (1.38) 式解出 $G_+(k)$:

$$G_+(k)=-\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{-\mathrm{i}\alpha-\mathrm{i}\varepsilon}\left(\frac{\sqrt{k+\mathrm{i}\varepsilon}}{k+\mathrm{i}\alpha}\right)_+-(\sqrt{k+\mathrm{i}\varepsilon})_+E(k). \tag{1.39}$$

我们看到，只要 $E(k)\neq 0$，则在上半平面 $k\to\infty$ 时 $G_+(k)\to\infty$. 这与 $\mathrm{Im}\,k\to+\infty$ 时 $G_+(k)$ 必须趋于 0 的要求①矛盾，因此必须有 $E(k)=0$，即

$$G_+(k)=-\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{-\mathrm{i}\alpha-\mathrm{i}\varepsilon}\left(\frac{\sqrt{k+\mathrm{i}\varepsilon}}{k+\mathrm{i}\alpha}\right)_+ . \tag{1.40}$$

代回到 (1.35) 式中，并令 $\varepsilon\to 0$，就求得 $A(k)$:

$$A(k)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sqrt{-\mathrm{i}\alpha-\mathrm{i}\varepsilon}}{(k+\mathrm{i}\alpha)\sqrt{k-\mathrm{i}\varepsilon}}=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{\alpha}{2\pi}}\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}}{\sqrt{k}(k+\mathrm{i}\alpha)}, & k>0,\\[2ex] \sqrt{\dfrac{\alpha}{2\pi}}\dfrac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}}{\sqrt{-k}(-k-\mathrm{i}\alpha)}, & k<0.\end{cases} \tag{1.41}$$

这里已经用了

$$\sqrt{k-\mathrm{i}\varepsilon}\xrightarrow{\varepsilon\to 0}\begin{cases}\sqrt{k}, & k>0,\\ -\mathrm{i}\sqrt{-k}, & k<0\end{cases}$$

及

$$\sqrt{-\mathrm{i}\alpha-\mathrm{i}\varepsilon}\xrightarrow{\varepsilon\to 0}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}\sqrt{\alpha}.$$

边值问题的解由 (1.23a) 和 (1.25) 式给出. 不妨设 $y>0$，于是我们就有

$$\begin{aligned}u(x,-y)&=u(x,y)\\&=\frac{\sqrt{\alpha}}{2\pi}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx-ky}}{\sqrt{k}(k+\mathrm{i}\alpha)}\mathrm{d}k+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}\int_{-\infty}^{0}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx+ky}}{\sqrt{-k}(-k-\mathrm{i}\alpha)}\mathrm{d}k\right]\end{aligned}$$

① 可参阅吴崇试编著的《数学物理方法专题 —— 复变函数与积分变换》(北京大学出版社) 一书第十二章 §12.5 中有关单侧函数的讨论.

$$= \frac{\sqrt{\alpha}}{\pi} \mathrm{Re} \left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4} \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}}{\sqrt{k}(k+\mathrm{i}\alpha)} \mathrm{d}k \right], \qquad z = x + \mathrm{i}y. \tag{1.42}$$

为了计算出积分

$$F(z) = \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}}{\sqrt{k}(k+\mathrm{i}\alpha)} \mathrm{d}k, \tag{1.43}$$

可以列出 $F(z)$ 所满足的微分方程. 将 (1.43) 式微商，有

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}F(z)}{\mathrm{d}z} &= \int_0^\infty \mathrm{i}(k+\mathrm{i}\alpha-\mathrm{i}\alpha) \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}}{\sqrt{k}(k+\mathrm{i}\alpha)} \mathrm{d}k \\ &= \alpha F(z) + \mathrm{e}^{\mathrm{i}3\pi/4} \sqrt{\frac{\pi}{z}}, \end{aligned} \tag{1.44}$$

初始条件为

$$F(0) = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{k}(k+\mathrm{i}\alpha)} \mathrm{d}k = 2\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t^2+\mathrm{i}\alpha} = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}. \tag{1.45}$$

解之即得

$$F(z) = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4} \mathrm{e}^{\alpha z} \left[1 - \mathrm{erf}\,(\sqrt{\alpha z})\right], \tag{1.46}$$

其中 $\mathrm{erf}\,(\zeta)$ 为误差函数:

$$\mathrm{erf}\,(\zeta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\zeta \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t. \tag{1.47}$$

再代回到 (1.42) 式中，就求出了

$$u(x,y) = \mathrm{Re}\left\{\mathrm{e}^{\alpha z}\left[1 - \mathrm{erf}\,(\sqrt{\alpha z})\right]\right\}. \tag{1.48}$$

解式 (1.48) 显然满足原始的边界条件 (1.21b)，因为宗量为纯虚数的误差函数值为纯虚数，这从它的定义 (1.47) 式直接就可以看出.

第二章　分离变量法例题补遗

§2.1　异质杆的固有频率

先讨论由几种均匀介质连接而成的体系的波动问题.

例 2.1　设杆 AC 由两部分均匀介质组成: $AB = l_1, BC = l_2$. 若 A 端固定，C 端自由，求杆的纵振动的本征频率.

解　这是一个求固有振动频率的问题，只是偏微分方程和边界条件已知. 为叙述简便起见，以下将 AB 段的杆称为介质 I，BC 段的杆称为介质 II. 取杆的一端坐标为 $x = 0$. 设杆的纵振动位移为

$$u(x,t) = \begin{cases} u_1(x,t), & 0 < x < l_1, \\ u_2(x,t), & l_1 < x < l_1 + l_2, \end{cases} \tag{2.1}$$

则 $u(x,t)$ 满足的方程为

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - a_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = 0, \qquad 0 < x < l_1, \tag{2.2a}$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - a_2^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = 0, \qquad l_1 < x < l_1 + l_2, \tag{2.2b}$$

其中

$$a_1 = \sqrt{\frac{E_1}{\rho_1}}, \qquad a_2 = \sqrt{\frac{E_2}{\rho_2}},$$

上式中 E_1 和 E_2 分别是介质 I 和介质 II 的 Yang 氏模量，ρ_1 和 ρ_2 是它们的密度. 按照题设，边界条件为

$$u_1\big|_{x=0} = 0, \tag{2.2c}$$

$$\left.\frac{\partial u_2}{\partial x}\right|_{x=l_1+l_2} = 0. \tag{2.2d}$$

而在两种介质的界面处，应该加上连接条件

$$u_1\big|_{x=l_1} = u_2\big|_{x=l_1}, \tag{2.2e}$$

$$E_1 \left.\frac{\partial u_1}{\partial x}\right|_{x=l_1} = E_2 \left.\frac{\partial u_2}{\partial x}\right|_{x=l_1}. \tag{2.2f}$$

前者表示位移在界面处 (任意一个时刻都) 连续，后者表示界面两侧的弹性力相等 (隐含了假设两段杆的截面相等).

由于两段杆牢固地连接在一起，它们必须以共同的固有频率振动 (否则杆将断成两截). 设固有频率为 ω，即

$$u_1(x,t) = X_1(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}, \tag{2.3a}$$

$$u_2(x,t) = X_2(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}, \tag{2.3b}$$

代入方程 (2.2a)，(2.2b) 和边界条件 (2.2c)，(2.2d)，分离变量，则得到 $X_1(x)$ 和 $X_2(x)$ 所满足的常微分方程及边界条件

$$X_1''(x) + \left(\frac{\omega}{a_1}\right)^2 X_1(x) = 0, \tag{2.4a}$$

$$X_2''(x) + \left(\frac{\omega}{a_2}\right)^2 X_2(x) = 0, \tag{2.4b}$$

$$X_1(0) = 0, \tag{2.4c}$$

$$X_2(l_1 + l_2) = 0. \tag{2.4d}$$

此外，还有连接条件

$$X_1(l_1) = X_2(l_1), \tag{2.4e}$$

$$E_1 X_1'(l_1) = E_2 X_2'(l_1). \tag{2.4f}$$

现在，由常微分方程 (2.4a)，(2.4b)，边界条件 (2.4c)，(2.4d) 及连接条件 (2.4e)，(2.4f) 也构成了一个本征值问题，其中本征值为 ω^2，本征函数是

$$X(x) = \begin{cases} X_1(x), & 0 < x < l_1, \\ X_2(x), & l_1 < x < l_1 + l_2. \end{cases}$$

下面就来求解本征值问题. 由方程 (2.4a) 及边界条件 (2.4c)，有

$$X_1(x) = A\sin\frac{\omega}{a_1}x,$$

再由方程 (2.4b) 及边界条件 (2.4d)，又有

$$X_2(x) = B\cos\frac{\omega}{a_2}(l_1 + l_2 - x).$$

代入连接条件 (2.4e) 和 (2.4f)，即得

$$A\sin\frac{\omega}{a_1}l_1 = B\cos\frac{\omega}{a_2}l_2, \tag{2.5a}$$

$$AE_1\frac{\omega}{a_1}\cos\frac{\omega}{a_1}l_1 = BE_2\frac{\omega}{a_2}\sin\frac{\omega}{a_2}l_2. \tag{2.5b}$$

原则上由这个方程组就可以定出固有频率 ω 及系数 A, B，并进而定出本征函数.

现在需要考虑下列几种情形:

(1) 若 $\cos\frac{\omega}{a_1}l_1 \neq 0, \cos\frac{\omega}{a_2}l_2 \neq 0$，此时一定也有 $\sin\frac{\omega}{a_1}l_1 \neq 0, \sin\frac{\omega}{a_2}l_2 \neq 0$. 把 (2.5a) 和 (2.5b) 式看成关于 A 和 B 的线性代数方程组，它有非零解的充分必要条件是

$$\begin{vmatrix} \sin\frac{\omega}{a_1}l_1 & -\cos\frac{\omega}{a_2}l_2 \\ E_1\frac{\omega}{a_1}\cos\frac{\omega}{a_1}l_1 & -E_2\frac{\omega}{a_2}\sin\frac{\omega}{a_2}l_2 \end{vmatrix} = 0,$$

即

$$E_1\frac{\omega}{a_1}\cos\frac{\omega}{a_1}l_1\cos\frac{\omega}{a_2}l_2 - E_2\frac{\omega}{a_2}\sin\frac{\omega}{a_2}l_2\sin\frac{\omega}{a_1}l_1 = 0.$$

则本征频率 ω_n 应满足超越方程

$$\frac{E_1}{a_1}\cot\frac{\omega}{a_1}l_1 = \frac{E_2}{a_2}\tan\frac{\omega}{a_2}l_2.$$

此方程有无穷多个正根，可以把它们从小到大排列起来:

$$0 < \omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \cdots < \omega_n < \cdots. \tag{2.6a}$$

对于每一个本征频率 ω_n，可以由方程组 (2.5) 求出 A 和 B:

$$A = \frac{1}{\sin\frac{\omega_n}{a_1}l_1}, \qquad B = \frac{1}{\cos\frac{\omega_n}{a_2}l_2},$$

相应的本征函数就是

$$X_n(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin\frac{\omega_n}{a_1}x}{\sin\frac{\omega_n}{a_1}l_1}, & 0 < x < l_1, \\[2ex] \dfrac{\cos\frac{\omega_n}{a_2}(l-x)}{\cos\frac{\omega_n}{a_2}l_2}, & l_1 < x < l_1 + l_2. \end{cases} \tag{2.6b}$$

在 Koshlyakov, Smirnov, Gliner 所编的 *Differential Equations of Mathematical Physics* 一书中 (见该书第 132 — 133 页，Prob. 6) 就只给出了这个结果.

(2) 若 $\sin\dfrac{\omega}{a_1}l_1=0,\ \cos\dfrac{\omega}{a_2}l_2=0$，则 $\omega l_1/a_1$ 一定是 π 的整数倍 (即第一段杆的杆长 l_1 正好是半波长的整数倍)，$\omega l_2/a_2$ 一定是 $\pi/2$ 的奇数倍 (即第二段杆的杆长 l_2 正好是 1/4 波长的奇数倍)，即一定有

$$\frac{l_1}{l_2}\frac{a_2}{a_1}\equiv\frac{l_1}{l_2}\sqrt{\frac{E_2\rho_1}{E_1\rho_2}}=\frac{2r}{2s+1},$$

其中 r 和 s 为整数，且 $2r$ 与 $2s+1$ 互质．此时本征频率为"基频"

$$\omega_0=\frac{r\pi}{l_1}a_1=\frac{(2s+1)\pi}{2l_2}a_2$$

的奇数倍，即

$$\omega_n=(2n+1)\frac{r\pi}{l_1}a_1=(2n+1)\frac{(2s+1)\pi}{2l_2}a_2,\qquad n=0,1,2,\cdots.\tag{2.7a}$$

因为方程 (2.5a) 一定成立，由 (2.5b) 可得

$$\frac{AE_1}{a_1}\cos(2n+1)r\pi=\frac{BE_2}{a_2}\sin(2n+1)(2s+1)\frac{\pi}{2},\quad \text{即}\quad (-1)^r\frac{AE_1}{a_1}=(-1)^{n+s}\frac{BE_2}{a_2}.$$

取

$$A=(-1)^r\frac{a_1}{E_1},\qquad B=(-1)^{n+s}\frac{a_2}{E_2},$$

即得本征函数

$$X_n=\begin{cases}(-1)^r\dfrac{a_1}{E_1}\sin\dfrac{(2n+1)r}{l_1}\pi x, & 0<x<l_1,\\[2ex] (-1)^{n+s}\dfrac{a_2}{E_2}\cos\dfrac{(2n+1)(2s+1)}{2l_2}\pi(l_1+l_2-x), & l_1<x<l_1+l_2,\end{cases}\tag{2.7b}$$

还可以进一步化成

$$X_n=\begin{cases}(-1)^r\dfrac{a_1}{E_1}\sin\dfrac{(2n+1)r}{l_1}\pi x, & 0<x<l_1,\\[2ex] -\dfrac{a_2}{E_2}\sin\dfrac{(2n+1)(2s+1)}{2l_2}\pi(l_1-x), & l_1<x<l_1+l_2.\end{cases}\tag{2.7c}$$

(3) 若 $\cos\dfrac{\omega}{a_1}l_1=0,\ \sin\dfrac{\omega}{a_2}l_2=0$，因此 $\omega l_1/a_1$ 一定是 $\pi/2$ 的奇数倍 (即第一段杆的杆长 l_1 正好是 1/4 波长的奇数倍)，$\omega l_2/a_2$ 一定是 π 的整数倍 (即第二段杆的杆长 l_2 正好是半波长的整数倍)，即一定有

$$\frac{l_1}{l_2}\frac{a_2}{a_1}\equiv\frac{l_1}{l_2}\sqrt{\frac{E_2\rho_1}{E_1\rho_2}}=\frac{2r+1}{2s},$$

其中 r 和 s 为整数，且 $2r+1$ 与 $2s$ 互质. 此时本征频率为“基频”

$$\omega_0 = \frac{(2r+1)\pi}{2l_1}a_1 = \frac{s\pi}{l_2}a_2$$

的奇数倍，即

$$\omega_n = (2n+1)\frac{(2r+1)\pi}{2l_1}a_1 = (2n+1)\frac{s\pi}{l_2}a_2, \qquad n=0,1,2,\cdots. \tag{2.8a}$$

由 (2.5a) 式可得

$$A\sin(2n+1)(2r+1)\frac{\pi}{2} = B\cos(2n+1)s\pi, \quad 即 \quad (-1)^{n+r}A = (-1)^s B.$$

取

$$A = (-1)^{n+r}, \qquad B = (-1)^s,$$

即得本征函数

$$X_n = \begin{cases} (-1)^{n+r}\sin\dfrac{(2n+1)(2r+1)}{2l_1}\pi x, & 0<x<l_1, \\ (-1)^s\cos\dfrac{(2n+1)s}{l_2}\pi(l_1+l_2-x), & l_1<x<l_1+l_2, \end{cases} \tag{2.8b}$$

也可以进一步化成

$$X_n = \begin{cases} (-1)^{n+r}\sin\dfrac{(2n+1)(2r+1)}{2l_1}\pi x, & 0<x<l_1, \\ \cos\dfrac{(2n+1)s}{l_2}\pi(l_1-x), & l_1<x<l_1+l_2. \end{cases} \tag{2.8c}$$

讨论一下本征函数的正交性. 从上面求得的本征函数的具体形式，或是直接从微分方程、边界条件以及连接条件出发，可以证明，本征函数的正交关系应该是

$$\int_0^{l_1+l_2} X_m(x)X_n(x)\rho(x)\mathrm{d}x = 0, \qquad m \neq n, \tag{2.9a}$$

其中权函数 $\rho(x)$ 是

$$\rho(x) = \begin{cases} \rho_1, & 0<x<l_1, \\ \rho_2, & l_1<x<l_1+l_2. \end{cases} \tag{2.9b}$$

换句话说，本题中的常微分方程 (2.4a) 和 (2.4b) 应该理解为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[E(x)\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x}\right] + \omega^2\rho(x)X(x) = 0, \tag{2.10a}$$

其中

$$E(x)=\begin{cases}E_1, & 0<x<l_1,\\ E_2, & l_1<x<l_1+l_2.\end{cases} \tag{2.10b}$$

也可以算出本征函数的模方. 在第 (1) 种情形下,

$$\int_0^{l_1+l_2} X_n^2(x)\,\rho(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left[\frac{\rho_1 l_1}{\sin^2(\omega_n l_1/a_1)}+\frac{\rho_2 l_2}{\cos^2(\omega_n l_2/a_2)}\right], \tag{2.11a}$$

在第 (2) 种情形下,

$$\int_0^{l_1+l_2} X_n^2(x)\,\rho(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{l_1}{kE_1}\right)^2\rho_1 l_1+\left(\frac{2}{2l-1}\frac{l_2}{E_2}\right)^2\rho_2 l_2\right], \tag{2.11b}$$

在第 (3) 种情形下,

$$\int_0^{l_1+l_2} X_n^2(x)\,\rho(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\big(\rho_1 l_1+\rho_2 l_2\big). \tag{2.11c}$$

在许多教材或习题集中, 还可以找到类似的例题. 但一般都只给出了第 (1) 种情形下的解. 当然, 可以把第 (2) 种情形看成第 (1) 种情形在 $\sin\dfrac{\omega l_1}{a_1}\to 0$, $\cos\dfrac{\omega l_2}{a_2}\to 0$ 下的极限, 也可以把第 (3) 种情形看成第 (1) 种情形在 $\cos\dfrac{\omega l_1}{a_1}\to 0$, $\sin\dfrac{\omega l_2}{a_2}\to 0$ 下的极限.

§2.2 集中载荷问题

上一节讨论了两种不同介质组成的体系. 我们看到, 这时无论作为完整的定解问题, 或是求固有频率 (本征值) 的问题, 其数学描述中都必然出现在界面处的连接条件. 还存在另一类问题: 在均匀介质内部的某些点上受到集中外力或热源的作用, 在这些点上, 也必须加上连接条件.

例 2.2 设有一长为 l 的均匀弦, 两端固定, 而在弦上 $x=c$ 点处受一横向周期力 $f(t)=A\sin\omega t$ 的作用. 试讨论此弦在给定初位移和初速度下的横振动.

解 设弦的横振动位移为 $u(x,t)$, 它应该满足下列定解问题:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, \qquad 0<x<l \text{ 且 } x\neq c,\ t>0, \tag{2.12a}$$

$$u\big|_{x=0}=0, \qquad u\big|_{x=l}=0, \qquad t\geqslant 0, \tag{2.12b}$$

$$u\big|_{x=c-}=u\big|_{x=c+}, \qquad t\geqslant 0, \tag{2.12c}$$

$$T\left(\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=c+}-\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=c-}\right)=A\sin\omega t, \qquad t\geqslant 0, \tag{2.12d}$$

$$u\Big|_{t=0}=\phi(x),\quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi(x),\qquad 0\leqslant x\leqslant l. \tag{2.12e}$$

这个定解问题的特殊之处在于连接条件是非齐次的，因此，在应用分离变量法求解时，必须先将连接条件齐次化．而且，在将连接条件齐次化的同时，还必须使边界条件仍保持齐次．在本题中，我们甚至还可以提出更高的要求，还要求方程也保持齐次．为此设

$$u(x,t)=v(x,t)+w(x,t), \tag{2.13}$$

其中的齐次化函数 $v(x,t)$ 满足

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0,\qquad 0<x<l \text{ 且 } x\neq c,\ t>0, \tag{2.14a}$$

$$v\Big|_{x=0}=0,\quad v\Big|_{x=l}=0,\qquad t\geqslant> 0, \tag{2.14b}$$

$$v\Big|_{x=c-}=v\Big|_{x=c+},\qquad t\geqslant 0, \tag{2.14c}$$

$$T\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Big|_{x=c+}-\frac{\partial v}{\partial x}\Big|_{x=c-}\right)=A\sin\omega t,\qquad t\geqslant 0. \tag{2.14d}$$

这不是一个适定的定解问题，我们并没有、事实上也不必限定 $v(x,t)$ 满足的初始条件．这样带来的好处是，给我们留有充分的余地去选择一个形式比较简单的 $v(x,t)$．考虑到连接条件 (2.14c) 和 (2.14d) 中非齐次项的具体形式，自然可以取齐次化函数为

$$v(x,t)=g(x)\sin\omega t. \tag{2.15}$$

相应地，$g(x)$ 则应当是常微分方程定解问题

$$\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}x^2}+\left(\frac{\omega}{a}\right)^2 g=0,\qquad 0<x<l \text{ 且 } x\neq c,\ t\geqslant 0, \tag{2.16a}$$

$$g(0)=0,\quad g(l)=0,\qquad t\geqslant 0, \tag{2.16b}$$

$$g(c-)=g(c+),\qquad t\geqslant 0, \tag{2.16c}$$

$$T\left(\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=c+}-\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=c-}\right)=A,\qquad t\geqslant 0 \tag{2.16d}$$

的解．由方程 (2.16a) 及边界条件 (2.16b)，可以写出

$$g(x)=\begin{cases}\alpha\sin\dfrac{\omega}{a}x, & 0<x<c,\\[2mm] \beta\sin\dfrac{\omega}{a}(l-x), & c<x<l,\end{cases}$$

代入连接条件 (2.16c) 和 (2.16d)，有

$$\alpha\sin\frac{\omega}{a}c=\beta\sin\frac{\omega}{a}(l-c),$$

$$-\frac{T\omega}{a}\left[\beta\cos\frac{\omega}{a}(l-c)+\alpha\cos\frac{\omega}{a}c\right]=A.$$

解之即得

$$\alpha=-\frac{Aa}{T\omega}\frac{\sin\dfrac{\omega}{a}(l-c)}{\sin\dfrac{\omega}{a}l},\qquad \beta=-\frac{Aa}{T\omega}\frac{\sin\dfrac{\omega}{a}c}{\sin\dfrac{\omega}{a}l},$$

即

$$g(x)=\begin{cases}-\dfrac{Aa}{T\omega}\dfrac{\sin\dfrac{\omega}{a}(l-c)}{\sin\dfrac{\omega}{a}l}\sin\dfrac{\omega}{a}x, & 0<x<c,\\[2ex] -\dfrac{Aa}{T\omega}\dfrac{\sin\dfrac{\omega}{a}c}{\sin\dfrac{\omega}{a}l}\sin\dfrac{\omega}{a}(l-x), & c<x<l.\end{cases}\tag{2.17}$$

剩下的问题便是求出 $w(x,t)$. 容易看出，它所满足的定解问题是

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0,\qquad 0<x<l \text{ 且 } x\neq c,\ t>0,\tag{2.18a}$$

$$w\big|_{x=0}=0,\qquad w\big|_{x=l}=0,\qquad t\geqslant 0,\tag{2.18b}$$

$$w\big|_{t=0}=\phi(x),\qquad \frac{\partial w}{\partial t}\bigg|_{t=0}=\psi(x)-\omega g(x),\qquad 0\leqslant x\leqslant l.\tag{2.18c}$$

这是一个典型的两端固定弦的自由振动问题. 直接应用分离变量法就可以求得①

$$w(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\sin\frac{n\pi}{l}at+D_n\cos\frac{n\pi}{l}at\right)\sin\frac{n\pi}{l}x,\tag{2.19a}$$

$$\begin{aligned}C_n&=-\frac{2}{n\pi a}\int_0^l[\psi(x)-\omega g(x)]\sin\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x\\ &=\frac{2Aa}{n\pi T}\frac{\omega}{\omega^2-(n\pi a/l)^2}\sin\frac{n\pi}{l}c+\frac{2}{n\pi a}\int_0^l\psi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x,\end{aligned}\tag{2.19b}$$

$$D_n=\frac{2}{l}\int_0^l\psi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x.\tag{2.19c}$$

将这里得到的 $w(x,t)$ 和前面的 $v(x,t)$ 相加，就得到了整个定解问题 (2.12) 的解 $u(x,t)$.

以上未曾考虑 $\sin\dfrac{\omega}{a}l=0$ 即 $\omega=\omega_k=\dfrac{k\pi a}{l}$ 的情形. 在此情形下，(2.15) 式所设 $v(x,t)$ 的形式不正确，从而导致 (2.17) 式中的 $g(x)$ 失去意义. 同时，在 (2.19a) 式中 $n=k$ 的项也失去意义. 这时原则上需要重新求解 $v(x,t)$，但比较简单的做法

① 例如，参阅：吴崇试. 数学物理方法. 第 2 版. 北京：北京大学出版社，2004：§15.1.

是，将 $w(x,t)$ 改写成

$$w(x,t)=C_k\sin\frac{k\pi}{l}x\,\sin\frac{k\pi}{l}at+\sum_{n=1}^{\infty}{}'\,C_n\sin\frac{n\pi}{l}x\,\sin\frac{n\pi}{l}at+\sum_{n=1}^{\infty}D_n\sin\frac{n\pi}{l}x\,\cos\frac{n\pi}{l}at,\tag{2.19a$'$}$$

其中 $\sum'$ 表示和式中不含 $n=k$ 项，而后将第一项与 $v(x,t)$ 合并起来，求出在 $\omega\to\omega_k$ 下的极限即可：

$$\begin{aligned}&\lim_{\omega\to\omega_k}\Big(v(x,t)+C_k\sin\frac{k\pi}{l}x\,\sin\frac{k\pi}{l}at\Big)\\&=\frac{Aa^2}{\omega_k Tl}\Big(-\frac{3}{2}\frac{1}{\omega_k}\sin\frac{\omega_k}{a}c\,\sin\frac{\omega_k}{a}x\,\sin\omega_k t+\frac{c}{a}\cos\frac{\omega_k}{a}c\,\sin\frac{\omega_k}{a}x\,\sin\omega_k t\\&\quad+\frac{x}{a}\sin\frac{\omega_k}{a}c\,\cos\frac{\omega_k}{a}x\,\sin\omega_k t+t\,\sin\frac{\omega_k}{a}c\,\sin\frac{\omega_k}{a}x\,\cos\omega_k t\Big)\\&\quad-\begin{cases}\dfrac{Aa}{\omega_k T}\cos\dfrac{\omega_k}{a}c\,\sin\dfrac{\omega_k}{a}x\,\sin\omega_k t, & 0<x<c,\\[2mm]\dfrac{Aa}{\omega_k T}\sin\dfrac{\omega_k}{a}c\,\cos\dfrac{\omega_k}{a}x\,\sin\omega_k t, & c<x<l.\end{cases}\end{aligned}\tag{2.20}$$

如果 $x=c$ 处所受的外力是由重物 M 提供的，且该重物与弦同步地运动，则定解问题为

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=0,\qquad 0<x<l\ 且\ x\neq c,\ t>0,\tag{2.21a}$$

$$u\big|_{x=0}=0,\qquad u\big|_{x=l}=0,\qquad t\geqslant 0,\tag{2.21b}$$

$$u\big|_{x=c-}=u\big|_{x=c+},\qquad t\geqslant 0,\tag{2.21c}$$

$$F\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=c+}-\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=c-}\Big)=Mg+M\,\frac{\partial^2u}{\partial t^2}\Big|_{x=c},\qquad t\geqslant 0,\tag{2.21d}$$

$$u\big|_{t=0}=\phi(x),\qquad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi(x),\qquad 0v\leqslant x\leqslant l.\tag{2.21e}$$

这里把张力记为 F，是为了避免与后面分离变量时出现的函数 $T(t)$ 相混淆. 定解问题 (2.21) 的形式和定解问题 (2.12) 不同：在连接条件 (2.21d) 中出现了未知函数的导数. 这又将在求解方法和求解步骤上导致新的变化.

例 2.3　求解定解问题 (2.21).

解　仍然要先将连接条件齐次化. 由于连接条件中的非齐次项 (Mg) 为常数，与 t 无关，故可取齐次化函数仅为 x 的函数，即设

$$u(x,t)=v(x)+w(x,t),\tag{2.22}$$

其中 $v(x)$ 满足下列条件：

$$v(0)=0, \qquad v(l)=0, \tag{2.23a}$$

$$v(c-)=v(c+), \tag{2.23b}$$

$$F\left[v'(c+)-v'(c-)\right]=Mg. \tag{2.23c}$$

最简单的做法是取 $v(x)$ 为一阶导数分段连续的一次函数，即

$$v(x)=\begin{cases}-\dfrac{Mg}{F}\dfrac{l-c}{l}x, & 0<x<c,\\ -\dfrac{Mg}{F}\dfrac{c}{l}(l-x), & c<x<l,\end{cases} \tag{2.24}$$

则 $v(x)$ 本身也是偏微分方程 (2.21a) 的解，从而保证 $w(x,t)$ 仍然满足齐次的偏微分方程. $w(x,t)$ 所满足的定解问题是

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0, \qquad 0<x<l \text{ 且 } x\neq c,\ t>0, \tag{2.25a}$$

$$w\big|_{x=0}=0, \qquad w\big|_{x=l}=0, \qquad t\geqslant 0, \tag{2.25b}$$

$$w\big|_{x=c-}=w\big|_{x=c+}, \qquad t\geqslant 0, \tag{2.25c}$$

$$F\left(\frac{\partial w}{\partial x}\bigg|_{x=c+}-\frac{\partial w}{\partial x}\bigg|_{x=c-}\right)=M\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\bigg|_{x=c}, \qquad t\geqslant 0, \tag{2.25d}$$

$$w\big|_{t=0}=\phi(x)-v(x), \quad \frac{\partial w}{\partial t}\bigg|_{t=0}=\psi(x), \qquad 0\leqslant x\leqslant l. \tag{2.25e}$$

和例 2.2 不同的是，在 $w(x,t)$ 的定解问题中，仍然含有连接条件. 齐次化函数的引入，只不过是将非齐次的连接条件转化为齐次的连接条件.

下面求解定解问题 (2.25). 为此，设

$$w(x,t)=X(x)T(t),$$

代入方程 (2.25a)、齐次边界条件 (2.25b) 以及齐次的连接条件 (2.25c) 和 (2.25d)，分离变量，即得

$$T''(t)+\lambda a^2 T(t)=0 \tag{2.26}$$

和

$$X''(x)+\lambda X(x)=0, \tag{2.27a}$$

$$X(0)=0, \qquad X(l)=0, \tag{2.27b}$$

$$X(c-)=X(c+), \tag{2.27c}$$

$$F\left[X'(c+) - X(c-)\right] = -\lambda M a^2 X(c). \tag{2.27d}$$

在得到连接条件 (2.27d) 时，要用到方程 (2.26)．而且，根据 (2.27c) 式，$X(x)$ 在 $x=c$ 点是连续的，所以在 (2.27d) 式右端便只需简单地写为 $x(c)$．

由方程 (2.27a) 和边界条件 (2.27b)，可以写出

$$X(x) = \begin{cases} A\sin\sqrt{\lambda}x, & 0 < x < c, \\ B\sin\sqrt{\lambda}(l-x), & c < x < l. \end{cases}$$

代入连接条件 (2.27c) 和 (2.27d)，又进一步得到

$$A\sin\sqrt{\lambda}c = B\sin\sqrt{\lambda}(l-c), \tag{2.28a}$$

$$A\cos\sqrt{\lambda}c + B\cos\sqrt{\lambda}(l-c) = \frac{Ma^2}{F}A\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}c. \tag{2.28b}$$

在一般情形下，有

$$\sin\sqrt{\lambda}c \neq 0, \qquad \sin\sqrt{\lambda}(l-c) \neq 0.$$

从后面对 (2.43) 式的分析可以看出，这相当于 l 和 c 不可公度，即 l/c 不为有理数．于是，由 (2.28a) 式，不妨令

$$A\sin\sqrt{\lambda}(l-c), \qquad B = \sin\sqrt{\lambda}c,$$

再根据 (2.28b) 式，就能够得到

$$\sin\sqrt{\lambda}l = \frac{Ma^2}{F}\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}c\sin\sqrt{\lambda}(l-c),$$

即

$$\frac{Ma^2}{F}\sqrt{\lambda} = \cot\sqrt{\lambda}c + \cot\sqrt{\lambda}(l-c). \tag{2.29a}$$

由此就可以解出 λ．可以证明，这样的 λ 有无穷多个，并且全是正数，可以把它们从小到大排列起来：

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots. \tag{2.29b}$$

对应于本征值 λ_n，本征函数就是

$$X_n(x) = \begin{cases} \sin\sqrt{\lambda_n}(l-c)\sin\sqrt{\lambda_n}x, & 0 < x < c, \\ \sin\sqrt{\lambda_n}c\sin\sqrt{\lambda_n}(l-x), & c < x < l. \end{cases} \tag{2.29c}$$

由方程 (2.26)，又可以求出相应的 $T_n(t)$：

$$T_n(t) = C_n\sin\sqrt{\lambda_n}at + D_n\cos\sqrt{\lambda_n}at, \tag{2.30}$$

从而求出满足方程 (2.25a)、边界条件 (2.25b) 以及连接条件 (2.25c) 和 (2.25d) 的一般解，即

$$w(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}X_n(x)T_n(t). \tag{2.31}$$

再代入初始条件 (2.25e)，得

$$\sum_{n=1}^{\infty}D_nX_n(x)=\phi(x)-v(x), \tag{2.32a}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sqrt{\lambda_n}a\,X_n(x)=\psi(x). \tag{2.32b}$$

根据本征函数的正交性，即可求出叠加系数 C_n 和 D_n.

下面介绍定叠加系数的两种做法.

方法一　在常见的偏微分方程定解问题中，我们总是利用本征函数的正交性定系数. 但现在的问题是，本征值问题 (2.27) 并不属于 Sturm-Liouville 型方程的本征值问题，构成此本征值问题的不只有常微分方程 (2.27a) 及边界条件 (2.27b)，还有连接条件 (2.27c) 和 (2.27d)，并且连接条件 (2.27d) 中也出现了本征值 λ. 作为这样的本征值问题的解，本征函数是否还具有正交性，这至少是尚未经过证明的. 事实上，常见的说法就是，本题中的本征函数不具有正交性. 设 $X_m(x)$ 和 $X_n(x)$ 是分别对应于本征值 λ_m 和 λ_n 的本征函数，直接积分就得到

$$\begin{aligned}\int_0^l X_n(x)X_m(x)\mathrm{d}x &= \sin\sqrt{\lambda_n}(l-c)\,\sin\sqrt{\lambda_m}(l-c)\int_0^c \sin\sqrt{\lambda_n}x\,\sin\sqrt{\lambda_m}x\,\mathrm{d}x\\ &\quad+\sin\sqrt{\lambda_n}c\,\sin\sqrt{\lambda_m}c\int_0^c \sin\sqrt{\lambda_n}(l-x)\,\sin\sqrt{\lambda_m}(l-x)\,\mathrm{d}x\\ &=-\frac{Ma^2}{F}\sin\sqrt{\lambda_n}(l-c)\,\sin\sqrt{\lambda_m}(l-c)\sin\sqrt{\lambda_n}c\,\sin\sqrt{\lambda_m}c.\end{aligned} \tag{2.33}$$

解决这一困难的途径之一是将连接条件 (2.21c) 并入方程 (2.21a)，即

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{Ma^2}{F}\left(g+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)\delta(x-c),\quad 0<x<l\ 且\ x\neq c,\ t>0, \tag{2.21a$'$}$$

它和边界条件 (2.21b) 结合起来，就构成了和原有定解问题完全等价的另一种表述形式. 重复上面的计算，就会得到本征值问题

$$X''(x)+\lambda\left[1+\frac{Ma^2}{F}\delta(x-c)\right]X(x)=0, \tag{2.27a$'$}$$

$$X(0)=0,\qquad X(l)=0. \tag{2.27b$'$}$$

此本征值问题与 (2.27) 式所述完全等价，求得的本征值和本征函数完全相同. 但从现在的表述形式就可以看出，对应不同本征值的本征函数还是正交的，只是权函数 $\rho(x)$ 为 $1+(Ma^2/F)\delta(x-c)$ 而非 1：

$$\int_0^l X_n(x)X_m(x)\left[1+\frac{Ma^2}{F}\delta(x-c)\right]\mathrm{d}x=0,\qquad n\neq m. \tag{2.33$'$}$$

其实，这才是对 (2.33) 式的正确解读. 类似地可以算出本征函数的模方

$$\begin{aligned}N_n^2 &\equiv \int_0^l X_n^2(x)\left[1+\frac{Ma^2}{F}\delta(x-c)\right]\mathrm{d}x\\&=\sin^2\sqrt{\lambda_n}(l-c)\int_0^c\sin^2\sqrt{\lambda_n}x\,\mathrm{d}x+\sin^2\sqrt{\lambda_n}c\int_c^l\sin^2\sqrt{\lambda_n}(l-x)\,\mathrm{d}x\\&\quad+\frac{Ma^2}{F}\sin^2\sqrt{\lambda_n}c\,\sin^2\sqrt{\lambda_n}(l-c)\\&=\frac{c}{2}\sin^2\sqrt{\lambda_n}(l-c)+\frac{l-c}{2}\sin^2\sqrt{\lambda_n}c+\frac{Ma^2}{2F}\sin^2\sqrt{\lambda_n}c\,\sin^2\sqrt{\lambda_n}(l-c).\end{aligned}\tag{2.34}$$

因此，由 (2.32) 式即可定出

$$\begin{aligned}C_n&=\frac{1}{N_n^2}\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}a}\int_0^l\psi(x)X_n(x)\left[1+\frac{Ma^2}{F}\delta(x-c)\right]\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{N_n^2}\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}a}\left[\frac{Ma^2}{F}\psi(c)\sin\sqrt{\lambda_n}c\,\sin\sqrt{\lambda_n}(l-c)+\int_0^l\psi(x)X_n(x)\mathrm{d}x\right],\end{aligned}\tag{2.35a}$$

$$\begin{aligned}D_n&=\frac{1}{N_n^2}\int_0^l[\phi(x)-v(x)]\,X_n(x)\left[1+\frac{Ma^2}{F}\delta(x-c)\right]\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{N_n^2}\left\{\frac{Ma^2}{F}[\phi(c)-v(c)]\,X_n(c)+\int_0^l[\phi(x)-v(x)]\,X_n(x)\mathrm{d}x\right\}\\&=\frac{1}{N_n^2}\left\{\left[\frac{Ma^2}{F}\phi(c)+\frac{Mg}{F}\frac{1}{\lambda_n}\right]\sin\sqrt{\lambda_n}c\,\sin\sqrt{\lambda_n}(l-c)+\int_0^l\phi(x)X_n(x)\mathrm{d}x\right\}.\end{aligned}\tag{2.35b}$$

方法二 定叠加系数 C_n 和 D_n 的另一种方法是寻找有关本征函数的别的正交关系. 为此将本征值问题 (2.27) 中的方程 (2.27a) 再微商一次，即

$$\frac{\mathrm{d}^2X'(x)}{\mathrm{d}x^2}+\lambda X'(x)=0,\tag{2.36a}$$

也利用方程 (2.27a) 将边界条件 (2.27b) 改写成

$$\left.\frac{\mathrm{d}X'(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=0,\qquad\left.\frac{\mathrm{d}X'(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=l}=0,\tag{2.36b}$$

类似地将连接条件 (2.27c) 和 (2.27d) 改写成

$$F[X'(c+)-X'(c-)]=Ma^2\frac{\mathrm{d}X'(x)}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=c}, \tag{2.36c}$$

$$\frac{\mathrm{d}X'(x)}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=c-}=\frac{\mathrm{d}X'(x)}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=c+} \tag{2.36d}$$

这样就能证得本征函数的导数 $X'(x)$ 具有正交性：

$$\int_0^l X_n'(x)\,X_m'(x)\,\mathrm{d}x=0, \qquad n\neq m. \tag{2.37}$$

因此，将 (2.32) 式也微商一次：

$$\sum_{n=1}^{\infty}D_nX_n'(x)=\phi'(x)-v'(x), \tag{2.32a$'$}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sqrt{\lambda_n}a\,X_n'(x)=\psi'(x), \tag{2.32b$'$}$$

于是就能得到

$$C_n=\frac{1}{{N_n'}^2}\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}a}\int_0^l\psi'(x)X'(x)\mathrm{d}x, \tag{2.38a}$$

$$\begin{aligned}D_n&=\frac{1}{{N_n'}^2}\int_0^l[\phi'(x)-v'(x)]\,X_n'(x)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{{N_n'}^2}\left[\frac{Mg}{F}\sin\sqrt{\lambda_n}c\,\sin\sqrt{\lambda_n}(l-c)+\int_0^l\phi'(x)X_n'(x)\mathrm{d}x\right],\end{aligned} \tag{2.38b}$$

其中

$$\begin{aligned}{N_n'}^2&=\int_0^l[X_n'(x)]^2\,\mathrm{d}x=\int_0^c[X_n'(x)]^2\,\mathrm{d}x+\int_c^l[X_n'(x)]^2\,\mathrm{d}x\\&=\lambda_n\left[\frac{c}{2}\sin^2\sqrt{\lambda_n}(l-c)+\frac{l-c}{2}\sin^2\sqrt{\lambda_n}c+\frac{Ma^2}{2F}\sin^2\sqrt{\lambda_n}c\,\sin^2\sqrt{\lambda_n}(l-c)\right]\end{aligned} \tag{2.38c}$$

$$=\lambda_nN_n^2. \tag{2.38d}$$

☞ **讨论** 这两种方法定出的系数 C_n 和 D_n 当然应当相同. 事实上，将 (2.38) 式中的积分分部积分，就能得到

$$\int_0^l\psi'(x)X_n'(x)\mathrm{d}x=\int_0^c\psi'(x)X_n'(x)\mathrm{d}x+\int_c^l\psi'(x)X_n'(x)\mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
&= \psi(x)X_n'(x)\Big|_0^c + \psi(x)X_n'(x)\Big|_c^l - \int_0^l \psi(x)X_n''(x)\mathrm{d}x \\
&= \psi(c-)X_n'(c-) - \psi(0)X_n'(0) + \psi(l)X_n'(l) - \psi(c+)X_n'(c+) \\
&\quad + \lambda_n \int_0^l \psi(x)X_n(x)\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

如果

$$
\psi(c-) = \psi(c+), \qquad \psi(0) = 0, \qquad \psi(l) = 0, \tag{2.39}
$$

则

$$
\begin{aligned}
\int_0^l \psi'(x)X_n'(x)\mathrm{d}x &= \psi(c)\left[X_n'(c-) - X_n'(c+)\right] + \lambda_n \int_0^l \psi(x)X_n(x)\mathrm{d}x \\
&= \lambda_n \left[\frac{Ma^2}{F}\psi(c)X_n(c) + \int_0^l \psi(x)X_n(x)\mathrm{d}x\right].
\end{aligned} \tag{2.40}
$$

这样就证明了 (2.38a) 式与 (2.35a) 式完全一致.

同样，可以证明

$$
\begin{aligned}
\int_0^l \phi'(x)X_n'(x)\mathrm{d}x &= \phi(c-)\,X_n'(c-) - \phi(0)\,X_n'(0) + \phi(l)\,X_n'(l) \\
&\quad - \phi(c+)\,X_n'(c+) + \lambda_n \int_0^l \phi(x)X_n(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

如果

$$
\phi(c-) = \phi(c+), \qquad \phi(0) = 0, \qquad \phi(l) = 0, \tag{2.41}
$$

则

$$
\int_0^l \phi'(x)X_n'(x)\mathrm{d}x = \lambda_n \left[\frac{Ma^2}{F}\phi(c)X_n(c) + \int_0^l \phi(x)X_n(x)\mathrm{d}x\right]. \tag{2.42}
$$

因此，(2.38b) 式也与 (2.35b) 式完全一致.

表面上看来，上面证明的一致性是有条件的，即要求 (2.39) 和 (2.41) 两式成立. 但事实上，从方法二本身来说，这两个条件是应当满足的，因为当我们将 (2.32) 式逐项微商而导出 (2.32′) 式时，就要求 (2.39) 和 (2.41) 两式成立. 而如果 (2.39) 和 (2.41) 两式不成立，在运用第二种方法定叠加系数时将会出现一定的数学困难.

从解题步骤来说，第一种方法要略显简单些. 从理论上说，两种解法有一个共同的不足：涉及的都不是 Sturm-Liouville 型方程的本征值问题，有关本征函数的完备性需要另行讨论.

☞ **进一步的讨论** 以上的结果只适用于 $\sin\sqrt{\lambda}c \neq 0, \sin\sqrt{\lambda}(l-c) \neq 0$ 的情形. 在特定的条件 (特殊的比值 $l:c$) 下, 可以有

$$\sin\sqrt{\lambda}c = 0, \qquad \sin\sqrt{\lambda}(l-c) = 0. \tag{2.43}$$

这说明, $\sqrt{\lambda}c$ 和 $\sqrt{\lambda}(l-c)$ 都是 π 的整数倍, 即 c 与 $l-c$ 之比为有理数. 设

$$\frac{l-c}{c} = \frac{r}{s}, \tag{2.44}$$

r 和 s 为互质的正整数, 则方程 (2.28a) 还有解

$$\lambda_n^{(2)} = \left(\frac{ns\pi}{c}\right)^2 = \left(\frac{nr\pi}{l-c}\right)^2, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots. \tag{2.45a}$$

再代入 (2.28b), 又可以定出

$$(-1)^{ns}A = (-1)^{nr}B.$$

不妨取 $A = 1$, $B = (-1)^{n(r-s)}$, 于是对应本征值 (2.45a) 的本征函数就是

$$X_n^{(2)}(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{ns\pi}{c}x, & 0 < x < c, \\ (-1)^{n(r-s)}\sin\dfrac{nr\pi}{l-c}(l-x), & c < x < l. \end{cases} \tag{2.45b}$$

代入方程 (2.26), 又得到

$$T_n^{(2)}(t) = E_n \sin\frac{ns\pi}{c}at + F_n\cos\frac{ns\pi}{c}at \tag{2.46a}$$

$$= E_n \sin\frac{nr\pi}{l-c}at + F_n\cos\frac{nr\pi}{l-c}at. \tag{2.46b}$$

把由方程 (2.29a) 定出的本征值及相应的本征函数 (2.29c) 也分别改写成 $\lambda_n^{(1)}$ 及 $X_n^{(1)}(x)$, 相应地, (2.30) 式中的 $T_n(t)$ 也改写成 $T_n^{(2)}(t)$, 这时本征函数组 $\left\{X_n^{(1)}(x), X_n^{(2)}(x)\right\}$ 才构成正交完备函数组, 因此满足方程 (2.25a)、边界条件 (2.25b) 以及连接条件 (2.25c) 和 (2.25d) 的一般解为

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n^{(1)}(x)T_n^{(1)}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} X_n^{(2)}(x)T_n^{(2)}(t). \tag{2.47}$$

再代入初始条件 (2.25e), 得

$$\sum_{n=1}^{\infty} D_n X_n^{(1)}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} F_n X_n^{(2)}(x) = \phi(x) - v(x), \tag{2.48a}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n\sqrt{\lambda_n}a\, X_n^{(1)}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{ns\pi a}{c} E_n X_n^{(2)}(x) = \psi(x). \tag{2.48b}$$

利用本征函数的正交性 (正交权函数仍为 $1+(Ma^2/F)\delta(x-c)$)

$$\int_0^l X_n^{(1)}(x)\, X_m^{(1)}(x) \left[1+\frac{Ma^2}{F}\delta(x-c)\right] \mathrm{d}x = 0, \qquad n \neq m, \tag{2.49a}$$

$$\int_0^l X_n^{(2)}(x)\, X_m^{(2)}(x) \left[1+\frac{Ma^2}{F}\delta(x-c)\right] \mathrm{d}x = 0, \qquad n \neq m, \tag{2.49b}$$

$$\int_0^l X_n^{(1)}(x)\, X_m^{(2)}(x) \left[1+\frac{Ma^2}{F}\delta(x-c)\right] \mathrm{d}x = 0 \tag{2.49c}$$

定出叠加系数: C_n 和 D_n 仍为 (2.35) 式不变, 而 E_n 和 F_n 为

$$\begin{aligned} E_n &= \frac{2}{l}\frac{c}{ns\pi a}\int_0^l \psi(x)X_n^{(2)}(x)\left[1+\frac{Ma^2}{F}\delta(x-c)\right]\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{n(r+s)\pi a}\int_0^l \psi(x)X_n^{(2)}(x)\mathrm{d}x, \end{aligned} \tag{2.50a}$$

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{2}{l}\int_0^l [\phi(x)-v(x)]\, X_n^{(2)}(x)\left[1+\frac{Ma^2}{F}\delta(x-c)\right]\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{l}\int_0^l [\phi(x)-v(x)]\, X_n^{(2)}(x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{l}\left[(-1)^{ns+1}\frac{2Mg}{F}\frac{c(l-c)}{n(r+s)\pi} + \int_0^l \phi(x)X_n^{(2)}(x)\mathrm{d}x\right]. \end{aligned} \tag{2.50b}$$

例 2.4 求解偏微分方程定解问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \qquad 0<x<l \text{ 且 } x\neq\frac{l}{2},\ t>0, \tag{2.51a}$$

$$u\Big|_{x=0} = 0, \qquad u\Big|_{x=l} = 0, \qquad t\geqslant 0, \tag{2.51b}$$

$$u\Big|_{x=l/2-} = u\Big|_{x=l/2+}, \qquad t\geqslant 0, \tag{2.51c}$$

$$F\left(\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l/2+} - \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l/2-}\right) = Mg + M\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\Big|_{x=c}, \qquad t\geqslant 0, \tag{2.51d}$$

$$u\Big|_{t=0} = \phi(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x), \qquad 0\leqslant x\leqslant l. \tag{2.51e}$$

解 这是例 2.3 的特殊情形，重物悬挂于弦的中点. 设

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x), \tag{2.52a}$$

其中

$$w(x)=\frac{Mg}{2F}\left(\left|x-\frac{l}{2}\right|-\frac{l}{2}\right)=\begin{cases}-\dfrac{Mg}{2F}x, & 0<x<\dfrac{l}{2},\\ -\dfrac{Mg}{2F}(l-x), & \dfrac{l}{2}<x<l,\end{cases}\tag{2.52b}$$

则 $v(x,t)$ 满足定解问题

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0,\qquad 0<x<l \text{ 且 } x\neq l/2,\ t>0,\tag{2.53a}$$

$$v\big|_{x=0}=0,\qquad v\big|_{x=l}=0,\qquad t\geqslant 0,\tag{2.53b}$$

$$v\big|_{x=l/2-}=v\big|_{x=l/2+},\qquad t\geqslant 0,\tag{2.53c}$$

$$F\left(\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=l/2+}-\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=l/2-}\right)=M\left.\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right|_{x=c},\qquad t\geqslant 0,\tag{2.53d}$$

$$v\big|_{t=0}=\phi(x)-w(x),\qquad \left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x),\qquad 0\leqslant x\leqslant l.\tag{2.53e}$$

令 $v(x,t)=X(x)T(t)$，分离变量，得

$$X''(x)+\lambda X(x)=0,\tag{2.54a}$$

$$X(0)=0,\qquad X(l)=0,\tag{2.54b}$$

$$X(l/2-)=X(l/2+),\tag{2.54c}$$

$$F\left[X'(l/2+)-X(l/2-)\right]=-\lambda Ma^2X(l/2),\tag{2.54d}$$

$$T''(t)+\lambda a^2T(t)=0.\tag{2.55}$$

先解本征值问题 (2.54). 满足常微分方程 (2.54a) 和边界条件 (2.54b) 的解为

$$X(x)=\begin{cases}A\sin\sqrt{\lambda}x, & 0<x<l/2,\\ B\sin\sqrt{\lambda}(l-x), & l/2<x<l,\end{cases}$$

代入连接条件 (2.54c)，得

$$A\sin\frac{\sqrt{\lambda}l}{2}=B\sin\frac{\sqrt{\lambda}l}{2},$$

故有解

$$A=B\qquad\text{或}\qquad\sin\frac{\sqrt{\lambda}l}{2}=0.$$

当 $A=B$ 时，由 (2.54d) 式可得

$$2F\cos\frac{\sqrt{\lambda}l}{2}=\sqrt{\lambda}Ma^2\sin\frac{\sqrt{\lambda}l}{2}.$$

所以本征值 $\lambda_n^{(1)}$ 是超越方程

$$\frac{Ma^2}{2F}\sqrt{\lambda}\tan\frac{\sqrt{\lambda}l}{2}=1 \tag{2.56a}$$

的第 n 个正根，其中 $n=1,2,3,\cdots$，相应的本征函数为

$$X_n^{(1)}(x)=\begin{cases}\sin\sqrt{\lambda_n^{(1)}}x, & 0<x<l/2,\\ \sin\sqrt{\lambda_n^{(1)}}(l-x), & l/2<x<l.\end{cases} \tag{2.56b}$$

如果 $\sin\sqrt{\lambda}l/2=0$，则本征值为

$$\lambda_n^{(2)}=\left(\frac{2n\pi}{l}\right)^2,\qquad n=1.2,3,\cdots. \tag{2.56c}$$

由 (2.54d) 式亦可求出相应的本征函数

$$X_n^{(2)}(x)=\sin\frac{2n\pi}{l}x. \tag{2.56d}$$

将 λ_n 代入方程 (2.55)，求出 $T_n(t)$，就能叠加出一般解

$$\begin{aligned}v(x,t)=&\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\sin\sqrt{\lambda_n^{(1)}}at+B_n\cos\sqrt{\lambda_n^{(1)}}at\right)X_n^{(1)}(x)\\&+\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\sin\frac{2n\pi}{l}at+D_n\cos\frac{2n\pi}{l}at\right)\sin\frac{2n\pi}{l}x.\end{aligned} \tag{2.57}$$

再代入初始条件 (2.53e) 及 (2.53f)，得

$$\sum_{n=1}^{\infty}B_nX_n^{(1)}(x)+\sum_{n=1}^{\infty}D_n\sin\frac{2n\pi}{l}x=\phi(x)-w(x), \tag{2.58a}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sqrt{\lambda_n^{(1)}}aX_n^{(1)}(x)+\sum_{n=1}^{\infty}C_n\frac{2n\pi a}{l}\sin\frac{2n\pi}{l}x=\psi(x). \tag{2.58b}$$

根据本征函数的正交性

$$\int_0^l X_n^{(1)}(x)X_m^{(1)}(x)\left[1+\frac{Ma^2}{F}\delta\left(x-\frac{l}{2}\right)\right]\mathrm{d}x=\left(\frac{l}{2}+\frac{2FMa^2}{4F^2+M^2a^4\lambda_n^{(1)}}\right)\delta_{nm}, \tag{2.59a}$$

$$\int_0^l X_n^{(2)}(x)X_m^{(2)}(x)\left[1+\frac{Ma^2}{F}\delta\left(x-\frac{l}{2}\right)\right]\mathrm{d}x=\frac{l}{2}\delta_{nm}, \tag{2.59b}$$

$$\int_0^l X_n^{(1)}(x)X_m^{(2)}(x)\left[1+\frac{Ma^2}{F}\delta\left(x-\frac{l}{2}\right)\right]\mathrm{d}x=0, \tag{2.59c}$$

就可以定出叠加系数

$$\begin{aligned}
A_n &=\frac{1}{N_n^2}\frac{1}{\sqrt{\lambda_n^{(1)}}a}\int_0^l \psi(x)\,X_n^{(1)}(x)\left[1+\frac{Ma^2}{F}\delta\left(x-\frac{l}{2}\right)\right]\mathrm{d}x \\
&=\frac{1}{N_n^2}\frac{1}{\sqrt{\lambda_n^{(1)}}a}\left[\frac{Ma^2}{F}\psi(x)\,X_n^{(1)}(x)\bigg|_{x=l/2}+\int_0^l \psi(x)\,X_n^{(1)}(x)\mathrm{d}x\right], \\
B_n &=\frac{1}{N_n^2}\int_0^l [\phi(x)-w(x)]\,X_n^{(1)}(x)\left[1+\frac{Ma^2}{F}\delta\left(x-\frac{l}{2}\right)\right]\mathrm{d}x \\
&=\frac{1}{N_n^2}\left[\frac{Ma^2}{F}[\phi(x)-w(x)]\,X_n^{(1)}(x)\bigg|_{x=l/2}+\int_0^l [\phi(x)-w(x)]\,X_n^{(1)}(x)\mathrm{d}x\right], \\
C_n &=\frac{1}{n\pi a}\int_0^l \psi(x)\,\sin\frac{2n\pi}{l}x\left[1+\frac{Ma^2}{F}\delta\left(x-\frac{l}{2}\right)\right]\mathrm{d}x \\
&=\frac{1}{n\pi a}\int_0^l \psi(x)\,\sin\frac{2n\pi}{l}x\mathrm{d}x, \\
D_n &=\frac{2}{l}\int_0^l [\phi(x)-w(x)]\sin\frac{2n\pi}{l}x\left[1+\frac{Ma^2}{F}\delta\left(x-\frac{l}{2}\right)\right]\mathrm{d}x \\
&=\frac{2}{l}\int_0^l [\phi(x)-w(x)]\sin\frac{2n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

其中

$$N_n^2=\frac{l}{2}+\frac{2FMa^2}{4F^2+M^2a^4\lambda_n^{(1)}}. \tag{2.60}$$

利用本征函数的对称性

$$X_n^{(1)}(l-x)=X_n^{(1)}(x), \qquad X_n^{(2)}(l-x)=-X_n^{(2)}(x)$$

及 $w(x)$ 的对称性

$$w(l-x)=w(x),$$

立即有

$$\int_0^l \phi(x)X_n^{(1)}(x)\mathrm{d}x=\int_0^{l/2}[\phi(x)+\phi(l-x)]X_n^{(1)}(x)\mathrm{d}x,$$

$$\int_0^l \psi(x)X_n^{(1)}(x)\mathrm{d}x = \int_0^{l/2} [\psi(x)+\psi(l-x)]X_n^{(1)}(x)\mathrm{d}x,$$

$$\int_0^l w(x)X_n^{(1)}(x)\mathrm{d}x = \int_0^{l/2} [w(x)+w(l-x)]X_n^{(1)}(x)\mathrm{d}x,$$

$$\int_0^l \phi(x)X_n^{(2)}(x)\mathrm{d}x = \int_0^{l/2} [\phi(x)-\phi(l-x)]X_n^{(2)}(x)\mathrm{d}x,$$

$$\int_0^l \psi(x)X_n^{(2)}(x)\mathrm{d}x = \int_0^{l/2} [\psi(x)-\psi(l-x)]X_n^{(2)}(x)\mathrm{d}x,$$

$$\int_0^l w(x)X_n^{(2)}(x)\mathrm{d}x = 0,$$

因此

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{N_n^2}\frac{1}{\sqrt{\lambda_n^{(1)}}a}\left\{\frac{Ma^2}{F}\psi\left(\frac{l}{2}\right)\sin\frac{\sqrt{\lambda_n^{(1)}}l}{2}\right. \\ &\quad \left. + \int_0^{l/2}[\psi(x)+\psi(l-x)]\sin\sqrt{\lambda_n^{(1)}}x\,\mathrm{d}x\right\}, \end{aligned} \tag{2.61a}$$

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{1}{N_n^2}\left\{\frac{Ma^2}{F}\left[\phi\left(\frac{l}{2}\right)-\frac{Mgl}{4F}\right]\sin\frac{\sqrt{\lambda_n^{(1)}}l}{2} - \frac{Mg}{F}\frac{1}{\lambda_n}\sin\frac{\sqrt{\lambda_n^{(1)}}l}{2}\right. \\ &\quad \left. + \int_0^{l/2}[\phi(x)+\phi(l-x)]\sin\sqrt{\lambda_n^{(1)}}x\,\mathrm{d}x\right\}, \end{aligned} \tag{2.61b}$$

$$C_n = \frac{1}{n\pi a}\int_0^{l/2}[\psi(x)-\psi(l-x)]\sin\frac{2n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x, \tag{2.61c}$$

$$D_n = \frac{2}{l}\int_0^{l/2}[\phi(x)-\phi(l-x)]\sin\frac{2n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x. \tag{2.61d}$$

如果模仿例 2.3 中的方法二求叠加系数，这时可将 (2.58) 式对 x 求导，得

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n X_n^{(1)\prime}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} D_n X_n^{(2)\prime}(x) = \phi'(x) - w'(x), \tag{2.58a$'$}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n\sqrt{\lambda_n^{(1)}}X_n^{(1)\prime}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n\sqrt{\lambda_n^{(2)}}X_n^{(2)\prime}(x) = \psi'(x). \tag{2.58b$'$}$$

利用本征函数导数的正交性

$$\int_0^l X_n^{(1)\prime}(x)\,X_m^{(1)\prime}(x)\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{\lambda_n\lambda_m}\int_0^{l/2}\cos\frac{\sqrt{\lambda_n}}{l}x\,\cos\frac{\sqrt{\lambda_m}}{l}x\,\mathrm{d}x$$

$$= \lambda_n\left(\frac{l}{2} + \frac{2FMa^2}{4F^2 + M^2a^4\lambda_n^{(1)}}\right)\delta_{nm},$$

$$\int_0^l X_n^{(2)\prime}(x)\, X_m^{(2)\prime}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{8nm\pi^2}{l^2}\int_0^{l/2}\cos\frac{2n\pi}{l}x\,\cos\frac{2m\pi}{l}x\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2n^2\pi^2}{l}\delta_{nm},$$

$$\int_0^l X_n^{(1)\prime}(x)\, X_m^{(2)\prime}(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

即可定出叠加系数

$$A_n = \frac{1}{N_n'^{\,2}}\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\int_0^l \psi'(x)X_n^{(1)\prime}(x)\,\mathrm{d}x, \tag{2.62a}$$

$$B_n = \frac{1}{N_n'^{\,2}}\int_0^l \left[\phi'(x) - w'(x)\right] X_n^{(1)\prime}(x)\,\mathrm{d}x, \tag{2.62b}$$

$$C_n = \frac{l}{n\pi}\int_0^l \psi'(x)X_n^{(2)\prime}(x)\,\mathrm{d}x, \tag{2.62c}$$

$$D_n = \frac{l}{2n^2\pi^2}\int_0^l \left[\phi'(x) - w'(x)\right] X_n^{(2)\prime}(x)\,\mathrm{d}x, \tag{2.62d}$$

其中

$$N_n'^{\,2} = \lambda_n\left(\frac{l}{2} + \frac{2FMa^2}{4F^2 + M^2a^4\lambda_n^{(1)}}\right). \tag{2.62e}$$

§2.3　圆柱的扭转振动

本节讨论在端点加载有集中载荷的情形.

例 2.5　设有一个均匀圆柱，长为 l，上端 $x=0$ 固定不动，下端 $x=l$ 连接有一个足够大的圆盘. 试讨论在圆盘扭转所产生的扭矩作用下圆柱所发生的扭转振动.

解　在垂直于圆柱面的任意一个截面上，都会发生相对于平衡位置的角位移 $\theta(x,t)$. 取 $\theta(x,t)$ 为描写圆柱扭转振动的物理量，则定解问题是

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = 0, \qquad 0 < x < l,\ t > 0, \tag{2.63a}$$

$$\theta\big|_{x=0} = 0, \qquad -c^2\frac{\partial\theta}{\partial x}\bigg|_{x=l} = \frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}\bigg|_{x=l}, \qquad t > 0, \tag{2.63b}$$

$$\theta\big|_{t=0} = \phi(x), \qquad \frac{\partial\theta}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \psi(x), \qquad 0 < x < l, \tag{2.63c}$$

其中 a^2 和 c^2 为已知常数，由圆盘的密度半径和剪切模量以及圆盘的转动惯量决定. 关于这个方程和边界条件的推导，可见 N. S. Koshlyakov 等的 *Differential Equations*

of Mathematical Physics. Amsterdam: North-Holland Publishing Co., 1964: Chap. X. 此处从略.

下面仍用分离变量法求这个定解问题的解. 设

$$\theta(x,t)=X(x)T(t),$$

代入方程 (2.63a)，可得

$$X''(x)+\lambda X(x)=0, \tag{2.64a}$$

$$T''(t)+\lambda a^2T(t)=0, \tag{2.64b}$$

再代入边界条件 (2.63b)，有

$$\begin{aligned}&X(0)T(t)=0,\\&-c^2X'(l)T(t)=X(l)T''(t),\end{aligned}$$

即

$$X(0)=0, \tag{2.64c}$$

$$X'(l)-\lambda\left(\frac{a}{c}\right)^2X(l)=0. \tag{2.64d}$$

在得到 (2.64d) 式时要用到方程 (2.64b).

方程 (2.64a) 和边界条件 (2.64c)，(2.64d) 也构成一个本征值问题. 但是，它也不同于以前我们见到过的本征值问题，不属于 Sturm-Liouville 型方程的本征值问题. 现在，待定参数 λ 不只出现在方程中，而且也出现在边界条件里.

容易证明，当 $\lambda=0$ 时，不存在既满足方程 (2.64a)、又满足边界条件 (2.64c) 和 (2.64d) 的非零解，即 $\lambda=0$ 不是本征值. 当 $\lambda\neq 0$ 时，满足方程 (2.64a) 和边界条件 (2.64c) 的解为

$$X(x)=A\sin\sqrt{\lambda}x,$$

这里的常数 A 显然可取为 1. 于是，代入边界条件 (2.64c)，得

$$\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l=\lambda\left(\frac{a}{c}\right)^2\sin\sqrt{\lambda}l.$$

所以，本征值 λ 就是超越方程

$$\cot\sqrt{\lambda}l=\sqrt{\lambda}\left(\frac{a}{c}\right)^2 \tag{2.65a}$$

的根．这样的 λ 值有无穷多个，且均为实数．把它们从小到大排列起来，就有

$$0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_n<\cdots.$$

对应于每一个本征值 λ_n，本征函数是

$$X_n(x)=\sin\sqrt{\lambda_n}x,\qquad n=1,2,3,\cdots. \tag{2.65b}$$

求出了本征值 λ_n 和本征函数 $X_n(x)$ 后，由方程 (2.64b)，又可以求出 $T_n(t)$，于是就得到既满足偏微分方程 (2.63a)、又满足边界条件 (2.63b)的特解

$$\theta_n(x,t)=\left(C_n\sin\sqrt{\lambda_n}at+D_n\cos\sqrt{\lambda_n}at\right)\sin\sqrt{\lambda_n}x,\qquad n=1,2,3,\cdots. \tag{2.66}$$

把它们全部叠加起来，得到一般解

$$\theta(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\sin\sqrt{\lambda_n}at+D_n\cos\sqrt{\lambda_n}at\right)\sin\sqrt{\lambda_n}x. \tag{2.67}$$

而后，代入初始条件 (2.63c)，得

$$\sum_{n=1}^{\infty}D_n\sin\sqrt{\lambda_n}x=\phi(x), \tag{2.68a}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sqrt{\lambda_n}a\sin\sqrt{\lambda_n}x=\psi(x). \tag{2.68b}$$

由此便可以定出叠加系数 C_n 和 D_n．

和例 2.3 一样，仍然可以采用两种方法定叠加系数．

方法一　利用边界条件和方程的非齐次项在一定条件下的等价性①，把存在于 $x=l$ 端的圆盘所施加的作用计入“非齐次项”，因而将定解问题 (2.63) 中的方程和边界条件改写成

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}=-\left(\frac{a}{c}\right)^2\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}\delta(x-l),\qquad 0<x<l,\ t>0, \tag{2.63a$'$}$$

$$\theta\big|_{x=0}=0,\qquad \left.\frac{\partial\theta}{\partial x}\right|_{x=l}=0,\qquad t\leqslant 0, \tag{2.63b$'$}$$

这里的 $\delta(x-l)$ 应理解为

$$\delta(x-l)=\lim_{\varepsilon\to 0+}\delta(x-l+\varepsilon).$$

① 参阅：吴崇试．数学物理方法．第 2 版．北京：北京大学出版社，2004：320．

换言之，这相当于将集中载荷理解为从杆的内部逼进端点. 相应地，分离变量后得到的本征值问题便是

$$X''(x)+\lambda\left[1+\left(\frac{a}{c}\right)^2\delta(x-l)\right]X(x)=0, \tag{2.64a$'$}$$

$$X(0)=0, \qquad X'(l)=0. \tag{2.64b$'$}$$

这个本征值问题和原来的本征值问题完全等价. 具体求解也可以发现，求得的本征值和本征函数完全相同. 从微分方程和边界条件出发，或者直接计算，都可以证明本征函数的确还具有正交性:

$$\int_0^l X_n(x)X_m(x)\left[1+\left(\frac{a}{c}\right)^2\delta(x-l)\right]\mathrm{d}x=0, \tag{2.69a}$$

只是正交权函数为

$$\rho(x)=1+\left(\frac{a}{c}\right)^2\delta(x-l). \tag{2.69b}$$

这样，由方程组 (2.68) 就能得到

$$\begin{aligned}C_n&=\frac{1}{N_n^2}\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}a}\int_0^l\psi(x)\sin\sqrt{\lambda_n}x\left[1+\left(\frac{a}{c}\right)^2\delta(x-l)\right]\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{N_n^2}\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}a}\left[\left(\frac{a}{c}\right)^2\psi(l)\sin\sqrt{\lambda_n}l+\int_0^l\psi(x)\sin\sqrt{\lambda_n}x\mathrm{d}x\right],\end{aligned} \tag{2.70a}$$

$$\begin{aligned}D_n&=\frac{1}{N_n^2}\int_0^l\phi(x)\sin\sqrt{\lambda_n}x\left[1+\left(\frac{a}{c}\right)^2\delta(x-l)\right]\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{N_n^2}\left[\left(\frac{a}{c}\right)^2\phi(l)\sin\sqrt{\lambda_n}l+\int_0^l\phi(x)\sin\sqrt{\lambda_n}x\mathrm{d}x\right],\end{aligned} \tag{2.70b}$$

其中

$$\begin{aligned}N_n^2&=\int_0^l X_n^2(x)\left[1+\left(\frac{a}{c}\right)^2\delta(x-l)\right]\mathrm{d}x\\&=\frac{l}{2}+\frac{1}{2}\frac{(a/c)^2}{1+\lambda_n(a/c)^4}.\end{aligned} \tag{2.70c}$$

方法二 将方程 (2.64a) 再微商一次，得

$$\frac{\mathrm{d}^2X'(x)}{\mathrm{d}x^2}+\lambda X'(x)=0.$$

同时根据方程 (2.64a)，将边界条件 (2.64c) 改写为

$$X''(0)=0, \quad 即 \quad \left.\frac{\mathrm{d}X'(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=l}=0;$$

同样，边界条件 (2.64d) 也可以改写成

$$\left[\left(\frac{a}{c}\right)^2\frac{\mathrm{d}X'(x)}{\mathrm{d}x}+X'(x)\right]_{x=l}=0.$$

因此，原来关于 $X(x)$ 的本征值问题就转化为关于 $X'(x)$ 的 Sturm-Liouville 型方程的本征值问题. 这时边界条件是关于 $X'(x)$ 的第二类和第三类边界条件，本征函数一定具有正交性：

$$\int_0^l X_n'(x)X_m'(x)\mathrm{d}x=0,\qquad \lambda_n\neq\lambda_n. \tag{2.71}$$

这样，本题也可以利用本征函数的导数的正交性定叠加系数. 为此，将方程 (2.68a) 和 (2.68b) 对 x 微商，得

$$\sum_{n=1}^{\infty}D_nX_n'(x)=\phi'(x), \tag{2.68a$'$}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sqrt{\lambda_n}a\,X_n'(x)=\psi'(x). \tag{2.68b$'$}$$

所以

$$C_n=\frac{1}{N_n'^2}\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}a}\int_0^l\psi'(x)X_n'(x)\,\mathrm{d}x, \tag{2.72a}$$

$$D_n=\frac{1}{N_n'^2}\int_0^l\phi'(x)X_n'(x)\,\mathrm{d}x, \tag{2.72b}$$

其中

$$\begin{aligned}N_n'^2&=\int_0^l\left[X_n'(x)\right]^2\mathrm{d}x=\lambda_n\int_0^l\cos^2\sqrt{\lambda_n}x\,\mathrm{d}x\\&=\lambda_n\left[\frac{l}{2}+\frac{1}{2}\frac{(a/c)^2}{1+\lambda_n(a/c)^4}\right].\end{aligned} \tag{2.72c}$$

最后一步利用了 (2.65a) 式.

§2.4 端点有集中载荷的弹性体振动问题

本节继续讨论弹性体的端点有集中载荷的振动问题，包括一端固定、另一端带有集中质量的弦的横振动问题，以及上端固定、下端系有载荷的均匀弹性垂直杆的纵振动问题，也还可以包括一端固定、另一端安上滑轮的弹性均匀转轴的扭转振动问题. 本节内容原发表于《大学物理》，题为“‘一种不规范的斯特姆——刘维本征值问题’续谈”.

在讨论有关例题之前，需要强调一下这类问题中边界条件[①]正确提法的重要性，因为求解定解问题，就必须正确地写出定解问题，包括正确地写出边界条件. 当杆的一端加载有集中质量时，边界条件与集中质量的加载方式有关. 例如，当弹性杆水平放置，而其右端 $(x=l)$ 和集中质量 M 刚性连接，在杆做纵振动时，边界条件则为

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{M}{ES}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_{x=l}=0, \tag{2.73a}$$

其中 E 为杆质的 Yang 氏模量，S 为杆的横截面积. 在弦的横振动问题中，当弦的一端附有集中质量时，或是水平轴的扭转振动问题中，当轴的一端固定有重物时，也会出现这种类型的边界条件. 但如果集中质量是通过定滑轮悬挂于杆的右端时，或是弹性杆垂直悬挂，而下端和集中质量刚性连接，在讨论杆的纵振动时，则应出现非齐次的边界条件，即

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{M}{ES}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_{x=l}=\frac{Mg}{ES}, \tag{2.73b}$$

其中 g 为重力加速度. 还可以出现更复杂的边界条件. 例如，水平杆的右端附有集中质量，而左端固定在一个转动的垂直轴(轴的粗细可以忽略)上，转动的圆频率为 $\omega(t)$，则当杆做纵振动时，其右端 (载物端) 的边界条件应该是

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{M}{ES}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_{x=l}=\frac{M\omega^2}{ES}\left(l+u\big|_{x=l}\right). \tag{2.73c}$$

如果转动轴是水平向的，边界条件又将更加复杂. 总之，在讨论此类振动问题时，对于涉及的物理问题(包括集中质量的加载方式)需要仔细描述. 杆的不同放置，集中质量的不同加载方式，将会导致不同形式 (齐次或非齐次) 的边界条件. 后面可以看到，这将影响到解题方法，需作相应的改变.

例 2.6　求解上端固定、下端系有集中质量的弹性垂直杆的纵振动问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, \tag{2.74a}$$

$$u\big|_{x=0}=0, \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial x}+C^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_{x=l}=C^2 g, \tag{2.74b}$$

---

① 有关边界条件的讨论，可参阅以下书籍：

- 吉洪诺夫，萨马尔斯基. 数学物理方程. 黄克欧等译. 北京：人民教育出版社，1956：157.
- Koshlyakov N S, Smirnov M M, Gliner E B. Differential Equations of Mathematical Physics. Amsterdam: North-Holland Publishing Co., 1964: 147 – 155.
- Budak B M, Samarskii A A, Tikhonov A N. A Collection of Problems on Mathematical Physics. Oxford: Pergamon, 1964: 13. Problems 32, 34, 35.

$$u\big|_{t=0}=\phi(x),\qquad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0}=\psi(x),\tag{2.74c}$$

其中 $a^2=E/\rho$, $C^2=M/(ES)$，ρ 是杆的密度. 列出定解问题时，未考虑杆的自重.

解法一 可以将定解问题 (2.74) 改写为

$$[1+L\delta(x-l)]\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\tag{2.75a}$$

$$u\big|_{x=0}=0,\qquad \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=l}=C^2 g,\tag{2.75b}$$

$$u\big|_{t=0}=\phi(x),\qquad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0}=\psi(x),\tag{2.75c}$$

其中 $L=C^2a^2=M/(\rho S)$ 可称为集中质量的等效长度：长为 L 的弹性杆 (横截面积为 S，密度为 ρ) 的质量即为 M. 方程 (2.75a) 中的 δ 函数仍理解为 $\delta(x-(l-\varepsilon))$. 由于定解问题中 $x=l$ 端的边界条件是非齐次的，故在求解时需先将边界条件齐次化. 为此设

$$u(x,t)=C^2gx+w(x,t),\tag{2.76}$$

则 $w(x,t)$ 满足的定解问题变为

$$[1+L\delta(x-l)]\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0,\tag{2.77a}$$

$$w\big|_{x=0}=0,\qquad \frac{\partial w}{\partial x}\bigg|_{x=l}=0,\tag{2.77b}$$

$$w\big|_{t=0}=\phi(x)-C^2gx,\qquad \frac{\partial w}{\partial t}\bigg|_{t=0}=\psi(x).\tag{2.77c}$$

令 $w(x,t)=X(x)T(t)$，分离变量，即得

$$X''+\lambda\,[1+L\delta(x-l)]\,X=0,\tag{2.78a}$$

$$X(0)=0,\qquad X'(l)=0\tag{2.78b}$$

和

$$T''+\lambda a^2T=0.\tag{2.79}$$

为了求解本征值问题 (2.78)，按照前面的约定，我们应先将方程 (2.78a) 写成

$$X''+\lambda\,[1+L\delta(x-x_0)]\,X=0,\tag{2.78a$'$}$$

求出既满足方程 (2.78a′)、又满足边界条件 (2.78b) 的非零解后，再令 $x_0\to l$. 因为 $x\neq x_0$ 时方程 (2.78a′) 是齐次的，考虑到边界条件 (2.78b) 的要求，故有

$$X(x)=\begin{cases}A\sin\sqrt{\lambda}x, & 0<x<x_0,\\ B\cos\sqrt{\lambda}(l-x), & x_0<x<l.\end{cases}$$

因为 $X(x)$ 在 $x=x_0$ 点连续，所以有

$$X(x_0)=A\sin\sqrt{\lambda}x_0=B\cos\sqrt{\lambda}(l-x_0).$$

同时，将方程 (2.78a′) 积分，又可得到

$$X'(x)\Big|_{x_0-}^{x_0+}=-\lambda LX(x_0).$$

将上述二式联立，即可求得

$$\sqrt{\lambda}\cot\sqrt{\lambda}x_0=\lambda+\sqrt{\lambda}\tan\sqrt{\lambda}(l-x_0).$$

取极限 $x_0\to l$，就求出本征值 λ_n 是超越方程

$$\sqrt{\lambda}\cot\sqrt{\lambda}l=\lambda \tag{2.80a}$$

的第 n 个正根，$n=1,2,3,\cdots$. 再取 $A=1$，就得到本征函数

$$X_n(x)=\sin\sqrt{\lambda_n}x. \tag{2.80b}$$

由此进一步写出一般解

$$w(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\sqrt{\lambda_n}at+B_n\sin\sqrt{\lambda_n}at\right)\sin\sqrt{\lambda_n}x. \tag{2.81}$$

代入初始条件 (2.77c)，有

$$\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\sqrt{\lambda_n}x=\phi(x)-C^2gx, \tag{2.82a}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sqrt{\lambda_n}a\ \sin\sqrt{\lambda_n}x=\psi(x). \tag{2.82b}$$

根据本征函数的正交性 (权函数 $r(x)=1+L\delta(x-l)$)

$$\begin{aligned}&\int_0^l\sin\sqrt{\lambda_n}x\ \sin\sqrt{\lambda_m}x\,[1+L\delta(x-l)]\,\mathrm{d}x\\&\qquad=L\sin\sqrt{\lambda_n}l\ \sin\sqrt{\lambda_m}l+\int_0^l\sin\sqrt{\lambda_n}x\ \sin\sqrt{\lambda_m}x\,\mathrm{d}x\\&\qquad=\left(\frac{l}{2}+\frac{1}{2}\frac{L}{1+L^2\lambda_n}\right)\delta_{mn},\end{aligned} \tag{2.83}$$

即可定出叠加系数

$$A_n=\frac{1}{N_n^2}\int_0^l\left[\phi(x)-C^2gx\right]\sin\sqrt{\lambda_n}x\,[1+L\delta(x-l)]\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{N_n^2}\left[L\left[\phi(l)-C^2gl\right]\sin\sqrt{\lambda_n}l+\int_0^l\left[\phi(x)-C^2gx\right]\sin\sqrt{\lambda_n}x\,\mathrm{d}x\right], \tag{2.84a}$$

$$\begin{aligned}B_n &= \frac{1}{N_n^2}\int_0^l\psi(x)\sin\sqrt{\lambda_n}x\left[1+L\delta(x-l)\right]\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{N_n^2}\left[L\psi(l)\sin\sqrt{\lambda_n}l+\int_0^l\psi(x)\sin\sqrt{\lambda_n}x\,\mathrm{d}x\right],\end{aligned} \tag{2.84b}$$

其中

$$\begin{aligned}N_n^2 &= \int_0^l\left[\phi(x)-C^2gx\right]\sin\sqrt{\lambda_n}x\left[1+L\delta(x-l)\right]\mathrm{d}x\\ &= \frac{l}{2}+\frac{1}{2}\frac{L}{1+L^2\lambda_n}.\end{aligned} \tag{2.84c}$$

解法二　同样作变换 (2.76)，将定解问题 (2.74) 化为

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0, \tag{2.85a}$$

$$w\big|_{x=0}=0,\qquad \left(\frac{\partial w}{\partial x}+C^2\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)_{x=l}=0, \tag{2.85b}$$

$$w\big|_{t=0}=\phi(x)-C^2gx,\qquad \frac{\partial w}{\partial t}\bigg|_{t=0}=\psi(x). \tag{2.85c}$$

由此可以导出

$$v(x,t)\equiv\frac{\partial w}{\partial x}$$

所满足的定解问题

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0, \tag{2.86a}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}\bigg|_{x=0}=0,\qquad \left(v+L\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{x=l}=0, \tag{2.86b}$$

$$v\big|_{t=0}=\phi'(x)-C^2g,\qquad \frac{\partial v}{\partial t}\bigg|_{t=0}=\psi'(x). \tag{2.86c}$$

利用方程 (2.85a)，将边界条件 (2.85c) 改写为

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}+L\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{x=l}=0. \tag{2.84c$'$}$$

令 $w(x,t)=X(x)T(t)$，分离变量，即得

$$X'' + \lambda X = 0, \tag{2.87a}$$

$$X(0) = 0, \qquad X'(l) + LX''(l) = 0 \tag{2.87b}$$

和

$$T'' + \lambda a^2 T = 0. \tag{2.88}$$

由此求得的本征值和本征函数以及一般解与解法一完全相同. 以下同样需要由方程组 (2.82) 定叠加系数. 为此，将本征值问题 (2.87) 改写为

$$\frac{\mathrm{d}^2 X'(x)}{\mathrm{d}x^2} + \lambda X'(x) = 0, \tag{2.89}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}X'(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} = 0, \qquad \left[X'(x) + L\frac{\mathrm{d}X'(x)}{\mathrm{d}x}\right]_{x=l} = 0. \tag{2.90}$$

由此就可以看出，本征函数的导数 $\{X_n'(x)\}$ 具有正交性:

$$\int_0^l \cos\sqrt{\lambda_n}x\,\cos\sqrt{\lambda_m}x\,\mathrm{d}x = 0, \qquad n \neq m. \tag{2.83$'$}$$

因此可以将 (2.82a)，(2.82b) 式两端微商，得

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n'(x) = \phi'(x) - C^2 g, \tag{2.82a$'$}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sqrt{\lambda_n}a\, X_n'(x) = \psi'(x). \tag{2.82b$'$}$$

由此即得

$$A_n = \frac{1}{{N_n'}^2}\int_0^l \left[\phi'(x) - C^2 g\right] X_n'(x)\,\mathrm{d}x, \tag{2.91a}$$

$$B_n = \frac{1}{{N_n'}^2}\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}a}\int_0^l \psi'(x) X_n'(x)\,\mathrm{d}x. \tag{2.91b}$$

还可以换一个角度来理解这种解法，这就是由定解问题 (2.77) 导出 $\dfrac{\partial w}{\partial x}$ 所满足的定解问题，求出 $\dfrac{\partial w}{\partial x}$ 后，再积分，从而得到 $w(x,t)$ 的解式.

例 2.7 求解左端自由、右端经滑轮悬挂有集中质量的弹性杆的纵振动问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \tag{2.92a}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial x} + C^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_{x=l} = C^2 g, \tag{2.92b}$$

$$u\big|_{t=0}=\phi(x),\qquad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi(x). \tag{2.92c}$$

解 同样，利用方程 (2.92a)，即可将 $x=l$ 端的边界条件改写成

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}+L\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{x=l}=C^2g. \tag{2.92d}$$

由于此边界条件是非齐次的，故需令

$$u(x,t)=R(x)+w(x,t). \tag{2.93a}$$

适当选择函数 $R(x)$，使之满足非齐次边界条件

$$R'(0)=0,\qquad R'(l)+LR''(l)=C^2g,$$

从而可使 $w(x,t)$ 满足齐次边界条件. 但现在无论如何选择 $R(x)$，由此导出 $w(x,t)$ 的方程

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=a^2R''(x)$$

总是非齐次的. 因此不妨取

$$R(x)=-\frac{2C^2gl}{\pi}\cos\frac{\pi}{2l}x, \tag{2.93b}$$

于是 $w(x,t)$ 满足的定解问题便是

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=\frac{\pi gL}{2l}\cos\frac{\pi}{2l}x, \tag{2.94a}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}\Big|_{x=0}=0, \tag{2.94b}$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}+L\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{x=l}=0, \tag{2.94c}$$

$$w\big|_{t=0}=\phi(x)+\frac{2C^2gl}{\pi}\cos\frac{\pi}{2l}x, \tag{2.94d}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi(x). \tag{2.94e}$$

需将 $w(x,t)$ 按相应齐次问题的本征函数展开. 不难求出，此时的本征函数为

$$X_n(x)=\cos\sqrt{\lambda_n}x,\quad n=0,1,2,\cdots, \tag{2.95a}$$

其中 λ_n 是方程

$$\tan\sqrt{\lambda}l=-\sqrt{\lambda}L \tag{2.95b}$$

的第 n 个正零点. 特别是 $n=0$ 时,

$$\lambda_0 = 0, \qquad X_0(x) = 1. \tag{2.95c}$$

因此

$$w(x,t) = T_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\cos\sqrt{\lambda_n}x. \tag{2.96}$$

同时将已知函数 $\phi(x)$, $\psi(x)$ 及 $\cos\dfrac{\pi}{2l}x$ 也按此组本征函数展开:

$$\phi(x) = \phi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n \cos\sqrt{\lambda_n}x, \tag{2.97a}$$

$$\psi(x) = \psi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \cos\sqrt{\lambda_n}x, \tag{2.97b}$$

$$\cos\frac{\pi}{2l}x = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\sqrt{\lambda_n}x. \tag{2.97c}$$

采用例 2.6 的解法一, 即直接利用本征函数的正交性 (正交权函数仍是 $r(x) = 1 + L\delta(x-l)$)

$$\int_0^l \cos\sqrt{\lambda_m}x\,[1 + L\delta(x-l)]\,\mathrm{d}x = \frac{1}{l+L}\delta_{m0}, \tag{2.98a}$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^l \cos\sqrt{\lambda_n}x\,\cos\sqrt{\lambda_m}x\,[1 + L\delta(x-l)]\,\mathrm{d}x \\
&\qquad = L\cos\sqrt{\lambda_n}l\,\cos\sqrt{\lambda_m}l + \int_0^l \cos\sqrt{\lambda_n}x\,\cos\sqrt{\lambda_m}x\,\mathrm{d}x \\
&\qquad = \frac{l(1+L^2\lambda_n)+L}{2(1+L^2\lambda_n)}\delta_{mn}
\end{aligned} \tag{2.98b}$$

定系数, 可得

$$\phi_0 = \frac{1}{l+L}\left[L\phi(l) + \int_0^l \phi(x)\,\mathrm{d}x\right], \tag{2.99a}$$

$$\phi_n = \frac{2(1+L^2\lambda_n)}{l(1+L^2\lambda_n)+L}\left[L\phi(l) + \int_0^l \phi(x)\cos\sqrt{\lambda_n}x\,\mathrm{d}x\right], \tag{2.99b}$$

$$\psi_0 = \frac{1}{l+L}\left[L\phi(l) + \int_0^l \psi(x)\,\mathrm{d}x\right], \tag{2.99c}$$

$$\psi_n = \frac{2(1+L^2\lambda_n)}{l(1+L^2\lambda_n)+L}\left[L\psi(l) + \int_0^l \psi(x)\cos\sqrt{\lambda_n}x\,\mathrm{d}x\right], \tag{2.99d}$$

$$A_0 = \frac{1}{l+L}\frac{2l}{\pi}, \tag{2.99e}$$

$$A_n = \frac{2(1+L^2\lambda_n)}{l(1+L^2\lambda_n)+L}\frac{2\pi l}{\pi^2-2l^2\lambda_n}\cos\sqrt{\lambda_n}l. \tag{2.99f}$$

将 (2.96) 及 (2.97a) — (2.97c) 诸式代入定解问题 (2.94)，就得到 $T_0(t)$ 和 $T_n(t)$ 满足的常微分方程初值问题

$$T_0''(t) = \frac{\pi gL}{2l}A_0, \tag{2.100a}$$

$$T_0(0) = \phi_0 + \frac{2glL}{\pi}A_0, \qquad T_0'(0) = \psi_0 \tag{2.100b}$$

和

$$T_n''(t) + \lambda_n a^2 T_n(t) = \frac{\pi gL}{2l}A_n, \tag{2.101a}$$

$$T_n(0) = \phi_n + \frac{2glL}{\pi}A_n, \qquad T_n'(0) = \psi_n. \tag{2.101b}$$

解之即得

$$T_0(t) = \frac{\pi gL}{4l}A_0 t^2 + \psi_0 t + \left(\phi_0 + \frac{2C^2 gl}{\pi}A_0\right), \tag{2.102a}$$

$$\begin{aligned} T_n(t) = &\frac{\pi g C^2}{2\lambda_n l}A_n\left(1-\cos\sqrt{\lambda_n}at\right) + \frac{\psi_n}{\sqrt{\lambda_n}a}\sin\sqrt{\lambda_n}at \\ &+ \left(\phi_n + \frac{2C^2 gl}{\pi}A_n\right)\cos\sqrt{\lambda_n}at. \end{aligned} \tag{2.102b}$$

如果要采用例 2.6 中的解法二，即写出 $v(x,t) \equiv \dfrac{\partial w}{\partial x}$ 满足的定解问题

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -gL\left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 \sin\frac{\pi}{2l}x, \tag{2.103a}$$

$$v\big|_{x=0} = 0, \tag{2.103b}$$

$$\left(v + L\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{x=l} = 0, \tag{2.103c}$$

$$v\big|_{t=0} = \phi'(x) - C^2 g\sin\frac{\pi}{2l}x, \tag{2.103d}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi'(x). \tag{2.103e}$$

这时的本征函数便应当是 (2.95b) 式的导数，将 $v(x,t)$ 按此组本征函数展开，亦即

$$\begin{aligned} v(x,t) &= \frac{\partial}{\partial x}\left[T_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\cos\sqrt{\lambda_n}x\right] \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sqrt{\lambda_n}\sin\sqrt{\lambda_n}x, \end{aligned} \tag{2.104}$$

无论如何，这样只能求得 $T_n(t), n=1,2,3,\cdots$. 而将 $v(x,t)$ 积分，只能得到

$$\begin{aligned} w(x,t) &= \int_0^x v(x,t)\mathrm{d}x + w(0,t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\big(\cos\sqrt{\lambda_n}x - 1\big) + w(0,t), \end{aligned} \tag{2.105}$$

其中的“积分常数” $w(0,t)$ 未知，原则上必须将此式代回到方程 (2.94a) 中才能定出，也还必须用到解式 (2.96)，判断出

$$w(0,t) = T_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t),$$

再找出并求解 $T_0(t)$ 满足的常微分方程初值问题. 因此就本例题而言，解法二不是一个切实有效的方法. 纯粹运用解法二，无法完全求出 $w(x,t)$. 造成这一困难的根本原因是由本征函数 $\{X_n(x), n=0,1,2,\cdots\}$ 张成的空间与由 $\{X_n'(x), n=1,2,3,\cdots\}$ 张成的空间大小有异.

§2.5　端面受到空气阻力的弹性杆振动问题

2.5.1　定解问题

考虑弹性均匀细杆，长为 l，密度为 ρ，左端固定，右端不受约束，在初始激励下做纵振动. 振动时受到空气作用. 如果空气对杆的侧面施加的黏滞或摩擦阻力可以忽略，而阻力主要出现于杆的端面，则可将此阻尼振动问题化简为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \tag{2.106a}$$

$$u\Big|_{x=0} = 0, \qquad \Big(\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial t}\Big)_{x=l} = 0, \tag{2.106b}$$

$$u\Big|_{t=0} = \phi(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x), \tag{2.106c}$$

其中 $a=\sqrt{E/\rho}$，E 为 Yang 氏模量，空气阻力的影响体现在 $x=l$ 端的边界条件上，b 为常数. 这个定解问题，是由中山大学林琼桂教授提出的[①]. 在建立这个模型的过程中，还有一些更细致的物理考虑，有兴趣的读者可阅读原始的文献. 林琼桂教授采用 Laplace 变换的方法，给出了定解问题的解.

定解问题 (2.106) 中，弹性杆受到空气阻力作用，而且只作用在杆的一端，因此，边界条件同时含有未知函数对于 x 和对于 t 的偏导数. 这一特点，导致无论从

① 见文献：林琼桂. 端面受到空气阻力的弹性杆的振动. 大学物理，2010, 29 (9): 4 – 7.

解题方法，乃至本征函数的正交完备性等理论方面，都提出了一系列富有挑战性的问题. 下面将采用传统的分离变量法求解这一定解问题. 通过将齐次方程和齐次边界条件分离变量，得到了一种全新类型的本征值问题: 本征值不同时出现在微分方程与边界条件中，而且边界条件还具有复系数. 作为这种新类型的复本征值问题的解，将出现复本征值和复本征函数. 在此基础上，叠加出定解问题的一般解，并应用正交性定出叠加系数，从而最后给出定解问题的解. 整个求解过程的难点在于本征函数不具有正交性，因而这一解法的成功之处，就在于针对复本征值的具体特点(虚部为常数)，重新构造出一组正交完备函数组.

2.5.2 分离变量法

按照分离变量的标准做法，令 $u(x,t)=X(x)T(t)$，则方程及边界条件化为

$$X''(x)+\lambda^2X(x)=0, \tag{2.107a}$$

$$T''(t)+\lambda^2a^2T(t)=0, \tag{2.107b}$$

$$X(0)=0, \tag{2.107c}$$

$$X'(l)-\mu bX(l)=0, \tag{2.107d}$$

$$T'(t)+\mu T(t)=0, \tag{2.107e}$$

其中 λ 与 μ 均为待定参数. 由 (2.107e) 式可以推出

$$T''(t)=\mu^2T(t),$$

对照方程 (2.107b)，说明必须有

$$-\mu^2=\lambda^2a^2,\qquad \text{即}\qquad \mu=\pm\mathrm{i}\lambda a,\quad \text{约定}\ \mathrm{Re}\,\lambda\geqslant 0, \tag{2.108}$$

或者说，边界条件 (2.107d) 与方程 (2.107e) 应当更新为

$$X'(l)\mp\mathrm{i}\lambda abX(l)=0, \tag{2.107d$'$}$$

$$T'(t)\pm\mathrm{i}\lambda aT(t)=0. \tag{2.107e$'$}$$

由常微分方程 (2.107a) 与边界条件 (2.107c) 及 (2.107d′) 构成本征值问题. 特别是，如果区分边界条件 (2.107d′) 中的 $\mp$ 号，则可将本征值问题分别写成

$$X''(x)+\lambda^2X(x)=0, \tag{2.109a}$$

$$X(0)=0, \tag{2.109b}$$

$$X'(l)-\mathrm{i}\lambda abX(l)=0 \tag{2.109c}$$

与

$$X''(x)+\lambda^2 X(x)=0, \tag{2.110a}$$

$$X(0)=0, \tag{2.110b}$$

$$X'(l)+\mathrm{i}\lambda ab X(l)=0. \tag{2.110c}$$

这里需要强调的是，由于待定参数 λ 也出现在边界条件中，所以本征值是 λ 本身而非 λ^2.

容易写出本征值问题 (2.109) 与 (2.110) 的解，它们分别是

$$\text{本征值}\qquad \lambda_n^{(-)}=\frac{2n+1}{2l}\pi-\frac{\mathrm{i}}{2l}\ln\frac{1+ab}{1-ab},\qquad n\in\mathbb{N}, \tag{2.111a}$$

$$\text{本征函数}\qquad X_n^{(-)}(x)=\sin\lambda_n^{(-)}x \tag{2.111b}$$

与

$$\text{本征值}\qquad \lambda_n^{(+)}=\frac{2n+1}{2l}\pi+\frac{\mathrm{i}}{2l}\ln\frac{1+ab}{1-ab},\qquad n\in\mathbb{N}, \tag{2.112a}$$

$$\text{本征函数}\qquad X_n^{(+)}(x)=\sin\lambda_n^{(+)}x. \tag{2.112b}$$

显然有

$$\lambda_n^{(-)}=\lambda_n^{(+)\,*},\qquad X_n^{(-)}(x)=X_n^{(+)\,*}(x).$$

为了书写简便起见，不妨引进记号 $\lambda_n^{(\mp)}=\mu_n\mp\mathrm{i}\sigma$，即

$$\mu_n=\frac{2n+1}{2l}\pi,\qquad \sigma=\frac{1}{2l}\ln\frac{1+ab}{1-ab}. \tag{2.113}$$

因为 $0\leqslant ab<1$，所以 $\sigma\geqslant 0$.

定出本征值 $\lambda_n^{\mp}$ 后，就能写出常微分方程 (2.107e′) 的解

$$T_n^{(\mp)}(t)=\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}\lambda_n at},$$

于是得到既满足偏微分方程 (2.106a)、又满足边界条件 (2.106b) 的特解

$$u_n^{(\mp)}=X_n^{(\mp)}(x)\,T_n^{(\mp)}(t)=\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}\lambda_n^{(\mp)}at}\sin\lambda_n^{(\mp)}x,\qquad n\in\mathbb{N}. \tag{2.114}$$

叠加，得一般解

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\sum_{n=0}^{\infty}\left[A_n^{(-)}X_n^{(-)}(x)\,T_n^{(-)}(t)+A_n^{(+)}X_n^{(+)}(x)\,T_n^{(+)}(t)\right]\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left[A_n^{(-)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda_n^{(-)}at}\sin\lambda_n^{(-)}x+A_n^{(+)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_n^{(+)}at}\sin\lambda_n^{(+)}x\right].\end{aligned} \tag{2.115}$$

代入初始条件 (2.106c)，即得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[A_n^{(-)}X_n^{(-)}(x)+A_n^{(+)}X_n^{(+)}(x)\right]=\phi(x),\qquad 0<x<l,\tag{2.116a}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[A_n^{(-)}\lambda_n^{(-)}X_n^{(-)}(x)-A_n^{(+)}\lambda_n^{(+)}X_n^{(+)}(x)\right]=\frac{\mathrm{i}}{a}\psi(x),\qquad 0<x<l.\tag{2.116b}$$

因为 $\lambda_n^{(\mp)}$ 为复数值，导致 $X_n^{(\mp)}(x)=\sin\lambda_n^{(\mp)}x$ 本身没有正交性，所以求解的关键就在于如何能由 (2.116) 式定出叠加系数 $A_n^{(\mp)}$. 容易发现，如果将 $X_n^{(\mp)}(x)$ 与 $X_n^{(\mp)\prime}(x)$ 适当组合，得到的

$$\mathbb{X}_n^{(\mp)}(x)=\frac{X_n^{(\mp)\prime}(x)}{\lambda_n^{(\mp)}}\pm\mathrm{i}\,X_n^{(\mp)}(x)=\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\lambda_n^{(\mp)}x}=\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\mu_n x}\cdot\mathrm{e}^{\sigma x}\tag{2.117}$$

就具有正交性：

$$\int_{-l}^{l}\mathbb{X}_m^{(-)}(x)\,\mathbb{X}_n^{(-)*}(x)\,\mathrm{e}^{-2\sigma x}\mathrm{d}x=\int_{-l}^{l}\mathbb{X}_m^{(-)}(x)\,\mathbb{X}_n^{(+)}(x)\,\mathrm{e}^{-2\sigma x}\mathrm{d}x=2l\cdot\delta_{mn},\tag{2.118a}$$

$$\int_{-l}^{l}\mathbb{X}_m^{(+)}(x)\,\mathbb{X}_n^{(+)*}(x)\,\mathrm{e}^{-2\sigma x}\mathrm{d}x=\int_{-l}^{l}\mathbb{X}_m^{(+)}(x)\,\mathbb{X}_n^{(-)}(x)\,\mathrm{e}^{-2\sigma x}\mathrm{d}x=2l\cdot\delta_{mn},\tag{2.118b}$$

$$\int_{-l}^{l}\mathbb{X}_m^{(-)}(x)\,\mathbb{X}_n^{(+)*}(x)\,\mathrm{e}^{-2\sigma x}\mathrm{d}x=\int_{-l}^{l}\mathbb{X}_m^{(+)}(x)\,\mathbb{X}_n^{(-)*}(x)\,\mathrm{e}^{-2\sigma x}\mathrm{d}x=0.\tag{2.118c}$$

只是正交区间为 $(-l,\ l)$，因此需要将定解问题 (2.106) 作延拓. 考虑到 $u(x,t)$ 在 $x=0$ 满足齐次的第一类边界条件，故应当作奇延拓：

$$U(x,t)=\begin{cases}u(x,t), & 0<x<l,\\ -u(-x,t), & -l<x<0;\end{cases}$$

$$\Phi(x)=\begin{cases}\phi(x), & 0<x<l,\\ -\phi(-x), & -l<x<0;\end{cases}$$

$$\Psi(x)=\begin{cases}\psi(x), & 0<x<l,\\ -\psi(-x), & -l<x<0.\end{cases}$$

本征函数 $X_n^{(\mp)}(x)$ 本身就是奇函数，无需额外另作延拓.

在作延拓后，方程 (2.116a) 与 (2.116b) 即分别变为

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[A_n^{(-)}X_n^{(-)}(x)+A_n^{(+)}X_n^{(+)}(x)\right]=\Phi(x),\qquad -l<x<l,\tag{2.119a}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[A_n^{(-)}\lambda_n^{(-)}X_n^{(-)}(x)-A_n^{(+)}\lambda_n^{(+)}X_n^{(+)}(x)\right]=\frac{\mathrm{i}}{a}\Psi(x),\qquad -l<x<l.\tag{2.119b}$$

再进一步组合成

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[A_n^{(-)}\lambda_n^{(-)}\mathbb{X}_n^{(-)}(x)+A_n^{(+)}\lambda_n^{(+)}\mathbb{X}_n^{(+)}(x)\right]=\Phi'(x)-\frac{1}{a}\Psi(x). \tag{2.120}$$

利用正交关系 (2.118)，即可定出

$$\begin{aligned}
A_n^{(-)} &= \frac{1}{2\lambda_n^{(-)}l}\int_{-l}^{l}\left[\Phi'(x)-\frac{1}{a}\Psi(x)\right]\mathbb{X}_n^{(-)\,*}(x)\mathrm{e}^{-2\sigma x}\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{2\lambda_n^{(-)}l}\int_{-l}^{l}\left[\Phi'(x)-\frac{1}{a}\Psi(x)\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda_n^{(-)\,*}x}\mathrm{e}^{-2\sigma x}\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{2\lambda_n^{(-)}l}\int_{-l}^{l}\left[\Phi'(x)-\frac{1}{a}\Psi(x)\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda_n^{(-)}x}\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{\lambda_n^{(-)}l}\int_{0}^{l}\left[\phi'(x)\cos\lambda_n^{(-)}x+\frac{\mathrm{i}}{a}\psi(x)\sin\lambda_n^{(-)}x\right]\mathrm{d}x, \qquad (2.121\mathrm{a})\\
A_n^{(+)} &= \frac{1}{2\lambda_n^{(+)}l}\int_{-l}^{l}\left[\Phi'(x)-\frac{1}{a}\Psi(x)\right]\mathbb{X}_n^{(+)\,*}(x)\mathrm{e}^{-2\sigma x}\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{2\lambda_n^{(+)}l}\int_{-l}^{l}\left[\Phi'(x)-\frac{1}{a}\Psi(x)\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_n^{(+)\,*}x}\mathrm{e}^{-2\sigma x}\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{2\lambda_n^{(+)}l}\int_{-l}^{l}\left[\Phi'(x)-\frac{1}{a}\Psi(x)\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_n^{(+)}x}\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{\lambda_n^{(+)}l}\int_{0}^{l}\left[\phi'(x)\cos\lambda_n^{(+)}x-\frac{\mathrm{i}}{a}\psi(x)\sin\lambda_n^{(+)}x\right]\mathrm{d}x. \qquad (2.121\mathrm{b})
\end{aligned}$$

在导出这些结果时用到了

$$\begin{aligned}
&-\mathrm{i}\lambda_n^{(-)\,*}-2\sigma=-\mathrm{i}\mu_n^{(-)}-\sigma=-\mathrm{i}\lambda_n^{(-)},\\
&\mathrm{i}\lambda_n^{(+)\,*}-2\sigma=\mathrm{i}\mu_n^{(+)}-\sigma=\mathrm{i}\lambda_n^{(+)}.
\end{aligned}$$

2.5.3 初步的结论

(1) 定解问题 (2.106) 可以分离变量，但有新特点：

(i) 边界条件中出现待定参数，且含有复系数；

(ii) $T(t)$ 满足一阶常微分方程.

这样导致的后果为：

(i) 本征值为复数；

(ii) 对应一个本征值，只有一个既满足齐次偏微分方程、又满足齐次边界条件的非零解；

(iii) 本征函数没有 (Sturm-Liouville 型方程意义下的) 正交性.

(2) 当 $\sigma = 0$ 时，问题就退化为两端固定弦的自由振动问题. 这时有

$$\text{本征值}\qquad \lambda_n^2 = \left(\frac{2n+1}{2l}\pi\right)^2, \qquad n \in \mathbb{N},$$

$$\text{本征函数}\qquad X_n(x) = \sin\frac{2n+1}{2l}\pi x.$$

对应一个本征值 λ_n^2，$T_n(t)$ 有两个线性无关解.

当 $\sigma \neq 0$ 时，本征值和本征函数都“劈裂”为两组:

$$\lambda_n^{(\mp)} = \mu_n \mp \mathrm{i}\sigma.$$

对应一个本征值，相应的特解只有一个，解的总数不变.

(3) 可以找到一个简单的正交关系：$X_n^{(\mp)}(x)$ 与 $X_n^{(\mp)\prime}(x)$ 的线性组合

$$\mathbb{X}_n^{(\mp)}(x) = \frac{X_n^{(\mp)\prime}(x)}{\lambda_n^{(\mp)}} \pm \mathrm{i}\, X_n^{(\mp)}(x) = \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\mu_n x}\,\mathrm{e}^{\sigma x}$$

在区间 $(-l, l)$ 上以权函数 $\rho(x) = \mathrm{e}^{-2\sigma x}$ 正交. 之所以能构造出这样一个简单的正交关系，当然与本征函数 $X_n^{(\mp)}(x)$ 的具体形式有关，或者说，与本征值 $\lambda_n^{(\mp)} = \mu_n \mp \mathrm{i}\sigma$ 的虚部为常数这一特点有关.

(4) 因为

$$\begin{aligned}\int_0^l \phi'(x)\cos\lambda_n^{(\mp)}x\mathrm{d}x &= \phi(x)\cos\lambda_n^{(\mp)}x\Big|_0^l + \lambda_n^{(\mp)}\int_0^l \phi(x)\sin\lambda_n^{(\mp)}x\mathrm{d}x\\ &= \phi(l)\cos\lambda_n^{(\mp)}l - \phi(0) + \lambda_n^{(\mp)}\int_0^l \phi(x)\sin\lambda_n^{(\mp)}x\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

同时，由边界条件 (2.109c)，可以得到

$$\cos\lambda_n^{(\mp)}l = \pm\mathrm{i}ab\sin\lambda_n^{(\mp)}l,$$

于是就能将 (2.121) 式化为

$$\begin{aligned}A_n^{(\mp)} = &\pm\frac{\mathrm{i}ab}{\lambda_n^{(\mp)}l}\phi(l)\sin\lambda_n^{(\mp)}l - \frac{1}{\lambda_n^{(\mp)}l}\phi(0)\\ &+\frac{1}{l}\int_0^l\left[\phi(x) \pm \frac{\mathrm{i}}{\lambda_n^{(\mp)}a}\psi(x)\right]\sin\lambda_n^{(\mp)}x\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{2.122}$$

(5) 从函数空间来看，正交权函数为 $\mathrm{e}^{-2\sigma x}$ 的函数组 $\{\mathbb{X}_n^{(\mp)}(x), n \in \mathbb{N}\}$ 就等价于权函数为 1 的函数组 $\{\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}(2n+1)\pi x/(2l)}, n \in \mathbb{N}\}$. 所以，由函数组 $\{\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}(2n+1)\pi x/(2l)}, n \in \mathbb{N}\}$ 的完备性就可以推断出函数组 $\{\mathbb{X}_n^{(\mp)}(x), n \in \mathbb{N}\}$ 的完备性.

(6) 函数组 $\{\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}(2n+1)\pi x/(2l)}, n\in\mathbb{N}\}$ 是本征值问题

$$\mathbb{X}''+\lambda\mathbb{X}=0, \tag{2.123a}$$

$$\mathbb{X}(l)=-\mathbb{X}(-l), \tag{2.123b}$$

$$\mathbb{X}'(l)=-\mathbb{X}'(-l) \tag{2.123c}$$

的解，因此，就保证了此函数组的正交完备性. 但需要注意，本征值问题 (2.123) 的区间是 $[-l,l]$，不同于本征值问题 (2.109) 或 (2.110)，边界条件的形式也不相同，因此，将定解问题 (2.106) 的解 $u(x,t)$ 按 $\{\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}(2n+1)\pi x/(2l)}, n\in\mathbb{N}\}$ 展开并不能保证在区间 $[0,l]$ 上绝对而且一致收敛，或者说，上面按照 $\mathbb{X}_n^{(\mp)}$ 的正交性定出的系数 $A_n^{(\mp)}$ 并不能保证级数 (2.115) 绝对而且一致收敛，特别是在 $x=0$ 与 $x=l$ 两端.

(7) 也可以取 $\mathbb{X}_n^{(\mp)}(x)=\dfrac{X_n^{(\mp)\prime}(x)}{\lambda_n}\pm\mathrm{i}\,X_n^{(\mp)}(x)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda_n x}$，将会得到同样结果.

(8) 如果不引进正交完备函数组 $\{\mathbb{X}_n^{(\mp)}\}$，而直接利用本征函数组 $\{X_n^{(\mp)}(x)\}$ 的“广义正交性”[①]，即

$$\left(\lambda_m^{(\mp)}+\lambda_n^{(\mp)}\right)\int_0^l X_m^{(\mp)}(x)\,X_n^{(\mp)}(x)\,\mathrm{d}x\pm\mathrm{i}abX_m^{(\mp)}(l)\,X_n^{(\mp)}(l)=0,\quad m\neq n, \tag{2.124a}$$

$$\left(\lambda_m^{(+)}-\lambda_n^{(-)}\right)\int_0^l X_m^{(+)}(x)\,X_n^{(-)}(x)\,\mathrm{d}x-\mathrm{i}abX_m^{(+)}(l)\,X_n^{(-)}(l)=0 \tag{2.124b}$$

及

$$\frac{2}{l}\int_0^l\left[X_n^{(\mp)}(x)\right]^2\mathrm{d}x\pm\frac{\mathrm{i}ab}{\lambda_n^{(\mp)}l}\left[X_n^{(\mp)}(l)\right]^2=1, \tag{2.124c}$$

也能定出系数

$$A_n^{(\mp)}=\pm\frac{\mathrm{i}ab}{\lambda_n^{(\mp)}l}\phi(l)\sin\lambda_n^{(\mp)}l+\frac{1}{l}\int_0^l\left[\phi(x)\pm\frac{\mathrm{i}}{\lambda_n^{(\mp)}a}\psi(x)\right]\sin\lambda_n^{(\mp)}x\mathrm{d}x.$$

它与 (2.122) 式的唯一差别是没有 $\phi(0)$ 项，但因为 $x=0$ 端固定，故可以合理地认为应当有 $\phi(0)=0$.

2.5.4 有待回答的遗留问题

(1) 函数组 $\{\mathbb{X}_n^{(\mp)}(x), n\in\mathbb{N}\}$ 的完备性是否意味着函数组 $\{X_n^{(\mp)}(x), n\in\mathbb{N}\}$ 的完备性?

(2) 如果函数组 $\{X_n^{(\mp)}(x), n\in\mathbb{N}\}$ 不完备，当然就无法由初始条件定出叠加系数. 但现在从上面成功求解定解问题的事实来看，似乎应该肯定 $\{X_n^{(\mp)}(x), n\in\mathbb{N}\}$

---

① 见文献：林琼桂. 再论端面受到空气阻力的弹性杆的振动. 大学物理，2011, 30 (5): 7 - 10.

是完备的. 这就意味着，任给函数 $f(x)$ (当然还要满足一定的要求)，总能够展开为

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[C_n^{(-)}X_n^{(-)}(x)+C_n^{(+)}X_n^{(+)}(x)\right]. \tag{2.125}$$

如何定出叠加系数? 展开是否具有唯一性? 换言之，

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[C_n^{(-)}X_n^{(-)}(x)+C_n^{(+)}X_n^{(+)}(x)\right]=0 \tag{2.126}$$

是否就一定能导出 $C_n^{(\mp)}=0$?

(3) 已知函数 $f(x)$的展开式

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[C_n^{(-)}X_n^{(-)}(x)+C_n^{(+)}X_n^{(+)}(x)\right],$$

如果同时有

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[C_n^{(-)}\lambda_n^{(-)}X_n^{(-)}(x)-C_n^{(+)}\lambda_n^{(+)}X_n^{(+)}(x)\right],$$

则仿照上面定系数的计算过程，可以求出

$$\begin{aligned}C_n^{(-)}&=\frac{1}{\lambda_n^{(-)}l}\int_0^l\left[f'(x)\cos\lambda_n^{(-)}x-g(x)\sin\lambda_n^{(-)}x\right]\mathrm{d}x,\\ C_n^{(+)}&=\frac{1}{\lambda_n^{(+)}l}\int_0^l\left[f'(x)\cos\lambda_n^{(+)}x+g(x)\sin\lambda_n^{(+)}x\right]\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

这是否就意味着只有函数 $f(x)$，并不足以唯一地确定叠加系数? 因为对于给定的 $f(x)$，原则上 $g(x)$ 仍可以独立地任意给定. 这从上面的定解问题可以看出，$f(x)$ 与 $g(x)$ 分别对应于初位移与初速度. 绝不可能对应于给定的初位移，就只有唯一的一个初速度随之确定. 不同初速度之间，也不可能只许可相差一个零函数. 既然如此，这就说明，给定 $f(x)$，并不能确定唯一的一组叠加系数 C_n.

(4) 可以将 (2.124) 式改写为

$$\begin{aligned}f(x)=\cosh\sigma x&\sum_{n=0}^{\infty}\left(C_n^{(-)}+C_n^{(+)}\right)\sin\mu_n x\\ &-\mathrm{i}\sinh\sigma x\sum_{n=0}^{\infty}\left(C_n^{(-)}-C_n^{(+)}\right)\cos\mu_n x.\end{aligned} \tag{2.127}$$

注意，在区间 $(0,\ l)$ 上，函数组 $\{\sin\mu_n x,\ n\in\mathbb{N}\}$ 或 $\{\cos\mu_n x,\ n\in\mathbb{N}\}$ 单独都是正交完备的，因此，如果取

$$C_n^{(-)}=C_n^{(+)}=C_n, \tag{2.128a}$$

就可以进一步定出

$$C_n = \frac{1}{l}\int_0^l \frac{f(x)}{\cosh\sigma x}\sin\mu_n x\,\mathrm{d}x; \tag{2.128b}$$

或者令

$$C_n^{(-)} = -C_n^{(+)} = \mathrm{i}C_n', \tag{2.128c}$$

于是也能定出

$$C_n' = \frac{1}{l}\int_0^l \frac{f(x)}{\sinh\sigma x}\cos\mu_n x\,\mathrm{d}x. \tag{2.128d}$$

这就具体证明了展开式的不唯一性：

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \sin\mu_n x\,\cosh\sigma x = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} C_n\big(\sin\lambda_n^{(-)}x + \sin\lambda_n^{(+)}x\big) \tag{2.129a}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} C_n' \cos\mu_n x\,\sinh\sigma x = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} C_n'\big(\sin\lambda_n^{(-)}x - \sin\lambda_n^{(+)}x\big). \tag{2.129b}$$

更进一步，由此就可以导出

$$\sum_{n=0}^{\infty}\big(C_n + C_n'\big)\sin\lambda_n^{(-)}x + \sum_{n=0}^{\infty}\big(C_n - C_n'\big)\sin\lambda_n^{(+)}x = 0, \tag{2.130}$$

尽管 C_n 与 C_n' 不全都为 0.

(5) 展开式 (2.128a) 或 (2.128b)，本质上是函数 $f(x)$ 按 $\sin\mu_n x$ 或 $\cos\mu_n x$ 展开的问题. 如果

$$f(x)\in\mathscr{C}^{(2)}(0,l),\quad f(0)=0,\quad f'(l)=0, \tag{2.131}$$

则 (2.128a) 式右端的级数在 $[0,\ l]$ 内一致收敛到 $f(x)$；而如果

$$f(x)\in\mathscr{C}^{(2)}(0,l),\quad f(0)=0,\quad f''(0)=0,\quad f(l)=0, \tag{2.132}$$

则 (2.128b) 式右端的级数在 $[0,\ l]$ 内一致收敛到 $f(x)$.

(2.129) 式是将两个按不同完备函数组展开捏合到一起的产物，只有在条件 (2.130) 与 (2.131) 同时满足时，(2.129) 式右端的级数才能在区间 $[0,\ l]$ 上一致收敛为 0；否则只能是平均收敛.

(6) 本征函数 $\sin\lambda_n^{(\mp)}x$ 是由定解问题 (2.106) 导出的. 如果说，作为定解问题 (2.106) 的解 $u(x,t)$，可以由全部特解叠加而得，或者说，可以按照本征函数 $\sin\lambda_n^{(\mp)}x$ 展开，然而，展开式 (2.124) 作为一元函数的展开，本质上却是将实函数按复值函数展开. 而且，$\sin\lambda_n^{(-)}x$ 是本征值问题 (2.109) 的解，可是 $\sin\lambda_n^{(+)}x$ 却是本征值问题 (2.111) 的解，它们根本不是同一个本征值问题的解. 我们到底应当如何去理解本征函数所张成的函数空间的完备性？令人困惑之处还在于边界条件

(2.109c) 与 (2.111c) 中含有本征值 λ，我们甚至无法提出函数 $f(x)$ 在 $x=l$ 点到底应当满足什么样的边界条件，才能使得展开式 (2.124) 一致收敛. 以 $2l$ 为周期延拓到 $(-\infty,\ \infty)$ 或许是解决的途径之一，但这样并不能改变 $f(x)$ 在 $x=l$ 点的收敛状况.

2.5.5 另一种解法

将空气阻力项写入微分方程，于是就可以将定解问题 (2.106) 改写为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-ba^2\frac{\partial u}{\partial t}\delta(x-l), \tag{2.133a}$$

$$u\Big|_{x=0}=0,\qquad \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l}=0, \tag{2.133b}$$

$$u\Big|_{t=0}=\phi(x),\qquad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi(x). \tag{2.133c}$$

这里不妨将 $\delta(x-l)$ 理解为 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+}\delta(x-l+\varepsilon)$.

按照 Sturm-Liouville 型常微分方程本征值问题的普遍理论，我们知道，只要选取满足边界条件

$$X(0)=0,\qquad X'(l)=0$$

的一组本征函数，则定解问题 (2.133) 的解总可以按此组本征函数展开①. 为此，可取

$$X_n=\sin\frac{2n+1}{2l}\pi x,\qquad n\in\mathbb{N},$$

于是

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}T_n(t)\sin\mu_n x,\qquad \mu_n=\frac{2n+1}{2l}\pi. \tag{2.134}$$

代入方程 (2.133a)，得

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\left[T_n''(t)+\mu_n^2a^2\,T_n(t)\right]\sin\mu_n x&=-ba^2\left[\sum_{n=0}^{\infty}T_n'(t)\sin\mu_n x\right]\delta(x-l)\\&=-ba^2\left[\sum_{n=0}^{\infty}T_n'(t)\sin\mu_n l\right]\delta(x-l)=-ba^2\left[\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^mT_m'(t)\right]\delta(x-l)\\&=-ba^2\left[\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^mT_m'(t)\right]\cdot\frac{2}{l}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\sin\mu_n x,\end{aligned}$$

因此

$$T_n''(t)+\mu_n^2a^2\,T_n(t)+\frac{2ba^2}{l}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^{n-m}T_m'(t)=0, \tag{2.135a}$$

---

① 由于方程 (2.133a) 中出现 δ 函数，所以这种展开也都应当在广义函数的意义上来理解.

而由初始条件(2.133c)，可得

$$T_n(0) = \phi_n, \qquad T_n'(0) = \psi_n, \tag{2.135b}$$

其中

$$\phi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \phi(x)\sin\mu_n x\,\mathrm{d}x, \qquad \text{即} \qquad \phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\phi_n \sin\mu_n x, \tag{2.136a}$$

$$\psi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \psi(x)\sin\mu_n x\,\mathrm{d}x, \qquad \text{即} \qquad \psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\psi_n \sin\mu_n x. \tag{2.136b}$$

现在的做法不发生本征函数的完备性问题，也不发生本征函数的正交性困难，但付出的代价是需要求解二阶线性齐次常微分方程组 (2.135)．问题的关键在于，如果我们能在求出单独的 $T_n(t)$ 之前就能先求出 $\sum\limits_{m=0}^{\infty}(-1)^m T_m(t)$ 或 $\sum\limits_{m=0}^{\infty}(-1)^m T_m'(t)$，那么求解常微分方程初值问题 (2.135) 也就毫无困难．现在恰恰就能做到这一点．

为此，对常微分方程初值问题 (2.135) 作 Laplace 变换

$$\begin{aligned} \mathscr{L}\{T_n(t)\} &= \mathbb{T}_n(p), \\ \mathscr{L}\{T_n'(t)\} &= p\mathbb{T}_n(p) - \phi_n, \\ \mathscr{L}\{T_n''(t)\} &= p^2\mathbb{T}_n(p) - p\phi_n - \psi_n, \end{aligned}$$

则可得到 $\mathbb{T}_n(p)$ 满足的代数方程

$$\begin{aligned} &\left[p^2\mathbb{T}_n(p) - p\phi_n - \psi_n\right] + \mu_n^2 a^2\,\mathbb{T}_n(p) \\ &\qquad + (-1)^n\frac{2ba^2}{l}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\left[p\,\mathbb{T}_m(p) - \phi_m\right] = 0. \end{aligned} \tag{2.137}$$

整理即得

$$\begin{aligned} &(-1)^n\mathbb{T}_n(p) + \frac{2ba^2}{l}\frac{p}{p^2+\mu_n^2a^2}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\mathbb{T}_m(p) \\ &\quad = \frac{(-1)^n p\phi_n}{p^2+\mu_n^2a^2} + \frac{(-1)^n\psi_n}{p^2+\mu_n^2a^2} + \frac{1}{p^2+\mu_n^2a^2}\frac{2ba^2}{l}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\phi_m. \end{aligned} \tag{2.138}$$

两端对 n 求和：

$$\begin{aligned} &\left[1 + \frac{2ba^2}{l}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{p}{p^2+\mu_m^2a^2}\right]\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\mathbb{T}_n(p) \\ &\quad = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m p\phi_m}{p^2+\mu_m^2a^2} + \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\psi_m}{p^2+\mu_m^2a^2} \end{aligned}$$

$$+\frac{2ba^2}{l}\left[\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\phi_k\right]\cdot\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{p^2+\mu_m^2a^2}. \tag{2.139}$$

因为 ϕ_m, ψ_m 均为已知量，所以由此就可以求出 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\mathbb{T}_n(p)$. 作反演，即可得到 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^nT_n(t)$，从而就求出了 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^nT_n'(t)$.

事实上，还可以将 (2.139) 式继续化简. 首先，因为

$$\tanh\frac{\pi x}{2}=\frac{4x}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2+x^2},$$

所以有

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{p}{p^2+\mu_m^2a^2}=\frac{l}{2a}\tanh\frac{pl}{a}, \tag{2.140a}$$

$$1+\frac{2ba^2}{l}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{p}{p^2+\mu_m^2a^2}=1+ab\tanh\frac{pl}{a}. \tag{2.140b}$$

同时，如果将 $\phi(x)$ 及 $\psi(x)$ 作周期延拓，即

$$\Phi(x)=\begin{cases}\phi(x), & 0<x<l,\\ -\phi(2l-x), & l<x<2l,\\ -\Phi(-x), & -2l<x<0,\end{cases} \tag{2.141a}$$

$$\Psi(x)=\begin{cases}\psi(x), & 0<x<l,\\ -\psi(2l-x), & l<x<2l,\\ -\Psi(-x), & -2l<x<0,\end{cases} \tag{2.141b}$$

而后作 Fourier 展开，就应该有①

$$\Phi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\phi_n\sin\mu_nx, \tag{2.142a}$$

$$\Psi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\psi_n\sin\mu_nx. \tag{2.142b}$$

在此基础上，可以进一步写出

① 其实 (2.142) 式正是上面初始条件 $\phi(x),\psi(x)$ 按本征函数 $\{\sin\mu_nx, n\in\mathbb{N}\}$ 的延拓. 作为按本征函数展开，只在区间 $[0,l]$ 内成立，既不要求被展开的函数具有周期性，本征函数也不一定是周期函数；而 (2.141) 式，作为 Fourier 展开，则在整个实轴上 $-\infty<x<\infty$ 均成立.

$$\frac{\Phi(x+at)+\Phi(x-at)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\phi_n\big[\sin\mu_n(x+at)+\sin\mu_n(x-at)\big]$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\phi_n \sin\mu_n x \cos\mu_n at, \tag{2.143a}$$
$$\frac{\Psi(x+at)+\Psi(x-at)}{2} = \sum_{n=0}^{\infty}\psi_n \sin\mu_n x \cos\mu_n at. \tag{2.143b}$$

特别是当 $x=l$ 时，有

$$\frac{\Phi(l+at)+\Phi(l-at)}{2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\phi_n \cos\mu_n at, \tag{2.144a}$$
$$\frac{\Psi(l+at)+\Psi(l-at)}{2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\psi_n \cos\mu_n at. \tag{2.144b}$$

(2.144) 式作为 t 的函数，可以再进一步作 Laplace 变换，于是

$$\mathscr{L}\left\{\frac{\Phi(l+at)+\Phi(l-at)}{2}\right\} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{p\,\phi_n}{p^2+\mu_n^2a^2}, \tag{2.145a}$$
$$\mathscr{L}\left\{\frac{\Psi(l+at)+\Psi(l-at)}{2}\right\} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{p\,\psi_n}{p^2+\mu_n^2a^2}. \tag{2.145b}$$

另一方面，因为 $\Phi(x)$ 与 $\Psi(x)$ 都是周期函数，周期为 4π，所以

$$\frac{\Phi(l+at)+\Phi(l-at)}{2} \quad 和 \quad \frac{\Psi(l+at)+\Psi(l-at)}{2}$$

作为 t 的函数，也应当是周期函数，周期为 $4\pi/a$. 由 Laplace 变换的定义，就有

$$\mathscr{L}\left\{\frac{\Phi(l+at)+\Phi(l-at)}{2}\right\} = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-4pl/a}}\int_0^{4l/a}\frac{\Phi(l+at)+\Phi(l-at)}{2}\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t$$
$$= \frac{2\mathrm{e}^{-pl/a}}{1+\mathrm{e}^{-2pl/a}}\int_0^{l/a}\phi(at)\sinh pt\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{\cosh(pl/a)}\frac{1}{a}\int_0^{l}\phi(\xi)\sinh\frac{p\xi}{a}\,\mathrm{d}\xi, \tag{2.146a}$$
$$\mathscr{L}\left\{\frac{\Psi(l+at)+\Psi(l-at)}{2}\right\} = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-4pl/a}}\int_0^{4l/a}\frac{\Psi(l+at)+\Psi(l-at)}{2}\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t$$
$$= \frac{2\mathrm{e}^{-pl/a}}{1+\mathrm{e}^{-2pl/a}}\int_0^{l/a}\psi(at)\sinh pt\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{\cosh(pl/a)}\frac{1}{a}\int_0^{l}\psi(\xi)\sinh\frac{p\xi}{a}\,\mathrm{d}\xi. \tag{2.146b}$$

综合以上结果，就能将方程 (2.139) 改写成

$$\begin{aligned}&\left(1+ab\tanh\frac{pl}{a}\right)\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\mathbb{T}_m(p)\\&\quad=\frac{1}{\cosh(pl/a)}\frac{1}{a}\int_0^l\left[\phi(\xi)+\frac{1}{p}\psi(\xi)\right]\sinh\frac{p\xi}{a}\,\mathrm{d}\xi+\frac{2ba^2}{l}\phi(l)\cdot\frac{l}{2ap}\tanh\frac{pl}{a},\end{aligned}$$

亦即

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\mathbb{T}_m(p)=&\frac{1}{\cosh(pl/a)+ab\sinh(pl/a)}\frac{1}{a}\int_0^l\left[\phi(\xi)+\frac{1}{p}\psi(\xi)\right]\sinh\frac{p\xi}{a}\,\mathrm{d}\xi\\&+\frac{\phi(l)}{\cosh(pl/a)+ab\sinh(pl/a)}\frac{ab\sinh(pl/a)}{p}.\end{aligned}\tag{2.147}$$

其实我们可以将此结果直接代入 (2.137) 式，从而求得 $\mathbb{T}_n(p)$：

$$\begin{aligned}\mathbb{T}_n(p)=&\frac{ba}{l}\frac{(-1)^{n+1}}{p^2+\omega_n^2}\frac{1}{\cosh(pl/a)+ab\sinh(pl/a)}\int_0^l\left[p\phi(\xi)+\psi(\xi)\right]\sinh\frac{p\xi}{a}\,\mathrm{d}\xi\\&+\frac{ba^2}{l}\frac{(-1)^n}{p^2+\omega_n^2}\frac{\phi(l)\cosh(pl/a)}{\cosh(pl/a)+ab\sinh(pl/a)}+\frac{\phi_n p}{p^2+\omega_n^2}+\frac{\psi_n}{p^2+\omega_n^2}.\end{aligned}\tag{2.148}$$

再求反演，即可得到 $T_n(t)$.

第三章　函数空间理论概要

为了以后几章的需要，本章将简要介绍函数空间的一些基本概念与基本结论，不加证明地介绍若干重要的定理. 它们的证明在有关的专著中都可以找到.

§3.1　度量空间与赋范线性空间

3.1.1 度量空间

矢量是线性代数中的基本概念. 作为构成线性空间的元素，矢量具有类似于平常三维矢量的代数特性: 矢量具有加法 (两矢量相加) 与数乘 (矢量与标量相乘) 两种运算，并且遵从相应的运算规则. 但是它并不具有长度和方向的几何特征. 我们希望作为数学抽象的线性空间也能附加上与三维矢量分析类似的直观几何结构，为此首先引进距离的概念.

定义 3.1　元素 (称为**点**) $x, y, z, \cdots$ 的集合 $\mathscr{X}$ 称为**度量空间** (或**距离空间**)，如果对于每一对元素 x, y，存在与它们相联系的一个实数 $d(x, y)$，满足

(1) $d(x,y) = d(y,x)$;　(3.1a)

(2) (i) $d(x,y) \geqslant 0$,　(ii) $d(x,y) = 0$, 当且仅当 $x = y$;　(3.1b)

(3) $d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$　(三角形不等式).　(3.1c)

作为点 x 与 y 的函数，d 称为 (x 与 y 之间的) **度量函数** (或**距离函数**).

☞ **评述**　*度量空间的元素 (点) 不需要是矢量; 无需定义元素的加法与数乘. 换言之，度量空间可以不是线性空间.*

例 3.1　所有实数的集合 (实轴) 构成度量空间 (记为 $\mathscr{R}_1$)，如果两个实数 (实轴上的两点) x 与 y 之间的距离定义为 $|x - y|$.

例 3.2　所有复数 $z = x + \mathrm{i}y$ 的集合构成度量空间，若复数 z_1 与 z_2 的距离为

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

例 3.3　所有 n 个有序实数的集合构成度量空间，记为 $\mathscr{A}_n^{(r)}$. 令

$$x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \quad 和 \quad y = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$$

是此空间中的两个点，引进不同的距离定义，就得到不同的度量空间. 例如，可以定义距离函数为

$$d_p(x,y) = \left(|\xi_1 - \eta_1|^p + |\xi_2 - \eta_2|^p + \cdots + |\xi_n - \eta_n|^p\right)^{1/p}, \qquad 1 \leqslant p < \infty, \qquad (3.2a)$$

包括取 $p=1,2$ 以及 $p=\infty$ 的情形:

$$d_1(x,y)=|\xi_1-\eta_1|+|\xi_2-\eta_2|+\cdots+|\xi_n-\eta_n|, \tag{3.2b}$$

$$d_2(x,y)=\left(|\xi_1-\eta_1|^2+|\xi_2-\eta_2|^2+\cdots+|\xi_n-\eta_n|^2\right)^{1/2}, \tag{3.2c}$$

$$d_\infty(x,y)=\max_i|\xi_i-\eta_i|. \tag{3.2d}$$

在所有这些情形下，容易验证 (3.1) 式中的前两个性质，对于 d_1 和 d_∞，可以直接判断三角形不等式成立，而对于 d_2，三角形不等式则可由 Schwarz 不等式 (下一节 (3.10) 式) 导出.

例 3.4 所有 n 个有序复数构成度量空间，记为 $\mathscr{A}_n^{(c)}$.

定义了距离函数之后，就可以自然地引入收敛的概念.

定义 3.2 如果任给 $\varepsilon>0$，存在指标 N，使得

$$d(x,x_k)\leqslant\varepsilon,\qquad \forall k>N,$$

则称点列 $\{x_k\}$ 收敛到 x $(x_k\to x)$，或 $\{x_k\}$ 有极限 x，记为 $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=x$.

3.1.2 度量空间的完备性问题

定义 3.3 如果任给 $\varepsilon>0$，存在 N，使得

$$d(x_m,x_p)\leqslant\varepsilon,\qquad \forall m,p>N,$$

则称序列 $\{x_k\}$ 是 **Cauchy 序列**，记为

$$\lim_{m,p\to\infty}d(x_m,x_p)=0.$$

定理 3.1 如果序列 $\{x_k\}$ 收敛，则它是 Cauchy 序列.

☞ **评述** 容易以为 Cauchy 序列一定收敛，因为序列中超过一定指标的所有点均彼此接近，它们似乎应当接近于某个确定的点 x. 问题是点 x 是否属于此空间，这只有在 x 仍属于此空间时才正确.

定义 3.4 如果度量空间 $\mathscr{X}$ 中的点构成的每一个 Cauchy 序列都在 $\mathscr{X}$ 中收敛到极限，则称 $\mathscr{X}$ **完备**.

例如，所有有理数 $x,y,\cdots$ 的集合 Rat，定义距离 $d(x,y)=|x-y|$，则为度量空间. 但 Rat 中的序列

$$x_1=1,\quad x_2=1+\frac{1}{1!},\quad \cdots,\quad x_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{(n-1)!},\quad \cdots$$

收敛到 e，它不是有理数. 所以，由有理数组成的度量空间不完备.

上面例 3.1 – 3.4 中所列举的度量空间都是完备的.

例 3.5 对定义在 $a \leqslant t \leqslant b$ 上的所有实值连续函数 $x(t)$ 的集合，取距离函数

$$d_\infty(x,y) = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t) - y(t)| . \tag{3.3}$$

容易验证 $\{x(t), a \leqslant t \leqslant b\}$ 构成度量空间 $\mathscr{C}(a,b)$. 若 $\{x_k(t)\}$ 是 $\mathscr{C}(a,b)$ 中的 Cauchy 序列，则一定满足

$$\lim_{m,p\to\infty} \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x_k(t) - x_m(t)| = 0.$$

但这正是函数序列一致收敛的 Cauchy 充要条件. 根据数学分析知道，连续函数的一致收敛序列一定收敛到连续函数，因此由 $\mathscr{C}(a,b)$ 中的元素组成的序列一定收敛到 $\mathscr{C}(a,b)$ 中的某元素，即 $\mathscr{C}(a,b)$ 是完备的.

例 3.6 对于定义在 $a \leqslant t \leqslant b$ 上的所有实值连续函数 $x(t)$ 的集合，但采用 (与例 3.5 不同的) 距离函数

$$d_2(x,y) = \left(\int_a^b |x(t) - y(t)|^2 \, \mathrm{d}t \right)^{1/2} , \tag{3.4}$$

这也是度量空间，可以根据 Schwarz 不等式 (§3.3 中的 (3.21) 式) 证明三角形不等式成立. 然而这个空间不完备，理由如下：考虑连续函数序列

$$x_k(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan kt, \qquad -1 \leqslant t \leqslant 1,$$

显然此序列是 Cauchy 序列，即

$$\lim_{m,p\to\infty} \int_{-1}^{1} [x_m(t) - x_p(t)]^2 \, \mathrm{d}t = 0,$$

然而 $x_k(t)$ 在平常收敛意义下的极限是间断函数

$$y(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{sgn} t,$$

因此此空间并不完备.

☞ **评述** *这个例子说明，由同样的元素构成的集合，采用不同的距离定义，形成的度量空间不同，特别是度量空间的完备性不同.*

例 3.7 空间 $\mathscr{L}_2^{(r)}(a,b)$.

在距离 d_2 之下，例 3.6 中的连续函数空间不完备，正如有理数空间在距离 $|x-y|$ 之下不完备. 形象地说，有理数空间不够致密，还存在空隙. 将有理数空间加以扩充，即容纳进作为有理数序列极限的无理数，从而就得到在距离 $|x-y|$ 之下完备的实数空间.

同样可以填上连续函数空间的“空隙”，办法也是容纳进所有 Cauchy 序列的极限 (这样的极限可以是间断函数). 这样实施了完备化步骤后，定义在 $a \leqslant t \leqslant b$上、距离为例 3.6 中的 d_2 的实值连续函数空间就扩充为在 Lebesgue 意义下平方可积的实值函数空间 $\mathscr{L}_2^{(r)}(a,b)$.

3.1.3 赋范线性空间

定义 3.5 赋范线性空间是线性空间，其中定义了实值函数 $\|x\|$ (称为 x 的范数)，满足下列性质：

(1) (i) $\|x\| \geqslant 0$, (ii) $\|x\| = 0$，当且仅当 $x = 0$; (3.5a)

(2) $\|\alpha x\| = |\alpha|\,\|x\|$; (3.5b)

(3) $\|x_1 + x_2\| \leqslant \|x_1\| + \|x_2\|$. (3.5c)

☞ **评述**

1\. 对照通常的三维矢量，有助于理解范数的三个性质的直观几何意义.

2\. 如果定义距离为

$$d(x,y) = \|x - y\|, \tag{3.6}$$

赋范线性空间自动就是度量空间①. 由 (3.6) 式定义的距离，称为 (由范数导出的) 自然距离. 反之，范数也能用 d 表示：

$$\|x\| = d(x,0). \tag{3.7}$$

由此导出 $\|x\|$ 是 x 的连续函数，即若 $x_k \to x$，则 $\|x_k\| \to \|x\|$.

3\. 赋范线性空间既是线性空间，也是度量空间，两者都是. 因此它的元素既可以看成矢量，也可以看成点. 这正是平常三维几何中所熟悉的情况. 一方面，空间由点组成，点之间的距离就是通常的 Euclid 距离. 另一方面，选定固定的原点，空间中的每一个点又可以看成由原点发出的矢量的终点. 点和矢量因此是等同的. 两点之间的距离正好就是两个矢量的差的长度，即 $\|x-y\|$; 特别是 $d(x,0) = \|x\|$，所以点到原点的距离就是矢量的长度.

§3.2 函 数 空 间

在赋范线性空间中矢量有长度. 我们希望进一步优化空间的结构，使得矢量也具有方向概念，或者等价地说，也能定义两矢量之间的夹角. 特别是需要一个判据，以确定两个矢量是否平行或垂直.

① 由上面的性质 (3.5b)，我们有 $d(x,y) = d(y,x)$. 由性质 (3.5a) 有 $d(x,y) \geqslant 0$，只有 $x = y$ 时等式成立. 令 $x_1 = x - y$, $x_2 = y - z$，由性质 (3) 又有 $d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$. 于是 (3.1) 的三个条件均得以满足.

3.2.1 内积空间

定义 3.6 实线性空间 $\mathscr{A}^{(r)}$ 上的内积 $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$ 是一对有序矢量 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ 的实值函数，具有下列性质：

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle, \tag{3.8a}$$

$$\langle \alpha\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \alpha\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle, \tag{3.8b}$$

$$\langle \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y} \rangle + \langle \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y} \rangle, \tag{3.8c}$$

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle \geqslant 0, \qquad \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = 0 \text{ 当且仅当 } \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}. \tag{3.8d}$$

其中 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ 是 $\mathscr{A}^{(r)}$ 中的任意矢量，α 是任意实数．此线性空间称为**实内积空间**．

☞ **评述** 由以上定义可以导出对于任意 $\boldsymbol{x}$，有 $\langle \boldsymbol{x}, 0 \rangle = 0$．尽管 $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle$ 非负，但 $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$ 可正、可负，也可以是 0．对 $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle$ 的要求，使得它有正的平方根，能用以定义范数．

现在对复线性空间定义内积．希望仍旧用内积导出范数，故性质 (3.8d) 必须保持．这迫使我们必须对定义 3.6 作某些改变，否则 $\langle \mathrm{i}\boldsymbol{x}, \mathrm{i}\boldsymbol{x} \rangle = \mathrm{i}\langle \boldsymbol{x}, \mathrm{i}\boldsymbol{x} \rangle = \mathrm{i}\langle \mathrm{i}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = \mathrm{i}^2\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = -\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle$，这样就不可能对于任意 $\boldsymbol{x} \neq 0$ 有 $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle > 0$．解决的办法是将 (3.8a) 式改为 $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle^*$．

定义 3.7 复线性空间 $\mathscr{A}^{(c)}$ 上的内积 $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$ 是一对有序矢量 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ 的复值函数，具有下列性质[①]：

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle^* \qquad (\text{这意味着 } \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle \text{ 为实}), \tag{3.9a}$$

$$\langle \alpha\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \alpha^*\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle, \tag{3.9b}$$

$$\langle \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y} \rangle + \langle \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y} \rangle, \tag{3.9c}$$

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle \geqslant 0, \qquad \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = 0 \text{ 当且仅当 } \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}, \tag{3.9d}$$

其中 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ 是 $\mathscr{A}^{(c)}$ 中的任意矢量，α 是任意复数．定义有内积的复线性空间称为**复内积空间**．

由头两个性质，我们推知

$$\langle \boldsymbol{x}, \alpha\boldsymbol{y} \rangle = \alpha\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle. \tag{3.9b$'$}$$

定理 3.2 (Schwarz 不等式) 对于内积空间中的任意两个矢量 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$，有

$$|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle|^2 \leqslant \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle. \tag{3.10}$$

① 在数学类书籍中，常将性质 (3.9b) 写为 $\langle \alpha\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \alpha\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$，二者并无本质区别．

规定 $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle^{1/2}$ 及 $\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}\rangle^{1/2}$ 取算术根，则有

$$|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle| \leqslant \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle^{1/2}\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}\rangle^{1/2}. \tag{3.10$'$}$$

当且仅当 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 线性相关时，(3.10) 或 (3.10′) 式中的等号才成立.

推论　$\langle \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\rangle^{1/2} \leqslant \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle^{1/2} + \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}\rangle^{1/2}.$　　(3.10″)

由 (3.9) 和 (3.10″) 式能够验证 $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle^{1/2}$ 满足关于 $\|\boldsymbol{x}\|$ 的条件 (3.5)，因此可以采用 $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle^{1/2}$ 作为范数的定义，

$$\|\boldsymbol{x}\| = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle^{1/2}. \tag{3.11}$$

这样内积空间自然就是赋范线性空间. 再进一步由范数导出自然距离，于是又有

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\| = \langle \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\rangle^{1/2}. \tag{3.12}$$

而 Schwarz 不等式 (3.10′) 可以改写为更有吸引力的形式:

$$|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle| \leqslant \|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{y}\|. \tag{3.13}$$

采用这样的距离定义，就有平常的关于收敛的定义：如果任给 $\varepsilon > 0$，存在 $N > 0$，使当 $k > N$ 时 $\|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}\| < \varepsilon$，则称序列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 收敛到 $\boldsymbol{x}$.

在此基础上，就能定义级数的收敛性.

定义 3.8　设有级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \boldsymbol{x}_k \equiv \boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2+\cdots+\boldsymbol{x}_n+\cdots$，若其部分和序列收敛到 $\boldsymbol{x}$，即任给 $\varepsilon > 0$，存在 $N > 0$，使当 $n > N$ 时 $\left\|\sum\limits_{k=1}^{n} \boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}\right\| < \varepsilon$，则称级数收敛到 $\boldsymbol{x}$.

由 Schwarz 不等式能够推出，内积是其宗量的连续函数. 因此，只要 $\boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}_n \to \boldsymbol{y}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} \langle \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{y}_n\rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle$. 特别是，如果 $\boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{x}$，则 $\|\boldsymbol{x}_n\| \to \|\boldsymbol{x}\|$. 如果 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{x}$，则级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \langle \boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{y}\rangle$ 自动收敛到 $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle$.

3.2.2 正交与正交投影

定义 3.9　如果 $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle = 0$，则称矢量 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ 正交 (或垂直). 两两正交的矢量集合称为**正交集**. 如果其中的所有矢量均不为 $\mathbf{0}$，则为**真正交集**. 真正交集是线性无关集. 在 n 维线性空间中，真正交集最多含有 n 个元素. 如果正交集中每个矢量的范数均为 1，则此集合是**正交归一**的. 真正交集总可以转化为正交归一集.

若两个矢量 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ 满足 $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle = 0$，则有**商高定理** (勾股定理，Pythagoras 定理)

$$\langle \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle + \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}\rangle \quad 或 \quad \|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2.$$

由此还可推出，若两个正交矢量之和为 0，则每个矢量都必须是零矢量.

定义 3.10 若矢量 $\boldsymbol{y} \neq 0$，而 α 取遍所有实数，则集合 $\alpha\boldsymbol{y}$ 称为由 $\boldsymbol{y}$ 生成的直线. 如果 $\alpha \geqslant 0$，则集合 $\alpha\boldsymbol{y}$ 称为由 $\boldsymbol{y}$ 生成的正向半直线.

当 α 为实数时，在由 $\boldsymbol{y}$ 生成的直线上有两个单位矢量 (即单位长度的矢量)：$\pm\boldsymbol{y}/\|\boldsymbol{y}\|$. 但当 α 为复数时，则由 $\boldsymbol{y}$ 所生成的直线就含有 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\boldsymbol{y}/\|\boldsymbol{y}\|$ 形式的所有单位矢量，其中 θ 为实数.

定义 3.11 $\boldsymbol{x}$ 在 $\boldsymbol{y}$ 生成的直线上的 (正交) 投影是矢量 $\boldsymbol{x}_p = \langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{e}\rangle\boldsymbol{e}$，其中 $\boldsymbol{e}$ 是直线上的两个单位矢量之一 ($\boldsymbol{e}$ 的不同选取得到同样的 $\boldsymbol{x}_p$).

不使用单位矢量，也能把 $\boldsymbol{x}$ 在 $\boldsymbol{y}$ 生成的直线上的投影用 $\boldsymbol{y}$ 表示：

$$\boldsymbol{x}_p = \frac{\langle\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}\rangle}{\|\boldsymbol{y}\|^2}\boldsymbol{y}. \tag{3.14}$$

给定矢量 $\boldsymbol{x}$ 及另一个矢量 $\boldsymbol{y} \neq 0$，则 $\boldsymbol{x}$ 能分解为两个矢量之和，其中一个矢量在 $\boldsymbol{y}$ 所生成的直线上，另一个矢量垂直于此直线 (图 3.1)：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= \boldsymbol{x}_p + \boldsymbol{z}, \qquad & \boldsymbol{x}_p &= \frac{\langle\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}\rangle}{\|\boldsymbol{y}\|^2}\boldsymbol{y}, \\ \boldsymbol{z} &= \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_p, \qquad & \langle\boldsymbol{z},\boldsymbol{y}\rangle &= 0. \end{aligned} \tag{3.15}$$

这样的分解是唯一的. 矢量 $\boldsymbol{x}_p$ 就是位于 $\boldsymbol{y}$ 所生成的直线上的、最接近于 $\boldsymbol{x}$ 的矢量. 定义 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 之间的夹角 $\theta_{\boldsymbol{xy}}$ 即为 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 所生成的正向半直线间的夹角. 如果 $\boldsymbol{e}$ 是与 $\boldsymbol{y}$ 同向的半直线上的单位矢量，即 $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{y}/\|\boldsymbol{y}\|$，则

$$\cos\theta_{\boldsymbol{xy}} = \frac{\langle\boldsymbol{e},\boldsymbol{x}\rangle}{\|\boldsymbol{x}\|} = \frac{\langle\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}\rangle}{\|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{y}\|}. \tag{3.16}$$

Schwarz 不等式 (3.10) 指出，上式右端在 -1 与 1 之间，所以公式 (3.16) 定义的夹角为实数，在 0 与 π 之间.

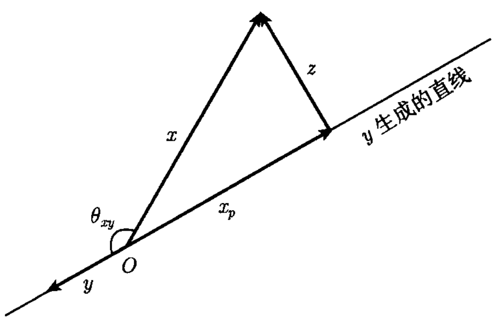


图 3.1 矢量的正交分解

3.2.3 线性流形与线性子空间

在平常的三维 Euclid 空间 $\mathscr{E}_3$ 中，能够找到称为线性流形的子集，它们就是过原点的直线和平面. 从概念上说，空间 $\mathscr{E}_3$ 本身，或是仅由零矢量组成的集合，也都是线性流形.

线性流形的概念也能推广到任意线性空间.

定义 3.12 线性空间 $\mathscr{A}$ 中的集合 $\mathscr{M}$ 称为 ($\mathscr{A}$ 中的) **线性流形**，如果对于任意属于 $\mathscr{M}$ 的矢量 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$，$\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y}$ 也属于 $\mathscr{M}$，其中 α, β 是任意常数.

☞ **评述** 线性流形必须含有零矢量. 因此，如果 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ 是 $\mathscr{A}$ 中的两个独立矢量，则形式为 $\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{y}$ 的矢量集合不是线性流形，因为它不包含零矢量 (原点).

最简单的线性流形就是由单个非零矢量 $\boldsymbol{\phi}_1$ (可取为单位矢量) 生成的直线.

如果 $\mathscr{M}$ 中的每一个矢量 $\boldsymbol{y}$ 均可用 $\mathscr{M}$ 中的一组矢量 $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_k\}$ 的线性组合表示，即

$$\boldsymbol{y}=\alpha_1\boldsymbol{x}_1+\alpha_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+\alpha_k\boldsymbol{x}_k, \qquad \forall \boldsymbol{y}\in\mathscr{M}, \tag{3.17}$$

则称矢量集 $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_k\}$ 张成 $\mathscr{M}$. 在几何上就可以把它看成通过原点的超平面. 特别是，如果 $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_k\}$ 线性无关，则它们就构成了 k 维线性流形 $\mathscr{M}$ 的一组基. 这时 $\boldsymbol{y}$ 的线性表示 (3.17) 式就是唯一的.

任何一个 k 维线性流形 $\mathscr{M}$ 一定含有 k 个线性无关的矢量 (基)；而且，k 维线性流形中的任意 $k+1$ 个矢量一定线性相关.

如果一个流形不是由有限个数的矢量张成的，这个流形就是无穷维的.

如果无穷维线性流形 $\mathscr{M}$ 中的每一个矢量 $\boldsymbol{y}$，或者可以表示成无穷矢量集 $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots\}$ 中有限个矢量的线性组合，或者可以表示成这种有限线性组合的极限，则 $\mathscr{M}$ 就是由矢量集 $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots\}$ 张成的. 更进一步，如果对于 $\mathscr{M}$ 中的任何一个矢量 $\boldsymbol{y}$，都有唯一的线性表示

$$\boldsymbol{y}=\alpha_1\boldsymbol{x}_1+\alpha_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+\alpha_n\boldsymbol{x}_n+\cdots,$$

则称无穷矢量集 $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots\}$ 是 $\mathscr{M}$ 的基. 此时 $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots\}$ 一定是线性无关的[①].

和有限维流形不同的是，对于由矢量集 $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots\}$ 张成的无穷维线性流形 $\mathscr{M}$，即使这一组矢量集是线性无关的，它们也不一定构成 $\mathscr{M}$ 的基. 例如考虑 $\mathscr{E}_\infty$ 中的矢量集

$$\boldsymbol{f}_j=(1,0,0,\cdots,0,1,0,\cdots), \qquad j=2,3,4,\cdots,$$

在 $\boldsymbol{f}_j$ 中，只有两个分量 (第一个分量和第 j 个分量) 不为 0. 可以证明，由 $\{\boldsymbol{f}_j\}$ 的确张成 $\mathscr{E}_\infty$，因为序列 $(\boldsymbol{f}_2+\boldsymbol{f}_3+\cdots+\boldsymbol{f}_{n+1})/n$ 的极限就是 $\boldsymbol{e}_1=(1,0,0,0,\cdots)$；在此基

① 即当且仅当 $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=0$ 时，才能有 $\alpha_1\boldsymbol{x}_1+\alpha_2\boldsymbol{x}_2+\cdots=0$.

础上就可得到 $e_2=(0,1,0,0,\cdots)$, $e_3=(0,0,1,0,\cdots)$, $\cdots$，所以也就能叠加出 ($\mathscr{E}_\infty$ 内的任意一个) 矢量 $x=(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\cdots)$. 然而直接将 $\{f_j\}$ 中的矢量作线性组合，却无法给出 e_1，因为 $e_1=\alpha_2 f_2+\alpha_3 f_3+\cdots$ 无解. 所以，矢量集 $\{f_j, j=2,3,4,\cdots\}$ 并不是 $\mathscr{E}_\infty$ 的基.

如果线性流形 $\mathscr{M}$ 是闭的，即 $\mathscr{M}$ 中的任意一个矢量序列均收敛，且其极限仍属于 $\mathscr{M}$, 则称为**线性子空间**. 有限维空间中的线性流形都一定是闭的，因而一定是线性子空间. 然而无穷维线性流形却不一定是线性子空间.

设 $\mathscr{M}$ 为 $\mathscr{A}$ 中的线性流形 (闭的或否)，考虑与 $\mathscr{M}$ 中的每个矢量都正交的所有矢量的集合 $\mathscr{M}^\perp$. 集合 $\mathscr{M}^\perp$ 是线性流形，而且是闭的. 事实上，若 $x_1,x_2,\cdots$ 是 $\mathscr{M}^\perp$ 中的序列，其极限 x 属于 $\mathscr{A}$; 由于对于 $\mathscr{M}$ 中的每个 f，$\langle x_k,f\rangle=0$，内积的连续性表明 $\langle x,f\rangle=0$，所以 x 属于 $\mathscr{M}^\perp$. 这就证明了 $\mathscr{M}^\perp$ 是闭的. 还能证明 $(\mathscr{M}^\perp)^\perp=\overline{\mathscr{M}}$，所以如果 $\mathscr{M}$ 本身是闭的，则 $(\mathscr{M}^\perp)^\perp=\mathscr{M}$. 这时 $\mathscr{M}$ 和 $\mathscr{M}^\perp$ 互为**正交补**.

我们特别关注闭线性流形. 原因是如果 $\mathscr{A}$ 是 Hilbert 空间，$\mathscr{M}$ 是 $\mathscr{A}$ 中的闭线性流形，则 $\mathscr{M}$ 本身也是 Hilbert 空间. 进一步，如果 $\{x_k\}$是 $\mathscr{M}$ 中的 Cauchy 序列，它一定在 $\mathscr{A}$ 中有极限 x (因为 $\mathscr{A}$ 是完备的)；x 也一定属于 $\mathscr{M}$ (因为 $\mathscr{M}$ 是封闭的). 因此 $\mathscr{M}$ 是完备的内积空间，故而是 Hilbert 空间.

§3.3 Hilbert 空间

3.3.1 Hilbert 空间

定义 3.13 在自然距离下完备的内积空间称为 **Hilbert 空间**.

例 3.8 (1) 任意 n 维实内积空间称为 (实) n 维 Euclid 空间，记为 $\mathscr{E}_n$. 任何这样的空间都是完备的，因此也都是 Hilbert 空间.

(2) 有关 (1) 的具体例子是所有 n 个有序实数的空间. 如果定义

$$\langle x,y\rangle=\xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2+\cdots+\xi_n\eta_n,$$

它就是内积空间. 我们有

$$\|x\|=\left(\xi_1^2+\xi_2^2+\cdots+\xi_n^2\right)^{1/2}$$

及

$$d(x,y)=\|x-y\|=\left[(\xi_1-\eta_1)^2+(\xi_2-\eta_2)^2+\cdots+(\xi_n-\eta_n)^2\right]^{1/2}.$$

Schwarz 不等式变为

$$\left(\sum_{k=1}^n \xi_k\eta_k\right)^2\leqslant\left(\sum_{k=1}^n \xi_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^n \eta_k^2\right). \tag{3.18}$$

(3) 有关 (1) 的另一个例子是定义在区间 $a \leqslant t \leqslant b$ 上的次数低于 n 的实多项式 $\boldsymbol{x} = x(t)$ 构成的空间 P_n，内积定义为

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \int_a^b x(t)\, y(t)\, \mathrm{d}t.$$

例 3.9 (1) 任意 n 维复内积空间称为 n 维酉空间 (或称 n 维复 Euclid 空间)，记为 $\mathscr{U}_n$. 任何这样的空间也都是完备的.

(2) 有关 (1) 的具体例子是所有 n 个有序复数的空间，内积定义为

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \sum_{k=1}^{n} \xi_k^* \, \eta_k.$$

容易验证条件 (3.8)，且

$$\|\boldsymbol{x}\| = \left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k^* \, \xi_k \right)^{1/2} = \left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^2 \right)^{1/2}, \quad d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| = \left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k - \eta_k|^2 \right)^{1/2}.$$

Schwarz 不等式 (3.10) 变为

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k^* \eta_k \right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{n} |\eta_k|^2 \right). \tag{3.19}$$

例 3.10 考虑在 $a \leqslant t \leqslant b$ 上 Lebesgue 平方可积的所有实值函数 $x(t)$ 所构成的空间 $\mathscr{L}_2^{(r)}(a, b)$. 引进内积

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \int_a^b x(t)\, y(t)\, \mathrm{d}t, \tag{3.20}$$

相应的范数是

$$\|\boldsymbol{x}\| = \left[\int_a^b x^2(t)\, \mathrm{d}t \right]^{1/2}.$$

由此导出距离

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| = \left\{ \int_a^b \left[x(t) - y(t) \right]^2 \mathrm{d}t \right\}^{1/2},$$

Schwarz 不等式变为

$$\left| \int_a^b x(t)\, y(t)\, \mathrm{d}t \right| \leqslant \left[\int_a^b x^2(t)\, \mathrm{d}t \right]^{1/2} \left[\int_a^b y^2(t)\, \mathrm{d}t \right]^{1/2}. \tag{3.21}$$

此空间是完备的 (见例 3.7 的讨论)，所以 $\mathscr{L}_2^{(r)}(a, b)$ 是 Hilbert 空间.

例 3.11 考虑在 $a \leqslant t \leqslant b$ 上 Lebesgue 平方可积的所有复值函数 $x(t)$ 所构成的空间 $\mathscr{L}_2^{(c)}(a, b)$. 可以采用合适的内积定义，例如：

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \int_a^b x^*(t)\, y(t)\, \mathrm{d}t, \tag{3.22}$$

则范数及自然距离分别是

$$\|\boldsymbol{x}\| = \left(\int_a^b |x(t)|^2 \,\mathrm{d}t \right)^{1/2}, \qquad d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| = \left(\int_a^b |x(t) - y(t)|^2 \,\mathrm{d}t \right)^{1/2},$$

而 Schwarz 不等式变为

$$\left| \int_a^b x^*(t)\, y(t)\, \mathrm{d}t \right| \leqslant \left(\int_a^b |x(t)|^2 \,\mathrm{d}t \right)^{1/2} \left(\int_a^b |y(t)|^2 \,\mathrm{d}t \right)^{1/2}. \tag{3.23}$$

空间 $\mathscr{L}_2^{(c)}(a,b)$ 也是完备的，因此是 Hilbert 空间.

例 3.12 设 V 是 k 维空间 $\mathscr{E}_n^{(r)}$ 内的体积. 考虑定义在 V 上的、积分

$$\int \cdots \int_V |x(t_1, t_2, \cdots, t_k)|^2 \,\mathrm{d}t_1 \mathrm{d}t_2 \cdots \mathrm{d}t_k$$

在 Lebesgue 意义下存在的所有复值函数的空间 $\mathscr{L}_n^{(c)}$. 如果内积定义为

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \int \cdots \int_V x^*(t_1, t_2, \cdots, t_k)\, y(t_1, t_2, \cdots, t_k)\, \mathrm{d}t_1 \mathrm{d}t_2 \cdots \mathrm{d}t_k,$$

则此空间为 Hilbert 空间.

3.3.2 可分离的 Hilbert 空间

令 U 是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 中的矢量集. U 中矢量的全部有限线性组合就是 U 所张成的线性子空间 $S(U)$. 一般说来，$S(U)$ 在 $\mathscr{H}$ 中并不封闭①；它的闭包 $\overline{S}(U)$ 称为 U 所张成的闭合线性子空间. $S(U)$ 可以明显不同于 $\overline{S}(U)$. 例如，如果 U 是 $\mathscr{L}_2(a,b)$ 中的集合 $\{1, x, x^2, \cdots\}$，$S(U)$ 是全部多项式的集合，而 $\overline{S}(U)$ 是整个 $\mathscr{L}_2(a,b)$.

如果 $U: \{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \cdots, \boldsymbol{f}_n, \cdots\}$ 张成的闭合线性子空间与 $\mathscr{H}$ 重合，我们就说 U 是 $\mathscr{H}$ 的**生成子集**，或者说，U 在 $\mathscr{H}$ 中**稠密**②. 这样，任给 $\varepsilon > 0$，对于 $\mathscr{H}$ 中的任意元素 $\boldsymbol{f}$，总存在指标 N 及一组常数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_N$，使得

$$\left\| \boldsymbol{f} - \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \boldsymbol{f}_k \right\| < \varepsilon.$$

---

① 如果 U 只含有有限个线性无关矢量，则 $S(U)$ 是有限维线性子空间，因此是封闭的.

② 设 $\mathscr{A}$ 为度量空间，$S \subset T$ 是 $\mathscr{A}$ 的两个子集. 如果任给 $\varepsilon > 0$，对于 T 内的每个 $\boldsymbol{f}$，总存在 S 的一个元素 $\boldsymbol{e}$，使得 $d(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f}) < \varepsilon$，则称 S 在 T 内是稠密的. 在几何上，这意味着对于 T 内的任意元素，我们总能在 S 内找到与之任意接近的元素；或者说，T 内的每个元素，都可以用 S 内的元素以任意精度近似. T 当然可以就是空间 $\mathscr{A}$ 本身. 稠密性的概念，显然依赖于所使用的距离定义.

用 S 表示生成子集的全部有限线性组合的集合，则 $\overline{S} = \mathscr{H}$.

U 可以是整个 $\mathscr{H}$，因此 $S(U) = \overline{S}(U) = \mathscr{H}$. 我们的目标是寻找比较小的集合 U，然而它是 $\mathscr{H}$ 的生成子集.

定义 3.14 Hilbert 空间称为**可分离**的，如果它的生成子集 U 是可数的①.

可数的生成子集的存在，意味着 $\mathscr{H}$ 并不太“大”，尽管 $\mathscr{H}$ 含有的元素可能是不可数的.

任何有限维 Hilbert 空间 $\mathscr{E}_n$ 是可分离的，因为存在 n 个矢量 $(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \cdots, \boldsymbol{f}_n)$，使得 $\mathscr{E}_n$ 中的任何一个矢量都能表示为 $\boldsymbol{f} = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k \boldsymbol{f}_k$；特别是，任何一组基就起着生成子集的作用.

我们更有兴趣于无穷维 Hilbert 空间. 显然无穷维空间不能有有限的生成子集. 因此，一个可分离的无穷维 Hilbert 空间一定含有可数的无穷集合 $U:\{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \cdots\}$，使得 $\mathscr{H}$ 中的每一个元素 $\boldsymbol{f}$ 都能以所要求的精度用 U 中有限个元素的线性组合逼近. 换言之，对于 $\mathscr{H}$ 中的每个 $\boldsymbol{f}$，任给 $\varepsilon > 0$，总能找到指标 N 以及标量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_N$ (它们通常与 ε 有关)，使得

$$\left\| \boldsymbol{f} - \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \boldsymbol{f}_k \right\| < \varepsilon. \tag{3.24}$$

例如，集合 $\{1, t, t^2, \cdots\}$ (显然是可数的) 是 $\mathscr{L}_2(a,b)$ 的生成子集，其中 a 和 b 为有限值；空间 $\mathscr{L}_2(a,\infty)$, $\mathscr{L}_2(-\infty,b)$, $\mathscr{L}_2(-\infty,\infty)$ 也都是可分离的；k 个独立自变量的平方可积函数空间 $\mathscr{L}_2(V)$ 也是可分离的.

3.3.3 基与生成子集两个概念之间的差异

对于可分离的 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$，总可以找到一个生成子集，使其元素均线性无关，因为我们总可以将 (任意一个) 生成子集中的元素编号，而后将所有与“前面”的元素线性相关的元素剔除即可. 再按照 Gram-Schmidt 步骤，可以进一步将这个生成子集转换成正交集. 这样，任何一个可分离的 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 总含有一组正交的生成子集.

显然也需要有一组矢量构成 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 的基，因而能够把 $\mathscr{H}$ 中的任意一个矢量用这组基矢表示为有限或无穷级数. 值得注意基与生成子集这两个概念的区别.

矢量集 $(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \cdots, \boldsymbol{f}_n, \cdots)$ 是生成子集，如果 $\mathscr{H}$ 中的每一个矢量 $\boldsymbol{x}$ 都能用该集中矢量的有限线性组合以事先给定的任意精度作近似：任给 $\varepsilon > 0$，对于每个 $\boldsymbol{x}$，总存在 $N > 0$ 及常数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_N$，使得 (3.24) 式成立. 减小 ε，即提高近似的

① 所谓集合是可数的，指的是它的元素能与正整数或正整数的某个子集一一对应. 只有有限个元素的集合是可数的；有理数构成可数集，而实数集则否.

精度，可以预期必须增大指标 N，而且也必须改变此前求出的系数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_N$，换言之，并不存在一个固定的常数序列 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots$，使得 $\boldsymbol{x} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \xi_k \boldsymbol{f}_k$. 线性无关集 $\{\boldsymbol{f}_0 = 1, \boldsymbol{f}_1 = t, \boldsymbol{f}_2 = t^2, \cdots\}$ 是 $\mathscr{L}_2(-1,1)$ 的生成子集，但不是基，因为有许多函数 (例如 $|t|$) 属于 $\mathscr{L}_2(-1,1)$，但不能展开为级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \xi_k t^k$. 因为 $|t|$ 是偶函数，在用上述 $\boldsymbol{f}_n(t) = t^n$ 的有限线性组合 $\sum\limits_{k=0}^{N} \alpha_n t^{2n}$ 逼近时，得到的结果是：

$$
\begin{aligned}
&\text{零级近似} \quad && \alpha_0 = \frac{1}{2};\\
&\text{一级近似} \quad && \alpha_0 = \frac{3}{16},\ \alpha_1 = \frac{15}{16};\\
&\text{二级近似} \quad && \alpha_0 = \frac{15}{128},\ \alpha_2 = \frac{105}{64},\ \alpha_2 = -\frac{105}{128};\\
&\cdots && \cdots.
\end{aligned}
$$

从函数逼近的角度来看，只要 $x(t)$ 连续，则 Weierstrass 逼近定理就保证了多项式 $p^{(k)}(t)$ 的存在性，使得 $\|x(t) - p^{(k)}(t)\| < 1/k$. 我们容易构造无穷级数 $q^{(1)}(t) + q^{(2)}(t) + \cdots$，使得 $p^{(k)}(t)$ 是它的部分和序列. 只需选取 $q^{(k)}(t) = p^{(k)}(t) - p^{(k-1)}(t)$ 即可. 无穷级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^{(k)}(t)$ 显然收敛到 $x(t)$，而每个 $q^{(k)}(t)$ 都是多项式，可是这并不是幂级数 $\sum\limits_{j=0}^{\infty} \xi_j \boldsymbol{f}_j$. 将 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^{(k)}(t)$ 变换为幂级数，我们首先必须将这个级数重新排序：将每个 $q^{(k)}(t)$ 中的常数项合并 (求和)，并且放到最前面，再将 t^1 项合并，并放到第二项，如此等等. 对于级数并不总是允许作这样剧烈的重排的，因此级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^{(k)}(t)$ 通常并不等价于幂级数. 能将函数表示为幂级数，该函数至少必须无穷次可微，而 $\mathscr{L}_2$ 中的大多数函数并没有这么光滑. 我们知道，如果得到的级数只是平均收敛而非绝对收敛，就不允许将级数重排.

处理按 Legendre 多项式 $\mathrm{P}_k(t)$ 展开的问题时，也将遇到非常相似的现象. 我们知道，连续 (但不可导) 函数 $x(t) = |t|$ 能在区间 $-1 \leqslant t \leqslant 1$ 中展开为级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \alpha_k \mathrm{P}_k(t)$，可是 $|t|$ 并不能展开为幂级数 $\sum\limits_{j=0}^{\infty} \xi_j t^j$. 我们并不许可将 Legendre 展开中的各项集中再重排为幂级数. 不同之处在于，在用 Legendre 多项式的有限线性组合逼近 $|t|$ 时，

$$
|t| = \frac{1}{2}\mathrm{P}_0(t) + \frac{5}{8}\mathrm{P}_2(t) - \frac{3}{16}\mathrm{P}_4(t) + \cdots,
$$

随着精度的提高 (即参与叠加的 Legendre 多项式次数更高)，其组合系数并不改变.

以上我们强调了基与生成子集这两个概念的差异. 读者也可以去找它们的相似性. 显然，对于由正交元素构成的集合，这两者是恒等的.

第四章　线性算符理论初步

§4.1　线 性 算 符

4.1.1　线性算符

线性空间 $\mathscr{A}$ 中的**算符** (**即变换**) $\boldsymbol{A}$ 是一个对应关系，它对于 ($\mathscr{A}$ 的子集) $\mathscr{D}_{\boldsymbol{A}}$ 中的每一个元素 (矢量) $\boldsymbol{x}$，指定另一个 (也属于 $\mathscr{A}$ 的) 元素 (矢量) $\boldsymbol{y}$. 后者称为算符 $\boldsymbol{A}$ 作用于矢量 $\boldsymbol{x}$ 而得到的像，记为 $\boldsymbol{Ax}$. $\mathscr{D}_{\boldsymbol{A}}$ 是算符 $\boldsymbol{A}$ 的定义域，可以就是线性空间 $\mathscr{A}$ 本身. 相应地，全体像矢量的集合 $\mathscr{R}_{\boldsymbol{A}}$，称为 $\boldsymbol{A}$ 的值域.

如果 $\mathscr{D}_{\boldsymbol{A}}=\mathscr{D}_{\boldsymbol{B}}$，且对于此共同定义域中的所有 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{Bx}$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

设有 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ (其定义域分别为 $\mathscr{D}_{\boldsymbol{A}}$ 和 $\mathscr{D}_{\boldsymbol{B}}$)，通过算符的初等运算可导出新的算符如下：

(1) $\boldsymbol{C}=\alpha\boldsymbol{A}:\boldsymbol{Cx}=\alpha(\boldsymbol{Ax})$，其中 α 是给定的复数. C 的定义域与 $\boldsymbol{A}$ 相同.

(2) $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}:\boldsymbol{Dx}=\boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{Bx}$. 显然 $\mathscr{D}_{\boldsymbol{D}}=\mathscr{D}_{\boldsymbol{A}}\bigcap\mathscr{D}_{\boldsymbol{B}}$. 注意 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$.

(3) $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{AB}:\boldsymbol{Ex}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Bx})$，其定义域为 $\mathscr{D}_{\boldsymbol{E}}=\{\boldsymbol{x}|\boldsymbol{Bx}\in\mathscr{D}_{\boldsymbol{A}}\}$. 一般说来，$\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$. 如果 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，则称此二算符**对易**.

如果

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2)=\boldsymbol{Ax}_1+\boldsymbol{Ax}_2,\qquad \boldsymbol{A}(\alpha\boldsymbol{x})=\alpha(\boldsymbol{Ax}),\tag{4.1}$$

则 $\boldsymbol{A}$ 为**线性算符** (**线性变换**). 对于这种算符，一定有 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}$，而且 $\mathscr{D}_{\boldsymbol{A}}$ 和 $\mathscr{R}_{\boldsymbol{A}}$ 都是线性子空间.

4.1.2　有界算符与连续算符

如果对于 $\mathscr{D}_{\boldsymbol{A}}$ 中的所有 $\boldsymbol{x}$，存在常数 c，使得 $\|\boldsymbol{Ax}\|\leqslant c\|\boldsymbol{x}\|$，则称算符 $\boldsymbol{A}$ (在 $\mathscr{D}_{\boldsymbol{A}}$ 上) **有界**. 常数 c 并不唯一，重要的是它的最小值，称为 $\boldsymbol{A}$ 的**范数**，记为 $\|\boldsymbol{A}\|$.

$$\|\boldsymbol{A}\|=\sup_{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}}\frac{\|\boldsymbol{Ax}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}.\tag{4.2}$$

即使 $\boldsymbol{A}$ 是有界的，也可以不存在非零元素 $\boldsymbol{x}$，使得 $\|\boldsymbol{Ax}\|=\|\boldsymbol{A}\|\,\|\boldsymbol{x}\|$；但总可以使得 $\|\boldsymbol{Ax}\|$ 接近 $\|\boldsymbol{Ax}\|$，想多接近就能多接近.

设 $\{x_n\}$ 是 $\mathscr{D}_{\boldsymbol{A}}$ 中的序列，以 $\boldsymbol{x}\in\mathscr{D}_{\boldsymbol{A}}$ 为极限. 若 $\boldsymbol{Ax}_n\to\boldsymbol{Ax}$，则称算符 $\boldsymbol{A}$ 在 $\boldsymbol{x}$ **连续**. 如果 $\boldsymbol{A}$ 在 $\mathscr{D}_{\boldsymbol{A}}$ 中的每一点都连续，则称 $\boldsymbol{A}$ 在 $\mathscr{D}_{\boldsymbol{A}}$ 上连续. 在以下的叙述中，如果 $\mathscr{D}_{\boldsymbol{A}}$ 固定，则常略去定义域不说，而只简称为连续算符.

定理 4.1　如果 $\boldsymbol{A}$ 在 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 处连续，则在 $\mathscr{D}_{\boldsymbol{A}}$ 中的所有点均连续.

定理 4.2 $\boldsymbol{A}$ 在 $\mathscr{D}_{\boldsymbol{A}}$ 上连续，当且仅当该算符有界.

Euclid 空间 $\mathscr{E}_n$ 中的所有线性算符均有界，因而全都连续. 证明从略.

在平方可积的函数空间 $\mathscr{L}_2$ 中，可以出现无界算符，见后面的例 4.3.

4.1.3 $\mathscr{L}_2$ 上线性算符举例

例 4.1 (1) 零算符 $\mathbf{0}$: 对于任意 $\boldsymbol{x}$，$\mathbf{0}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$. 这个算符显然是有界的: $\|\mathbf{0}\|=0$.

(2) 恒等算符 $\boldsymbol{I}$: 对于任意 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{I}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$. 该算符有界: $\|\boldsymbol{I}\|=1$.

例 4.2 在 $\mathscr{L}_2(0,1)$ 上，考虑算符 $\boldsymbol{A}$: $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=t\,x(t)$. 此算符对于 $\mathscr{L}_2(0,1)$ 上的所有元素均有定义，且为线性算符. 因为

$$\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|^2=\int_0^1 t^2\,|x(t)|^2\,\mathrm{d}t\leqslant\int_0^1|x(t)|^2\,\mathrm{d}t=\|\boldsymbol{x}\|^2,$$

所以 $\|\boldsymbol{A}\|\leqslant 1$，即 $\boldsymbol{A}$ 有界.

例 4.3 在 $\mathscr{L}_2(0,1)$ 上，考虑由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=f_0(t)x(t)$ 所定义的算符，其中 $f_0(t)$ 是给定的函数 (不一定在 $\mathscr{L}_2(0,1)$ 中).

(1) 如果 $f_0(t)$ 在 $0\leqslant t\leqslant 1$ 上连续，则 $\boldsymbol{A}$ 是整个 $\mathscr{L}_2(0,1)$ 上的有界线性算符. 能够证明

$$\|\boldsymbol{A}\|=\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|f_0(t)|.$$

(2) 如果 $f_0(t)$ 在区间 $0\leqslant t\leqslant 1$ 上某点为无穷，则 $\boldsymbol{A}$ 是无界线性算符，其定义域将不会是整个 $\mathscr{L}_2$. 例如，$f_0(t)=1/t$，则只当 $x(t)$ 在 $t=0$ 足够快地为 0 时 $f_0(t)x(t)$ 才属于 $\mathscr{L}_2$. 为了证明 $\boldsymbol{A}$ 无界，可考虑 $\mathscr{D}_{\boldsymbol{A}}$ 中的函数

$$x(t)=\begin{cases}0, & 0\leqslant t<\varepsilon,\\ 1, & \varepsilon\leqslant t\leqslant 1.\end{cases}$$

对于这个特殊的 $x(t)$，我们有

$$\|\boldsymbol{x}\|^2=1-\varepsilon,\qquad \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|^2=\int_\varepsilon^1\frac{\mathrm{d}t}{t^2}=-1+\frac{1}{\varepsilon}.$$

ε 足够小，则比值 $\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|/\|\boldsymbol{x}\|=1/\varepsilon$ 可以任意大，所以 $\boldsymbol{A}$ 无界.

例 4.4 在 $\mathscr{L}_2^{(c)}(0,1)$ 上考虑微分算符 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathrm{d}x(t)/\mathrm{d}t$. 这个算符不能对于 $\mathscr{L}_2$ 中的所有函数有定义. 属于 $\mathscr{D}_{\boldsymbol{A}}$ 的 $x(t)$ 必须具有两个性质:

(1) $x(t)$ 在一定意义下可微[①];

(2) $x(t)$ 的导数属于 $\mathscr{L}_2^{(c)}(0,1)$.

---

① 准确地说，$x(t)$ 应当是它的导数的不定积分. 这类函数称为绝对连续函数，它包括仅仅分段可微的连续函数.

考虑定义在 $\mathscr{D}_{\boldsymbol{A}}$ 上的算符 $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$. 这个算符是线性的，其值域 $\mathscr{R}_{\boldsymbol{A}}$ 是整个 $\mathscr{L}_2^{(c)}(0,1)$. 当然，此算符不连续. 序列 $x_n(t)=\sqrt{2}\sin n\pi t$ 中每一个函数的范数都是 1，但是 $\|\mathrm{d}x_n(t)/\mathrm{d}t\|=n\pi$，所以微分算符是显然无界的.

4.1.4 线性算符的逆

如果由像矢量能反过来确定原来的矢量，则称算符 $\boldsymbol{A}$ 是一对一的.

完全等价地，当且仅当由 $\boldsymbol{Af}=\boldsymbol{Ag}$ 就能导出 $\boldsymbol{f}=\boldsymbol{g}$ 时，则称算符 $\boldsymbol{A}$ 是一对一的.

如果算符 $\boldsymbol{A}$ 是一对一的，其定义域为 $\mathscr{D}_{\boldsymbol{A}}$，值域为 $\mathscr{R}_{\boldsymbol{A}}$，则可定义**逆算符** $\boldsymbol{A}^{-1}$ 如下：

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{f}=\boldsymbol{g},\qquad \text{当且仅当 } \boldsymbol{Ag}=\boldsymbol{f}.$$

因为对于 $\boldsymbol{f}\in\mathscr{R}_{\boldsymbol{A}}$，上式有一个并且只有一个解，故此定义有意义，且 $\mathscr{D}_{\boldsymbol{A}^{-1}}=\mathscr{R}_{\boldsymbol{A}}$，$\mathscr{R}_{\boldsymbol{A}^{-1}}=\mathscr{D}_{\boldsymbol{A}}$. 一对一算符的逆算符一定存在，即一对一算符是可逆的.

定理 4.3 当且仅当 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 只有零解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，线性算符 $\boldsymbol{A}$ 是一对一的 (即存在逆算符 $\boldsymbol{A}^{-1}$).

证 (1) 设 $\boldsymbol{A}$ 是一对一的. 对于任何线性算符，$\boldsymbol{A0}=\boldsymbol{0}$，因此 $\boldsymbol{0}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解. 因为$\boldsymbol{A}$ 是一对一的，这就是唯一解.

(2) 若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 只有 $\boldsymbol{0}$ 解. 令 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{f}$ 有解 $\boldsymbol{x}_1$ 与 $\boldsymbol{x}_2$，即 $\boldsymbol{Ax}_1=\boldsymbol{Ax}_2$，则元素 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2$ 处在 $\boldsymbol{A}$ 的定义域中 (因为此定义域为线性子空间)，$\boldsymbol{A}$ 的线性性质意味着 $\boldsymbol{Ay}=\boldsymbol{Ax}_1-\boldsymbol{Ax}_2=\boldsymbol{f}-\boldsymbol{f}=\boldsymbol{0}$，所以 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{x}_2$. □

容易看出算符 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 是线性算符，$\mathscr{D}_{\boldsymbol{A}^{-1}}=\mathscr{R}_{\boldsymbol{A}}$, $\mathscr{R}_{\boldsymbol{A}^{-1}}=\mathscr{D}_{\boldsymbol{A}}$.

4.1.5 正则线性算符

定义 4.1 满足下列条件的线性算符 $\boldsymbol{A}$ 称为**正则线性算符**:

(1) $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 只有 $\boldsymbol{0}$ 解;

(2) $\mathscr{R}_{\boldsymbol{A}}=\mathscr{A}$;

(3) $\boldsymbol{A}^{-1}$ 有界.

否则，称算符 $\boldsymbol{A}$ 是**奇异**的.

第一个条件保证 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{f}$ 最多有一个解. 第二个条件告诉我们，对于 $\mathscr{A}$ 中的每个 f，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{f}$ 至少有一个解. 和第一个条件结合起来，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{f}$ 就有一个并且只有一个解，因此 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 存在. 第三个条件保证如果 $\boldsymbol{f}_1$ 与 $\boldsymbol{f}_2$ 接近，比如说 $|\boldsymbol{f}_1-\boldsymbol{f}_2|<\varepsilon$，则相应的 $\boldsymbol{x}_1$ 与 $\boldsymbol{x}_2$ 也接近，即 $|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2|<\varepsilon\left\|\boldsymbol{A}^{-1}\right\|$.

4.1.6 闭算符

定义 4.2 令 $\boldsymbol{A}$ 是定义在子空间 $\mathscr{D}_{\boldsymbol{A}}$ 上的线性算符，如果只要 $\{\boldsymbol{x}_n\}$ 在 $\mathscr{D}_{\boldsymbol{A}}$ 内，$\boldsymbol{x}_n\to\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{Ax}_n\to\boldsymbol{f}$，就能推出 $\boldsymbol{x}\in\mathscr{D}_{\boldsymbol{A}}$，且 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{f}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为**闭算符**.

闭算符具有下列性质：

(1) 如果 $\boldsymbol{A}$ 是闭的，且 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 存在，则 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 是闭的；

(2) 如果 $\boldsymbol{A}$ 是闭的，且 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 有界，则 $\mathscr{R}_{\boldsymbol{A}}$ 是闭集；

(3) 在闭域上的闭算符有界.

所以，闭算符一定属于下列几种互不相容的类型之一：

(1) $\boldsymbol{A}$ 是正则的；

(2) $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解 ($\boldsymbol{A}^{-1}$ 不存在)；

(3) $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 只有零解，$\boldsymbol{A}^{-1}$ 无界，且 $\mathscr{R}_{\boldsymbol{A}}\neq\mathscr{A}$, $\overline{\mathscr{R}}_{\boldsymbol{A}}=\mathscr{A}$；

(4) $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 只有零解，且 $\overline{\mathscr{R}}_{\boldsymbol{A}}\neq\mathscr{A}$ ($\boldsymbol{A}^{-1}$ 或有界，或无界).

§4.2 $\mathscr{U}_n$ 中的线性算符

4.2.1 线性算符及其表示矩阵

令 $\boldsymbol{A}$ 是由 $\mathscr{U}_n\to\mathscr{U}_n$ 的线性算符，$B:\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n\}$ 是固定的一组基，则 $\boldsymbol{Ax}=\sum\limits_{i=1}^n\xi_i\boldsymbol{Ae}_i$，即 $\boldsymbol{A}$ 完全由 n 矢量 $\boldsymbol{Ae}_1,\boldsymbol{Ae}_2,\cdots,\boldsymbol{Ae}_n$ 所描述. 而这 n 个矢量又能写成

$$\boldsymbol{Ae}_j=\sum_{i=1}^n a_{ij}\boldsymbol{e}_i,\qquad j=1,2,\cdots,n. \tag{4.3}$$

因此，就能由原来矢量 $\boldsymbol{x}=\sum\limits_{i=1}^n\xi_i\boldsymbol{e}_i$ 的坐标计算出像矢量的坐标，即

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}&=\sum_{i=1}^n\eta_i\boldsymbol{e}_i=\boldsymbol{A}\left(\sum_{j=1}^n\xi_j\boldsymbol{e}_j\right)=\sum_{j=1}^n\xi_j\boldsymbol{Ae}_j\\&=\sum_{j=1}^n\xi_j\left(\sum_{i=1}^n a_{ij}\boldsymbol{e}_i\right)=\sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}\xi_j\right)\boldsymbol{e}_i,\end{aligned}$$

亦即

$$\eta_i=\sum_{j=1}^n a_{ij}\xi_j. \tag{4.4}$$

作为上式中的系数出现的 n^2 个复数就完全描述了 $\boldsymbol{A}$ 的作用. 这些数组成的方阵

$$\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}$$

就是 $\boldsymbol{A}$ 在基 B 下的矩阵，记为 $(\boldsymbol{A})_B$ 或 (a_{ij}).

算符及其表示矩阵之间的关系可以叙述为：相对于给定的基 B，每一个线性算符 $\boldsymbol{A}$ 决定了唯一的矩阵 (a_{ij})；反之，每个矩阵就 (通过 (4.3) 式而) 定义了 (唯一的) 一个线性算符.

一旦取定一组基 $B:\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n\}$，则矢量 $\boldsymbol{x}=\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i\boldsymbol{e}_i$，方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 就变为齐次方程组 $\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}\xi_j=0,\ i=1,2,\cdots,n$. 由线性代数知，当且仅当 $(\boldsymbol{A})_B$ 的行列式为零时，齐次方程组有非零解. 这样我们就能有下面的说法：**如果在某一组基中** $\det(\boldsymbol{A})_B=0$，**则在任何基中均为** 0，$\boldsymbol{A}$ **是奇异的；如果在某一组基中** $\det(\boldsymbol{A})_B\neq 0$，**则在任何基中均不为** 0，$\boldsymbol{A}$ **是正则的**. 能够证明，对于 $\boldsymbol{A}$ 在任何基的表示矩阵，其行列式均有相同的数值，因此我们可以略去 $\det(\boldsymbol{A})_B$ 中的下标，而将其写成 $\det\boldsymbol{A}$.

4.2.2 伴算符与自伴算符

设 $\boldsymbol{A}$ 是 $\mathscr{U}_n$ 上的线性算符，$\boldsymbol{f}$ 是固定的矢量，则 $\langle\boldsymbol{f},\boldsymbol{Ax}\rangle$ 是线性泛函，它像 $\mathscr{U}_n$ 上所有线性泛函一样，一定是连续的. Riesz 表示定理[①]告诉我们，$\langle\boldsymbol{f},\boldsymbol{Ax}\rangle$ 一定是 $\boldsymbol{x}$ 与某个矢量 $\boldsymbol{g}$ 的内积，即

$$\langle\boldsymbol{f},\boldsymbol{Ax}\rangle=\langle\boldsymbol{g},\boldsymbol{x}\rangle,\qquad\forall\boldsymbol{x}\in\mathscr{U}_n\ .$$

显然 $\boldsymbol{g}$ 依赖于 $\boldsymbol{f}$，我们能写成 $\boldsymbol{g}=\boldsymbol{A}^\dagger\boldsymbol{f}$. 不难看出，$\boldsymbol{A}^\dagger$ 是线性算符 (因而有界)，能由 $\boldsymbol{A}$ 确定. $\boldsymbol{A}^\dagger$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的**伴算符**，对于 $\mathscr{U}_n$ 上的一对矢量 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$，有

$$\langle\boldsymbol{y},\boldsymbol{Ax}\rangle=\langle\boldsymbol{A}^\dagger\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}\rangle.\tag{4.5}$$

注意，$(\alpha\boldsymbol{A})^\dagger=\alpha^*\boldsymbol{A}^\dagger$, $(\boldsymbol{A}^\dagger)^\dagger=\boldsymbol{A}$.

令 (a_{ij}) 和 $(a_{ij}^\dagger)$ 分别是 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}^\dagger$ 相对于正交归一基 $B:\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n\}$ 的矩阵，$a_{ij}=\langle\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{Ae}_j\rangle$, $a_{ij}^\dagger=\langle\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{A}^\dagger\boldsymbol{e}_j\rangle$，则

$$a_{ij}=\langle\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{Ae}_j\rangle=\langle\boldsymbol{A}^\dagger\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j\rangle=\langle\boldsymbol{e}_j,\boldsymbol{A}^\dagger\boldsymbol{e}_i\rangle^*=\left(a_{ji}^\dagger\right)^*,$$

即相对于正交归一基，伴算符 $\boldsymbol{A}^\dagger$ 的表示矩阵 $(\boldsymbol{A}^\dagger)_B$ 称为算符 $\boldsymbol{A}$ 的表示矩阵 $(\boldsymbol{A})_B$ 的**伴矩阵**，可以由后者通过转置加 (复) 共轭而得到：

$$a_{ij}^\dagger=a_{ji}^*.\tag{4.6}$$

如果 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^\dagger$，则称算符 $\boldsymbol{A}$ 是**自伴的**. 相对于正交归一基，自伴算符的矩阵满足关系式

$$a_{ij}=a_{ji}^*.\tag{4.7}$$

① Riesz 表示定理是 Hilbert 空间的基本定理之一，它告诉我们，Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上的有界线性泛函是相对于 $\mathscr{H}$ 内某个固定矢量的内积：对应于定义在整个 $\mathscr{H}$ 上的每个线性泛函 T，存在一个确定无疑的矢量 ϕ，使得 $T(f)=\langle\phi,f\rangle$, $\forall f\in\mathscr{H}$.

满足 (4.7) 式的矩阵称为 **Hermite 矩阵**，自伴算符因而也称为 **Hermite 算符**. 对于 $\mathscr{L}_2$ 中的无界算符，Hermite 与自伴两个概念有重要的区别，但对 $\mathscr{U}_n$ 上的算符而言，这两者并无任何差别.

4.2.3 本征值和本征矢量

现在进一步研究本征值问题

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \qquad \text{或者等价地} \qquad (\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}. \tag{4.8}$$

按照定义，矢量 $\boldsymbol{0}$ 不能是本征矢量，但 $\lambda = 0$ 可以是本征值，如果 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 有非零解的话 (因此线性算符 $\boldsymbol{A}$ 是奇异的).

本征矢量是和本征值相联系的，满足 (4.8) 式的一个本征矢量一定准确地对应于一个 λ 值；但对应一个本征值，(4.8) 式可以有不只一个非零解. 显然，如果 $\boldsymbol{x}$ 是与特定值 λ 相对应的本征矢量，则 $c\boldsymbol{x}$ 也是对应于同一个本征值的本征矢量；如果 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 是对应于 λ 的本征矢量，则 $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ 也是对应于 λ 的本征矢量. 因此，对应于特定的 λ 值，本征矢量的集合是一个线性子空间. 这个线性子空间称为对应于 λ 的**本征子空间**. 本征子空间的维数称为 λ 的**几何重数**.

为了计算 $\boldsymbol{A}$ 的本征矢量和本征值，可以任意选定一组基 $B : \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$. 矢量 $\boldsymbol{x}$ 就表示成 $\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i \boldsymbol{e}_i$，方程 (4.8) 则变为齐次线性方程组

$$\begin{aligned}
&(a_{11} - \lambda)\xi_1 + a_{12}\xi_2 + \cdots + a_{1n}\xi_n = 0, \\
&a_{21}\xi_1 + (a_{21} - \lambda)\xi_2 + \cdots + a_{2n}\xi_n = 0, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&a_{n1}\xi_1 + a_{n2}\xi_2 + \cdots + (a_{nn} - \lambda)\xi_n = 0,
\end{aligned} \tag{4.9}$$

这里的 (a_{ij}) 是 $\boldsymbol{A}$ 在基 B 之下的矩阵. 方程组 (4.9) 有非零解的充分必要条件是其系数行列式为 0，即

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{4.10}$$

方程 (4.10) 是久期方程，出现在方程里的行列式是 λ 的 n 次多项式 (称为本征多项式). 久期方程有 n 个根[①] (可以有重根，根的重数称为**代数重数**)，记为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$. 方程 (4.10) 能写成

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n) = 0. \tag{4.11}$$

① 这个结论对 $\mathscr{E}_n$上的 $\boldsymbol{A}$ 并不成立，因为实系数多项式可能没有实根.

把这些根 (即本征值) 代回方程组 (4.9) 中，对于代数重数为 k 的根 λ_i，方程组 (4.9) 的非零解就是对应于该本征值的本征矢量. 这样的非零解一定存在 (换言之，方程组 (4.9) 至少有一组非零解)，但独立的非零解的组数 (即对应于该本征值的本征矢量的个数) 不会超过 k (换言之，本征值的代数重数一定大于或等于几何重数).

例 4.5 求 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}4 & -1 & 2\\ 5 & -1 & 3\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix}$ 的本征值和本征矢量.

解 本征值 λ 和本征矢量 $\boldsymbol{x}$ 满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$，即

$$\begin{bmatrix}4-\lambda & -1 & 2\\ 5 & -1-\lambda & 3\\ -1 & 0 & -\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{bmatrix}=\boldsymbol{0}.$$

此方程组有非零解的充分必要条件是

$$\begin{vmatrix}4-\lambda & -1 & 2\\ 5 & -1-\lambda & 3\\ -1 & 0 & -\lambda\end{vmatrix}=0,$$

展开即得

$$(\lambda-1)^3=0.$$

由此求得本征值 $\lambda=1$，它是本征多项式的三重根，或者说，此本征值的代数重数为 3. 但相应的 (归一化) 本征矢量只有一个:

$$\boldsymbol{x}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\ 1\\ -1\end{bmatrix},$$

即本征值的几何重数为 1.

在本例题中，本征值的代数重数与几何重数并不相等.

当 (4.11) 式的全部 n 个根都不相等时 (因此每个本征值的几何重数均为 1)，情况又变得简单: 若 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n$ 是分别对应于不同本征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 的本征矢量，则 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n$ 是独立的. 这可以用数学归纳法证明. $k=1$ 时结论显然正确; 剩下的就是假设对 $k-1$ 个本征矢量正确，然后证明 k 个本征矢量也正确. 将算符作用于方程 $\alpha_1\boldsymbol{x}_1+\alpha_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+\alpha_k\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{0}$ 上，就得到

$$\alpha_1\lambda_1\boldsymbol{x}_1+\alpha_2\lambda_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+\alpha_k\lambda_k\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{0}$$

或

$$\alpha_1(\lambda_1-\lambda_k)\boldsymbol{x}_1+\alpha_2(\lambda_2-\lambda_k)\boldsymbol{x}_2+\cdots+\alpha_{k-1}(\lambda_{k-1}-\lambda_k)\boldsymbol{x}_{k-1}=\mathbf{0}.$$

因为按照假设，$k-1$ 个矢量 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_{k-1}$ 独立，又 $\lambda_j-\lambda_k\neq 0,\ j=1,2,\cdots,k-1$，因此只能有 $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_{k-1}=0$. 由此更进一步导出 $\alpha_k=0$，所以矢量 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_k$ 是独立的.

这样，设 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个不同的本征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，相应的本征矢量是 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n$，根据上面的定理，这些本征矢量是独立的，因此构成基.

4.2.4 Hermite 算符

其本征矢量能选作为基的另一类算符是 Hermite 算符.

令 $\boldsymbol{A}$ 是 Hermite 算符，则下列性质成立：

(1) 对于 $\mathscr{U}_n$ 中的每个 $\boldsymbol{x}$，$\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\rangle$ 为实数；

(2) 本征值为实数；

(3) 对应不同本征值的本征矢量正交；

(4) 本征矢量构成基.

从 §2.3 的分析可知，任何算符总至少有一个本征值，比如说 λ_1. 令相应的本征子空间为 $\mathscr{M}_1$，n_1 维. 若 $\boldsymbol{x}\in\mathscr{M}_1$，则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda_1\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{A}$ 对 $\mathscr{M}_1$ 中任何矢量的作用完全确定. $\mathscr{U}_n$ 中的每一个矢量都能分解为 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{x}\in\mathscr{M}_1$, $\boldsymbol{y}\in(\mathscr{M}_1)^\perp$. 考虑 $\boldsymbol{A}$ 对 $\boldsymbol{y}$ 的作用. $\boldsymbol{A}$ 为 Hermite 算符意味着 $\langle\boldsymbol{A}\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}\rangle=\langle\boldsymbol{y},\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\rangle=\lambda_1\langle\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}\rangle=0$. 这说明，对于 Hermite 算符，若 $\boldsymbol{y}\in(\mathscr{M}_1)^\perp$，则一定有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}\in(\mathscr{M}_1)^\perp$. 因此现在我们就能把 $\boldsymbol{A}$ 看成作用在 $n-n_1$ 维空间 $(\mathscr{M}_1)^\perp$ 上的算符. 这个算符因此至少有一个本征值，比如说 λ_2，相应的本征子空间为 $\mathscr{M}_2$，n_2 维. 注意 $\mathscr{M}_2$ 是 $(\mathscr{M}_1)^\perp$ 的一部分，所以 $\mathscr{M}_2$ 与 $\mathscr{M}_1$ 正交. 现在考虑与 $\mathscr{M}_2$ 及 $\mathscr{M}_1$ 均垂直的矢量的集合. 这个集合能记为 $(\mathscr{M}_1+\mathscr{M}_2)^\perp$. 如果 $\boldsymbol{z}\in(\mathscr{M}_1+\mathscr{M}_2)^\perp$，则又有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{z}\in(\mathscr{M}_1+\mathscr{M}_2)^\perp$. 因此我们又能将算符 $\boldsymbol{A}$ 看成作用在 $n-n_1-n_2$ 维空间 $(\mathscr{M}_1+\mathscr{M}_2)^\perp$ 上的算符，它至少有一个本征值，λ_3，具有本征子空间 $\mathscr{M}_3$，n_3 维. 本征子空间 $\mathscr{M}_3$ 是 $(\mathscr{M}_1+\mathscr{M}_2)^\perp$ 的一部分. 如此继续，直到 $(\mathscr{M}_1+\mathscr{M}_2+\cdots+\mathscr{M}_k)^\perp$ 为空集. 我们因此就能构造出 $\boldsymbol{A}$ 的 k 个本征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$，各自的几何重数为 $n_1,n_2,\cdots,n_k$. 因为只有到 $(\mathscr{M}_1+\mathscr{M}_2+\cdots+\mathscr{M}_k)^\perp$ 为空集时这个过程才会终止，所以 $n_1+n_2+\cdots+n_k=n$.

上面的结果能总结为：

定理 4.4 令 $\boldsymbol{A}$ 为 Hermite 算符，则存在 k 个 $(1\leqslant k\leqslant n)$ 不相等的实数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$ 以及 k 个本征子空间 $\mathscr{M}_1,\mathscr{M}_2,\cdots,\mathscr{M}_k$，它们具有下列性质：

(1) 若 $\boldsymbol{x}\in\mathscr{M}_j$，则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda_j\boldsymbol{x}$，即每个 λ_j 都是 $\boldsymbol{A}$ 的本征值，相应的本征子空间为 $\mathscr{M}_j$.

(2) 本征子空间两两正交，即若 $\boldsymbol{x}\in\mathscr{M}_i$, $\boldsymbol{y}\in\mathscr{M}_j$, $i\neq j$，则 $\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle=0$.

(3) $\mathscr{U}_n$ 中的每个矢量 $\boldsymbol{x}$ 都能用一种方法并且只有一种方法分解为 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \boldsymbol{x}_k$，其中 $\boldsymbol{x}_i \in \mathscr{M}_i$. 若 n_i 是 $\mathscr{M}_i$ 的维数，则 $\sum\limits_{i=1}^{k} n_i = n$.

(4) 本征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ 和相应的本征子空间 $\mathscr{M}_1, \mathscr{M}_2, \cdots + \mathscr{M}_k$ 由 $\boldsymbol{A}$ 唯一确定 (次序除外).

§4.3 Hilbert 空间中的线性算符

尽管 Hilbert 空间的定义中并不排斥有限维空间，例如上一节讨论的 n 维酉空间 $\mathscr{U}_n$，但是，或许值得更关心无穷维 Hilbert 空间，特别是因为这时会出现无界算符. 其后果之一就是，自伴算符一定是 Hermite 的，但 Hermite 算符不一定自伴.

4.3.1 伴算符

先讨论定义在整个 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上的有界线性算符 $\boldsymbol{A}$. 考虑 $\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \rangle$，其中 $\boldsymbol{y}$ 是 $\mathscr{H}$ 中固定的元素，$\boldsymbol{x}$ 可以取遍 $\mathscr{H}$ 中的所有值. 显然 $\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \rangle$ 是关于 $\boldsymbol{x}$ 的有界线性泛函. 按照 Riesz 表示定理，存在一个完全确定的元素 $\boldsymbol{g}$，使得

$$\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \rangle = \langle \boldsymbol{g}, \boldsymbol{x} \rangle, \qquad \forall \boldsymbol{x} \in \mathscr{H}. \tag{4.12}$$

元素 $\boldsymbol{g}$ 依赖于 $\boldsymbol{y}$ 的选取. 我们写成 $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{A}^\dagger \boldsymbol{y}$，其中 $\boldsymbol{A}^\dagger$ 是定义在整个 $\mathscr{H}$ 上的线性算符. 算符 $\boldsymbol{A}^\dagger$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的**伴算符**，$\boldsymbol{A}^\dagger$ 有界，且 $\|\boldsymbol{A}^\dagger\| = \|\boldsymbol{A}\|$. 如果 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 是 $\mathscr{H}$ 中的任意两个矢量，我们有

$$\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \rangle = \langle \boldsymbol{A}^\dagger \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle. \tag{4.13}$$

如果 $\boldsymbol{A}$ 是定义在线性子空间 $\mathscr{D}_{\boldsymbol{A}}$ 上的无界线性算符，$\mathscr{D}_{\boldsymbol{A}}$在 $\mathscr{H}$ 中稠密[①]. 令 $\boldsymbol{y}$ 是 $\mathscr{H}$ 中固定的元素，考虑 $\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \rangle$，其中 $\boldsymbol{x}$ 取遍整个 $\mathscr{D}_{\boldsymbol{A}}$. 对于 $\mathscr{D}_{\boldsymbol{A}}$ 中的 $\boldsymbol{x}$ 来说，$\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \rangle$ 也还是线性泛函 (可能无界). 对于某些 $\boldsymbol{y}$，也还能写出

$$\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \rangle = \langle \boldsymbol{g}, \boldsymbol{x} \rangle, \qquad \forall \boldsymbol{x} \in \mathscr{D}_{\boldsymbol{A}}. \tag{4.14}$$

使 (4.14) 式对于 $\mathscr{D}_{\boldsymbol{A}}$ 中的所有 $\boldsymbol{x}$ 均成立的元素对 $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{g})$ 称为**容许对**. 显然 $\boldsymbol{g}$ 依赖于 $\boldsymbol{y}$. 为了描述 $\boldsymbol{g}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 之间的联系，我们首先可以确认，如果 (4.14) 式对两个不同的元素 $\boldsymbol{g}_1$ 和 $\boldsymbol{g}_2$ 均成立，则对于 $\mathscr{D}_{\boldsymbol{A}}$ 中的所有 $\boldsymbol{x}$，都应有 $\langle \boldsymbol{g}_1 - \boldsymbol{g}_2, \boldsymbol{x} \rangle = 0$. 因为 $\mathscr{D}_{\boldsymbol{A}}$ 在 $\mathscr{H}$ 中稠密，所以能够断定 $\boldsymbol{g}_1 - \boldsymbol{g}_2 = \boldsymbol{0}$. 因此，对于给定的 $\boldsymbol{y}$，最多只能有一个 $\boldsymbol{g}$ 使 (4.14) 式成立. 现在考虑使 (4.14) 式成立的所有矢量 $\boldsymbol{y}$ 的集合，则存在

---

① 即 $\mathscr{D}_{\boldsymbol{A}}$ 的闭包 $\overline{\mathscr{D}}_{\boldsymbol{A}} = \mathscr{H}$.

相应的矢量 g 的集合，这两个集合之间的对应关系，能表示为 $g = A^\dagger y$，其中 $A^\dagger$ 是 A 的伴算符. $A^\dagger$ 有完全确定的定义域 $\mathscr{D}_{A^\dagger}$，它至少含有 $\mathbf{0}$ 矢量，因为

$$\langle \mathbf{0}, Ax\rangle = 0 = \langle \mathbf{0}, x\rangle, \qquad \forall x \in \mathscr{D}_A.$$

和 (4.14) 式相比较，我们看到 $(\mathbf{0},\mathbf{0})$ 是一个容许对. 因此 $\mathbf{0} \in \mathscr{D}_{A^\dagger}$，$A^\dagger\mathbf{0} = \mathbf{0}$. 如果 $x \in \mathscr{D}_A$，$y \in \mathscr{D}_{A^\dagger}$，则有

$$\langle y, Ax\rangle = \langle A^\dagger y, x\rangle. \tag{4.15}$$

容易看出 $A^\dagger$ 是线性的.

下面列出伴算符的一些有用的性质：

(1) 若 $\mathscr{D}_A$ 在 $\mathscr{H}$ 中稠密，则 $A^\dagger$ 存在；

(2) $A^\dagger$ 是线性算符；

(3) $A^\dagger$ 是闭的，不管 A 是否是闭的；

(4) $B \supset A$ 意味着 $A^\dagger \supset B^\dagger$；

(5) 若 A 有界，且定义在整个 $\mathscr{H}$ 上，则 $A^\dagger$ 有界，也定义在整个 $\mathscr{H}$ 上；

(6) 若 $A^{\dagger\dagger} \equiv (A^\dagger)^\dagger$ 存在 (即 $\mathscr{D}_{A^\dagger}$ 在 $\mathscr{H}$ 中稠密)，则 $A \supset A^{\dagger\dagger}$；

(7) 若 A 是闭的，$\mathscr{D}_A$ 在 $\mathscr{H}$ 中稠密，则 $\mathscr{D}_{A^\dagger}$ 在 $\mathscr{H}$ 中稠密，因此 $A^{\dagger\dagger}$ 存在，且 $A = A^{\dagger\dagger}$.

4.3.2 自伴算符与 Hermite 算符

定义 4.3 若 $A = A^\dagger$，则称此算符**自伴**. 其充分必要条件是

(1) $\mathscr{D}_A = \mathscr{D}_{A^\dagger}$；

(2) 对于 $\mathscr{D}_A$ 中的任意 x，$Ax = A^\dagger x$.

定义 4.4 如果对于全在 $\mathscr{D}_A$ 中的任意一对元素 (x, y)，

$$\langle y, Ax\rangle = \langle Ay, x\rangle, \tag{4.16}$$

则 A 为 **Hermite 算符**.

如果 A 是 Hermite 的，则 (y, Ay) 是容许对，因此 $y \in \mathscr{D}_{A^\dagger}$，且 $A^\dagger y = Ay$. 这样，如果 A 是 Hermite 的，则 $A^\dagger \supset A$. 另一方面，如果 $A^\dagger \supset A$，则只要 x 和 y 均在 $\mathscr{D}_A$ 中，我们就有 $\langle y, Ax\rangle = \langle A^\dagger y, x\rangle = \langle Ay, x\rangle$，因此 A 是 Hermite 的. 所以，A 是 Hermite 算符的充分必要条件就是 $A^\dagger \supset A$. Hermite 算符是自伴算符的充分必要条件是 $\mathscr{D}_{A^\dagger} = \mathscr{D}_A$. 对于无界 Hermite 算符，常常遇到 $\mathscr{D}_{A^\dagger}$ 比 $\mathscr{D}_A$ 大，因而不是自伴算符.

若 Hermite 算符定义在整个 $\mathscr{H}$ 上，则 $\mathscr{D}_{A^\dagger} = \mathscr{D}_A = \mathscr{H}$，因此变换是自伴的.

下面的例子有助于弄清楚上面的讨论.

例 4.6 设 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=t\,x(t)$, $\mathscr{H}=\mathscr{L}_2^{(c)}(0,1)$. $\boldsymbol{A}$ 的定义域是整个 $\mathscr{H}$. 对于 $\mathscr{H}$ 中的任意两个元素 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$, 考虑 $\langle\boldsymbol{y},\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\rangle$, 则

$$\langle\boldsymbol{y},\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\rangle=\int_0^1\big[t\,x(t)\big]y^*(t)\mathrm{d}t=\int_0^1 x(t)\big[t\,y^*(t)\big]\mathrm{d}t=\langle\boldsymbol{A}^\dagger\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}\rangle,$$

其中 $\boldsymbol{A}^\dagger\boldsymbol{y}=t\,y(t)$. 因此 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^\dagger$, $\boldsymbol{A}$ 是自伴的.

例 4.7 设 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\int_0^t x(s)\mathrm{d}s$, $\mathscr{H}=\mathscr{L}_2^{(c)}(0,1)$. 算符 $\boldsymbol{A}$ 是有界的, 定义在整个 $\mathscr{H}$ 上. 令 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 是 $\mathscr{H}$ 的两个元素, 则

$$\begin{aligned}\langle\boldsymbol{y},\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\rangle&=\int_0^1\left[\int_0^t x(s)\mathrm{d}s\right]y^*(t)\mathrm{d}t=\int_0^1 x(s)\left[\int_s^1 y^*(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}s\\&=\int_0^1 x(s)\left[\int_s^1 y(t)\mathrm{d}t\right]^*\mathrm{d}s=\langle\boldsymbol{A}^\dagger\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}\rangle,\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{A}^\dagger\boldsymbol{y}=\int_s^1 y(t)\,\mathrm{d}t$. 显然 $\boldsymbol{A}$ 不是 Hermite 算符.

§4.4 非 Hermite 算符

例 4.8 设在空间 $\mathscr{L}_2^{(r)}(-1,1)$ 上定义有一阶微分算符 $\boldsymbol{K}=\sqrt{1-t^2}\,\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$, 其定义域中的元素 $\boldsymbol{x}=x(t)$ 满足

$$x(t)\ \text{绝对连续},\qquad x(t)\in\mathscr{L}_2^{(r)}(-1,1),\qquad x(1)\,\text{有界}.$$

因为

$$\int_{-1}^1 y(t)\sqrt{1-t^2}\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t=\sqrt{1-t^2}\,y(t)\,x(t)\Big|_{-1}^1-\int_{-1}^1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[\sqrt{1-t^2}\,y(t)\big]x(t)\,\mathrm{d}t,$$

所以, 根据

$$\langle\boldsymbol{y},\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}\rangle=\langle\boldsymbol{K}^\dagger\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}\rangle$$

的要求, 我们可以求得 $\boldsymbol{K}$ 的伴算符

$$\boldsymbol{K}^\dagger=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\sqrt{1-t^2}\big)=-\sqrt{1-t^2}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+\frac{t}{\sqrt{1-t^2}},$$

且其定义域由满足

$$y(t)\ \text{绝对连续},\qquad y(t)\in\mathscr{L}_2^{(r)}(-1,1),\qquad y(-1)\,\text{有界}$$

的函数 $y(t)$ 组成. 显然, $\boldsymbol{K}$ 或 $\boldsymbol{K}^\dagger$ 都不是 Hermite 算符.

再来讨论本征值问题 $\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$. 直接解微分方程

$$\sqrt{1-t^2}\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\lambda x$$

可以求得

$$x(t)=C\mathrm{e}^{\lambda\arcsin t}.$$

因为对于任何 λ 值，此函数皆有界，所以此本征值问题有解：本征值 λ 为任意实数值[①]，而上式中的 $x(t)$ 即为本征函数.

可以类似地讨论本征值问题 $\boldsymbol{K}^\dagger\boldsymbol{y}=\lambda\boldsymbol{y}$. 由于方程

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\sqrt{1-t^2}\,y\big)=\lambda y$$

的解为

$$y(t)=\frac{C}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{e}^{\lambda\arcsin t},$$

因此，无论 λ 取何值，$y(-1)$ 均无界. 这说明此本征值问题无解. 这个例子不外乎印证了下面的普遍结论：非 Hermite 算符的本征值，可能有解，也可能无解.

值得注意的是，从非 Hermite 算符 $\boldsymbol{K}$ 出发，可以定义出两个 Hermite 算符

$$\boldsymbol{K}_L=\boldsymbol{K}^\dagger\boldsymbol{K},\qquad \boldsymbol{K}_R=\boldsymbol{K}\boldsymbol{K}^\dagger. \tag{4.17}$$

$\boldsymbol{K}_L$ 和 $\boldsymbol{K}_R$ 分别称为 $\boldsymbol{K}$ 的左叠积和右叠积[②]. 而且，因为

$$\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{K}_L\,\boldsymbol{x}\rangle=\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{K}^\dagger\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}\rangle=\langle\boldsymbol{K}\boldsymbol{x},\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}\rangle=\|\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}\|^2,$$
$$\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{K}_R\,\boldsymbol{x}\rangle=\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{K}\boldsymbol{K}^\dagger\boldsymbol{x}\rangle=\langle\boldsymbol{K}^\dagger\boldsymbol{x},\boldsymbol{K}^\dagger\boldsymbol{x}\rangle=\big\|\boldsymbol{K}^\dagger\boldsymbol{x}\big\|^2,$$

所以 $\boldsymbol{K}_L$ 和 $\boldsymbol{K}_R$ 都是非负算子，因此一定有非负本征值.

现在证明 $\boldsymbol{K}_L$ 和 $\boldsymbol{K}_R$ 有相同的非零本征值，尽管它们的本征函数可以不同. 设 v 是 $\boldsymbol{K}_L$ 的本征函数，相应的本征值为正数 λ^2，即

$$\boldsymbol{K}_L\,v=\boldsymbol{K}^\dagger\boldsymbol{K}v=\lambda^2v, \tag{4.18}$$

则 $u=\boldsymbol{K}v$ 一定是 $\boldsymbol{K}_R$ 的本征函数 (条件是 $\boldsymbol{K}v\neq0$，即 $\lambda\neq0$)，对应于同一个非零本征值 λ^2，

$$\boldsymbol{K}_R\,u=\boldsymbol{K}_R\boldsymbol{K}v=\boldsymbol{K}\boldsymbol{K}^\dagger\boldsymbol{K}v=\boldsymbol{K}\boldsymbol{K}_L\,v=\lambda^2\boldsymbol{K}v=\lambda^2\,u.$$

类似地，如果 u 是 $\boldsymbol{K}_R$ 的本征函数，对应于本征值 λ^2，

$$\boldsymbol{K}_R\,u=\boldsymbol{K}\boldsymbol{K}^\dagger u=\lambda^2u, \tag{4.19}$$

① 若限制在空间 $\mathscr{L}_2^{(c)}(-1,1)$ 上，则本征值 λ 为任意复数.

② $\boldsymbol{K}_L$ 和 $\boldsymbol{K}_R$ 的定义域显然不同于 $\boldsymbol{K}$ 及 $\boldsymbol{K}^\dagger$，但原则上又应该可以由 $\boldsymbol{K}$ 及 $\boldsymbol{K}^\dagger$ 的定义域导出.

则 $v=\boldsymbol{K}^{\dagger}u$ 是 $\boldsymbol{K}_L$ 的本征函数 (条件是 $\boldsymbol{K}^{\dagger}u\neq 0$)，对应于非零本征值 λ^2. 这样就证明了 $\boldsymbol{K}_L$ 和 $\boldsymbol{K}_R$ 有相同的本征值，而且显然本征值的简并度也相同. 将 Hermite 算子 $\boldsymbol{K}_R$ 的非零本征值 (见 (4.19) 式) 记为 $\{\lambda_n^2\}$，由小到大排列，相应的正交归一本征函数为 $\{u_n\}$，则可定义

$$v_n=\frac{1}{\lambda_n}\boldsymbol{K}^{\dagger}u_n, \tag{4.20}$$

它们是 $\boldsymbol{K}_L$ 的正交归一本征函数，

$$\begin{aligned}\langle v_m,v_n\rangle &= \frac{1}{\lambda_m\lambda_n}\langle\boldsymbol{K}^{\dagger}u_m,\boldsymbol{K}^{\dagger}u_n\rangle=\frac{1}{\lambda_m\lambda_n}\langle u_m,\boldsymbol{K}\boldsymbol{K}^{\dagger}u_n\rangle\\ &= \frac{\lambda_n}{\lambda_m}\langle u_m,u_n\rangle=\delta_{mn}.\end{aligned}$$

由于 $\boldsymbol{K}_L$ 和 $\boldsymbol{K}_R$ 具有同样的非零本征值，且简并度也完全相同，因此 $\boldsymbol{K}_L$ 的本征函数 (对应于非零本征值) 就全都包括在 (4.20) 式中. 更准确地说，如果 $\boldsymbol{v}$ 是 $\boldsymbol{K}_L$ 的 (归一化) 本征函数，对应于非简并的非零本征值，则 $\boldsymbol{v}$ 一定就是 (4.20) 式；如果 $\boldsymbol{v}$ 是 $\boldsymbol{K}_L$ 的本征函数，对应于简并度为 k 的非零本征值，则 $\boldsymbol{v}$ 一定是 (4.20) 式中的 k 个正交归一本征函数 (对应于该本征值) 的线性组合.

反之，如果我们从 $\boldsymbol{K}_L$ 的 (对应于非零本征值的) 正交归一本征函数集 $\{v_n\}$ 出发，则集合

$$\left\{u_n\,\middle|\,u_n=\frac{1}{\lambda_n}\boldsymbol{K}v_n\right\} \tag{4.21}$$

是 $\boldsymbol{K}_R$ 的正交归一本征函数集，对应于 $\boldsymbol{K}_R$ 的全部非零本征值.

继续讨论例 4.8. 显然算符 $\boldsymbol{K}$ 的左叠积和右叠积分别是

$$\boldsymbol{K}_L=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\left(1-t^2\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right]$$

和

$$\boldsymbol{K}_R=-\sqrt{1-t^2}\,\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(\sqrt{1-t^2}\right)=-\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\left(1-t^2\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right]-\frac{1}{1-t^2}\right\}.$$

它们的定义域由满足边界条件 $x(\pm 1)$ 有界的函数组成[①]. 关于 $\boldsymbol{K}_L$ 的本征值问题，大家非常熟悉：它正是 Legendre 方程在上述有界条件下的本征值问题，其解为

本征值	$\lambda_n^2=n(n+1),$	$n=0,1,2,\cdots,$
本征函数 (未归一化)	$v_n(t)=\mathrm{P}_n(t).$	

① 准确说，$\boldsymbol{K}_R$ 的定义域应由满足

$$x(t)\ \text{绝对连续},\qquad x,x'\in\mathscr{L}_2^{(r)}(-1,1),\qquad x(\pm1)\ \text{有界}$$

的函数 $x(t)$ 组成.

而通过直接的计算，就可以证明

$$u_n = \boldsymbol{K} v_n = \sqrt{1-t^2}\,\frac{\mathrm{dP}_n(t)}{\mathrm{d}t} = -\mathrm{P}_n^1(t)$$

是 $\boldsymbol{K}_R$ 的 (未归一化) 本征函数：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{K}_R\, u_n(t) &= \left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[(1-t^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right] - \frac{1}{1-t^2}\right\}\mathrm{P}_n^1(t)\\ &= n(n+1)\,\mathrm{P}_n^1(t), \qquad n=1,2,3,\cdots.\end{aligned}$$

这里我们看到，$\boldsymbol{K}_L$ 和 $\boldsymbol{K}_R$ 有完全相同的非零本征值.

类似地，可以求得

$$\boldsymbol{K} = \sqrt{1-t^2}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - \frac{m}{\sqrt{1-t^2}} \qquad (m\ 为自然数)$$

的伴算符

$$\boldsymbol{K}^\dagger = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sqrt{1-t^2}\right) - \frac{m}{\sqrt{1-t^2}},$$

它们的定义域同例 4.8. 在此基础上能够定义出左叠积

$$\boldsymbol{K}_L = \boldsymbol{K}^\dagger \boldsymbol{K} = -\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[(1-t^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right] - \frac{m^2}{1-t^2}\right\}.$$

关于它的本征值问题，正是连带 Legendre 方程在有界条件下的本征值问题，解为

本征值 $\qquad \lambda_n^2 = n(n+1), \qquad n=m, m+1, m+2, \cdots,$

本征函数 (未归一化) $\qquad v_n(t) = \mathrm{P}_n^m(t).$

同时，对于右叠积

$$\begin{aligned}\boldsymbol{K}_R &= \boldsymbol{K}\boldsymbol{K}^\dagger = -\left(\sqrt{1-t^2}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - \frac{m}{\sqrt{1-t^2}}\right)\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sqrt{1-t^2}\right) - \frac{m}{\sqrt{1-t^2}}\right]\\ &= -\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[(1-t^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right] - \frac{m^2}{1-t^2}\right\} + \frac{1}{1-t^2} - \frac{2mt}{1-t^2}\\ &= -\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[(1-t^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right] - \frac{(m+1)^2}{1-t^2}\right\} - \frac{2m}{1-t},\end{aligned}$$

其 (未归一化) 本征函数则应为

$$\begin{aligned}u_n(t) &= \boldsymbol{K} v_n(t) = \sqrt{1-t^2}\,\frac{\mathrm{dP}_n^m(t)}{\mathrm{d}t} - \frac{m}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{P}_n^m(t)\\ &= \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\left\{\left[(n+1)\,t\,\mathrm{P}_n^m(t) - (n-m+1)\mathrm{P}_{n+1}^m(t)\right] - m\,\mathrm{P}_n^m(t)\right\}.\end{aligned}$$

也可以通过比较繁复的计算，来直接验证

$$\boldsymbol{K}_R\, u_n(t) = n(n+1)u_n(t).$$

例 4.9 再来讨论 Bessel 方程的本征值问题

$$\frac{1}{t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(t\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)+\left(\lambda^2-\frac{\nu^2}{t^2}\right)x(t)=0, \tag{4.22a}$$

$$x(0)\ 有界, \qquad x(1)=0. \tag{4.22b}$$

我们知道，这个本征值问题具有正交权函数 t. 为了消去权函数，或者说希望变换为权函数 $\rho(t)=1$，可作因变量变换

$$w(t)=t^{1/2}x(t),$$

于是本征值问题即变为

$$\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}t^2}+\left(\lambda^2-\frac{\nu^2-1/4}{t^2}\right)w(t)=0, \tag{4.23a}$$

$$w(0)=0, \qquad w(1)=0. \tag{4.23b}$$

我们可以定义算符

$$\boldsymbol{K}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}-\frac{\nu+1/2}{t},$$

它的定义域由满足

$$x(t)\ 绝对连续, \qquad x\in\mathscr{L}_2^{(r)}(0,1), \qquad x(0)=0$$

的函数 $x(t)$ 组成；直接计算能够求得

$$\boldsymbol{K}^\dagger=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}-\frac{\nu+1/2}{t},$$

其定义域中的函数 $y(t)$ 则应满足

$$y(t)\ 绝对连续, \qquad y\in\mathscr{L}_2^{(r)}(0,1), \qquad y(1)=0.$$

由此定义的左叠积

$$\boldsymbol{K}_L=\boldsymbol{K}^\dagger\boldsymbol{K}=-\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+\frac{\nu+1/2}{t}\right)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}-\frac{\nu+1/2}{t}\right)=-\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\nu^2-1/4}{t^2}\right),$$

它的本征值问题正是 (4.23)，所以

本征值	λ_n^2,	$n=1,2,3,\cdots$,
本征函数 (未归一化)	$v_n(t)=t^{1/2}\mathrm{J}_\nu(\lambda_n t)$,	

其中 λ_n 是 $\mathrm{J}_\nu(t)$ 的第 n 个正零点. 而由 $\boldsymbol{K}$ 及 $\boldsymbol{K}^\dagger$ 定义的右叠积则为

$$\boldsymbol{K}_R = \boldsymbol{K}\boldsymbol{K}^\dagger = -\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} - \frac{(\nu+1/2)(\nu+3/2)}{t^2}\right],$$

它的本征函数是

$$\begin{aligned} u_n(t) &= \boldsymbol{K}v_n(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[t^{1/2}\mathrm{J}_\nu(\lambda_n t)\right] - \frac{\nu+1/2}{t}t^{1/2}\mathrm{J}_\nu(\lambda_n t) \\ &= -\lambda_n\, t^{1/2}\mathrm{J}_{\nu+1}(\lambda_n t), \end{aligned}$$

直接计算就能验证它的本征值:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{K}_R\, u_n(t) &= -\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} - \frac{(\nu+1/2)(\nu+3/2)}{t^2}\right]u_n(t) \\ &= \lambda_n\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} - \frac{(\nu+1)^2-1/4}{t^2}\right]t^{1/2}\mathrm{J}_{\nu+1}(\lambda_n t) \\ &= -\lambda_n^3\, t^{1/2}\mathrm{J}_{\nu+1}(\lambda_n t) = \lambda_n^2\, u_n(t). \end{aligned}$$

下面举一个 $\boldsymbol{K}_R$ 与 $\boldsymbol{K}_L$ 有共同本征函数的例子.

例 4.10 在 $x(t), y(t)$ 均绝对连续，且在 $(-\infty, \infty)$ 上平方可积的条件下，容易看出

$$\int_{-\infty}^{\infty} y(t)\left(\frac{t}{2} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)x(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\left(\frac{t}{2} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)y(t)\,\mathrm{d}t,$$

因此

$$\boldsymbol{K} = \frac{t}{2} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \qquad \text{与} \qquad \boldsymbol{K}^\dagger = \frac{t}{2} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$$

互为伴算符. 定义 $\boldsymbol{K}_R = \boldsymbol{K}\boldsymbol{K}^\dagger$, $\boldsymbol{K}_L = \boldsymbol{K}^\dagger\boldsymbol{K}$，直接计算可以得出

$$\boldsymbol{K}_R - \boldsymbol{K}_L = \boldsymbol{I},$$

其中 $\boldsymbol{I}$ 为恒等算符. 因此，如果 $u(t)$ 是 $\boldsymbol{K}_L$ 的本征函数，即

$$\boldsymbol{K}_L\, u = \lambda u, \tag{4.24a}$$

则它也是 $\boldsymbol{K}_R$ 的本征函数:

$$\boldsymbol{K}_R\, u = (\boldsymbol{K}_L + \boldsymbol{I})u = (\lambda+1)u. \tag{4.24b}$$

不难发现，(4.24a) 或 (4.24b) 式也就是大家熟悉的一维谐振子的本征值问题. 例如，我们可以将本征值问题 (4.24a) 改写为

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} + \left(\lambda + \frac{1}{2} - \frac{t^2}{4}\right)u = 0, \\ &u(t) \in \mathscr{L}_2^{(r)}(-\infty, \infty), \end{aligned}$$

它的解就是

本征值 $\lambda_n = n, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots,$

本征函数 (未归一化) $u_n(t) = \mathrm{e}^{-t^2/4}\mathrm{H}_n\left(\dfrac{t}{\sqrt{2}}\right),$

其中 $\mathrm{H}_n(\xi)$ 是 Hermite 多项式. 重新写成算符方程的形式，就是

$$\boldsymbol{K}_L u_n = n u_n, \qquad \boldsymbol{K}_R u_n = (n+1) u_n. \tag{4.25}$$

再进一步，因为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{K}_L\left(\boldsymbol{K}^\dagger u_n\right) &= \left(\boldsymbol{K}^\dagger\boldsymbol{K}\right)\left(\boldsymbol{K}^\dagger u_n\right) = \boldsymbol{K}^\dagger\left(\boldsymbol{K}\boldsymbol{K}^\dagger\right) u_n \\ &= \boldsymbol{K}^\dagger\left(\boldsymbol{K}_R u_n\right) = \boldsymbol{K}^\dagger (n+1) u_n = (n+1)\left(\boldsymbol{K}^\dagger u_n\right),\end{aligned}$$

这说明 $\boldsymbol{K}^\dagger u_n$ 也是 $\boldsymbol{K}_L$ 的本征函数，本征值为 $n+1$. 于是

$$\boldsymbol{K}^\dagger u_n = \alpha_n u_{n+1}, \tag{4.26}$$

其中 α_n 为常数. 所以 $\boldsymbol{K}^\dagger$ 相当于谐振子的上升算符. 同样，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{K}_R\left(\boldsymbol{K} u_n\right) &= \left(\boldsymbol{K}\boldsymbol{K}^\dagger\right)\left(\boldsymbol{K} u_n\right) = \boldsymbol{K}\left(\boldsymbol{K}^\dagger\boldsymbol{K}\right) u_n \\ &= \boldsymbol{K}\left(\boldsymbol{K}_L u_n\right) = \boldsymbol{K}\left(n u_n\right) = n\left(\boldsymbol{K} u_n\right),\end{aligned}$$

这说明 $\boldsymbol{K} u_n$ 也是 $\boldsymbol{K}_R$ 的本征函数，本征值为 n. 于是

$$\boldsymbol{K} u_n = \beta_n u_{n-1}, \tag{4.27}$$

其中 β_n 也是比例常数. $\boldsymbol{K}$ 相当于谐振子的下降算符. 更进一步，利用 (4.25) 式，我们还能导出比例系数 α_n 与 β_n 之间的关系式:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{K}_L u_n &= \left(\boldsymbol{K}^\dagger\boldsymbol{K}\right) u_n = \boldsymbol{K}^\dagger\left(\boldsymbol{K} u_n\right) = \boldsymbol{K}^\dagger\left(\beta_n u_{n-1}\right) \\ &= \beta_n\left(\boldsymbol{K}^\dagger u_{n-1}\right) = \beta_n \alpha_{n-1} u_n = n u_n,\end{aligned}$$

即

$$\alpha_{n-1}\beta_n = n.$$

事实上，代入 $\boldsymbol{K}$ 及 u_n 的具体表达式，并进一步应用 Hermite 多项式的递推关系，就有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{K} u_n &= \left(\frac{t}{2} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{e}^{t^2/4}\mathrm{H}_n\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) = \mathrm{e}^{t^2/4}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{H}_n\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{t^2/4}\mathrm{H}_n'\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}n\mathrm{e}^{t^2/4}\mathrm{H}_{n-1}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right),\end{aligned}$$

所以就可以求得

$$\beta_n = \sqrt{2}n,$$

进而导出

$$\alpha_n = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

还可以讨论算符 $\boldsymbol{K}$ 和 $\boldsymbol{K}^\dagger$ 本身的本征值问题. 对于算符 $\boldsymbol{K}$，由微分方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{t}{2}x = \lambda x,$$

可以求得通解

$$x(t) = C\mathrm{e}^{-(t-2\lambda)^2/4}.$$

因此，对于任意实数值 λ[①]，$X(t)$ 均平方可积. 这时本征值 λ 构成连续谱. 而对于算符 $\boldsymbol{K}^\dagger$，因为微分方程

$$-\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{t}{2}x = \lambda x$$

的通解为

$$x(t) = C\mathrm{e}^{(t-2\lambda)^2/4},$$

因此本征值问题无解.

① 若限制在空间 $\mathscr{L}_2^{(c)}(-\infty,\infty)$上，则本征值 λ 可为任意复数.

第五章　线性微分算符的本征值问题

本章的讨论以二阶线性微分算符 (或称二阶线性微分变换) 为主，但有关结论不难推广到一般的线性微分算符，例如一阶或高阶线性微分算符.

§5.1　线性微分算符

5.1.1　二阶线性微分算符及其伴算符

定义 5.1 (关于函数 $y(x)$ 的) 二阶线性微分式为

$$\boldsymbol{l}\,y = p_0y'' + p_1y' + p_2y, \tag{5.1}$$

而

$$\boldsymbol{l} \equiv p_0(x)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + p_1(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + p_2(x) \tag{5.2}$$

称为**二阶线性微分算符**，其中系数 $p_0(x)$ 及 $p_1(x), p_2(x)$ 均为实连续函数.

容易验证，算符 $\boldsymbol{l}$ 是线性算符，即

$$\boldsymbol{l}\,(\alpha_1y_1 + \alpha_2y_2) = \alpha_1\boldsymbol{l}\,y_1 + \alpha_2\boldsymbol{l}\,y_2. \tag{5.3}$$

采用上述记号，可以将二阶线性齐次微分方程

$$p_0y'' + p_1y' + p_2y = 0 \tag{5.4}$$

简写成

$$\boldsymbol{l}\,y = 0. \tag{5.4$'$}$$

定义 5.2 二阶线性微分式

$$\boldsymbol{l}^\dagger y = [p_0(x)y]'' - (p_1y)' + p_2(x)y(x) \tag{5.5}$$

称为 $\boldsymbol{l}\,y$ 的**伴式**. 相应地，$\boldsymbol{l}^\dagger$ 就是 $\boldsymbol{l}$ 的**伴算符**.

直接分部积分即得

$$\int_a^b y_2^*(\boldsymbol{l}\,y_1)\mathrm{d}x = Q(y_1, y_2^*) + \int_a^b (\boldsymbol{l}^\dagger y_2)^* y_1\mathrm{d}x, \tag{5.6a}$$

其中

$$Q(y_1, y_2) = \Big[p_0\big(y_2y_1' - y_1y_2'\big) + \big(p_1 - p_0'\big)y_1y_2\Big]_a^b \tag{5.6b}$$

是 y_1 和 y_2 的双线性式. 或者引进内积记号

$$\langle y_2, y_1 \rangle = \int_a^b y_2^* y_1 \mathrm{d}x, \tag{5.7}$$

则 (5.6a) 式可以写成

$$\langle y_2, \boldsymbol{l}\, y_1 \rangle = Q(y_1, y_2) + \langle \boldsymbol{l}^\dagger y_2, y_1 \rangle. \tag{5.6a$'$}$$

上述有关线性微分算符及其伴算符，均应定义在一定的函数空间上. 换言之，这些算符都应有各自的定义域. 例如，相对于线性算符 $\boldsymbol{l}$，比较苛刻的要求是 $y(x)$ (在区间 (a, b) 上) 具有二阶连续导数. 这个要求可以放宽到 p_0y'' 及 p_1y' 分段连续，且 $y(x), y'(x)$ 及 $y''(x)$ 平方可积. 对于算符 $\boldsymbol{l}^\dagger$，也可作类似讨论. 特别是，$\boldsymbol{l}$ 和 $\boldsymbol{l}^\dagger$ 的定义域可以不尽相同.

5.1.2 常微分方程的齐次边值问题

为了求解微分方程，还需要有适当的边界条件. 对于二阶线性常微分方程 (5.4) 来说，相应的齐次边界条件可以写成

$$\alpha_{11}y(a) + \alpha_{12}y'(a) + \alpha_{13}y(b) + \alpha_{14}y'(b) = 0, \tag{5.8a}$$

$$\alpha_{21}y(a) + \alpha_{22}y'(a) + \alpha_{23}y(b) + \alpha_{24}y'(b) = 0, \tag{5.8b}$$

或者简写成

$$U_1(y) = 0, \qquad U_2(y) = 0, \tag{5.8c}$$

其中

$$U_1(y) = \alpha_{11}y(a) + \alpha_{12}y'(a) + \alpha_{13}y(b) + \alpha_{14}y'(b), \tag{5.9a}$$

$$U_2(y) = \alpha_{21}y(a) + \alpha_{22}y'(a) + \alpha_{23}y(b) + \alpha_{24}y'(b). \tag{5.9b}$$

这样的边界条件涵盖了我们熟悉的第一、二、三类边界条件及周期条件.

方程 (5.4) 及边界条件 (5.8) 就构成了常微分方程的边值问题

$$p_0y'' + p_1y' + p_2y = 0, \tag{5.10a}$$

$$\alpha_{11}y(a) + \alpha_{12}y'(a) + \alpha_{13}y(b) + \alpha_{14}y'(b) = 0, \tag{5.10b}$$

$$\alpha_{21}y(a) + \alpha_{22}y'(a) + \alpha_{23}y(b) + \alpha_{24}y'(b) = 0. \tag{5.10c}$$

边值问题 (5.10) 显然有零解 $y(x) = 0$. 我们关心的是此边值问题的非零解. 设方程 (5.4) 的通解为

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x),$$

代入齐次边界条件 (5.8)，即得

$$c_1U_1(y_1)+c_2U_1(y_2)=0,$$
$$c_1U_2(y_1)+c_2U_2(y_2)=0.$$

于是，常微分方程边值问题 (5.10) 有非零解的充分必要条件是

$$\begin{vmatrix}U_1(y_1) & U_1(y_2)\\ U_2(y_1) & U_2(y_2)\end{vmatrix}=0. \tag{5.11}$$

由于方程和边界条件都是齐次的，因此，非零解存在但不唯一；如果 $y(x)$ 是解，则 $cy(x)$ 也一定是解.

还可以引进线性算符 $\boldsymbol{L}$，而将齐次边值问题 (5.10) 简写成算符形式

$$\boldsymbol{L}y=0. \tag{5.10$'$}$$

它既包括了齐次常微分方程 $\boldsymbol{l}\,y=0$，还包括了齐次边界条件 $U_1(y)=0,\ U_2(y)=0$. 特别是，有

$$\int_a^b y_2^*\boldsymbol{L}y_1\mathrm{d}x=\int_a^b y_2^*\boldsymbol{l}\,y_1\mathrm{d}x,\qquad \text{即}\qquad \langle y_2,\boldsymbol{L}y_1\rangle=\langle y_2,\boldsymbol{l}\,y_1\rangle.$$

需要说明，纯粹作为二阶线性微分算符的定义，(独立) 边界条件的数目可以不是两个，可多可少，甚至也可以没有，只不过在边界条件数目过多的情况下，相应齐次微分方程的边值问题就只有零解.

5.1.3 L 的伴算符与伴随边界条件

定义 5.3 若对于任意函数 y_1,y_2，等式

$$\int_a^b y_2^*(\boldsymbol{L}y_1)\mathrm{d}x=\int_a^b \left(\boldsymbol{L}^\dagger y_2\right)^*y_1\mathrm{d}x,\qquad \text{即}\qquad \langle y_2,\boldsymbol{L}y_1\rangle=\langle \boldsymbol{L}^\dagger y_2,y_1\rangle \tag{5.12}$$

恒成立，则称算符 $\boldsymbol{L}^\dagger$ 为 $\boldsymbol{L}$ 的**伴算符**.

对照等式 (5.6a) 可见，作为伴算符的定义，它必须有

$$\boldsymbol{L}^\dagger y_2\equiv\boldsymbol{l}^\dagger y_2=\frac{\mathrm{d}^2(p_0y_2)}{\mathrm{d}x^2}-\frac{\mathrm{d}(p_1y_2)}{\mathrm{d}x}+p_2(x)y_2(x),$$

且还需满足适当的边界条件，使得

$$Q(y_1,y_2^*)=0. \tag{5.13}$$

为了写出 y_2 所应满足的边界条件，原则上可以将 y_1 所满足的边界条件

$$U_1(y_1)=0,\qquad U_2(y_1)=0 \tag{5.8$'$}$$

代入 (5.13) 式，而后设法分离出对 y_2 及其导数的限制条件. 更好的做法①是，在 (5.9) 式之外，再任意定义两个独立的关系式②

$$U_3(y_1) = \alpha_{31}y_1(a) + \alpha_{32}y_1'(a) + \alpha_{33}y_1(b) + \alpha_{34}y_1'(b),$$
$$U_4(y_1) = \alpha_{41}y_1(a) + \alpha_{42}y_1'(a) + \alpha_{43}y_1(b) + \alpha_{44}y_1'(b)$$

与 (5.9) 式联立，可以解出 $y_1(a), y_1'(a)$ 及 $y_1(b), y_1'(b)$ (用 $U_i(y_1), i = 1, 2, 3, 4$ 表示)，而后代入 (5.13) 式，从而整理得到

$$Q(y_1, y_2^*) = U_1(y_1)V_4(y_2^*) + U_2(y_1)V_3(y_2^*) + U_3(y_1)V_2(y_2^*) + U_4(y_1)V_1(y_2^*) = 0.$$

考虑到 (5.8′) 式，所以，作为伴算符 $\boldsymbol{L}^\dagger y_2$ 的定义，必须满足边界条件

$$V_1(y_2^*) = 0, \qquad V_2(y_2^*) = 0, \tag{5.14}$$

称为 (5.8′) 式的伴随边界条件. $V_1(y)$ 和 $V_2(y)$ 都是 y 线性式，所以上式能改写成

$$V_1^*(y_2) = 0, \qquad V_2^*(y_2) = 0.$$

特别是，如果式中的系数均为实数，则又有

$$V_1(y_2) = 0, \qquad V_2(y_2) = 0. \tag{5.14′}$$

☞ **评述** *特别提醒：在伴算符的定义 (即 (5.12) 式) 中，算符 $\boldsymbol{L}$ 与其伴算符 $\boldsymbol{L}^\dagger$ 原则上可以有不同的定义域.*

例 5.1 设 $\boldsymbol{L}y_1$ 满足第三类边界条件

$$U_1(y_1) = \alpha_1 y_1(a) + \beta_1 y_1'(a) = 0, \tag{5.15a}$$
$$U_2(y_1) = \alpha_2 y_1(b) + \beta_2 y_1'(b) = 0, \tag{5.15b}$$

其中系数 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ 均为实数，不妨再补充定义

$$U_3(y_1) = y_1(a) - y_1(b), \qquad U_4(y_1) = y_1'(a) - y_1'(b),$$

解之得

$$y_1(a) = \frac{1}{\Delta}\big(U_1\beta_2 - U_2\beta_1 - U_3\alpha_2\beta_1 - U_4\beta_1\beta_2\big),$$

① 这个做法的合理之处，应该在于由此得到的限制条件 (即伴随边界条件 (5.14) 式) 与增补的关系式无关. 增补的关系式形式不同，只不过给出 (5.14) 式的不同线性组合.

② 就二阶线性微分算符而言，如果原来算符定义中的边界条件不是两个，则现在补充的边界条件的数目也需作相应的调整，使得边界条件的总数仍为 4.

$$
\begin{aligned}
y_1'(a) &= \frac{1}{\Delta}\big(-U_1\alpha_2+U_2\alpha_1+U_3\alpha_1\alpha_2+U_4\alpha_1\beta_2\big),\\
y_1(b) &= \frac{1}{\Delta}\big(U_1\beta_2-U_2\beta_1-U_3\alpha_1\beta_2-U_4\beta_1\beta_2\big),\\
y_1'(b) &= \frac{1}{\Delta}\big(-U_1\alpha_2+U_2\alpha_1+U_3\alpha_1\alpha_2+U_4\alpha_2\beta_1\big),
\end{aligned}
$$

其中

$$
\Delta=\begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \alpha_2 & \beta_2\\ 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\end{vmatrix}=\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1\neq 0.
$$

代入 (5.6b) 式，即得

$$
\begin{aligned}
Q(y_1,y_2)=\frac{U_1}{\Delta}\Big\{&p_0(a)\big[\alpha_2y_2(a)+\beta_2y_2'(a)\big]-p_0(b)\big[\alpha_2y_2(b)+\beta_2y_2'(b)\big]\\
&-\beta_2\big[p_1(a)-p_0'(a)\big]y_2(a)+\beta_2\big[p_1(b)-p_0'(b)\big]y_2(b)\Big\}\\
+\frac{U_2}{\Delta}\Big\{&-p_0(a)\big[\alpha_1y_2(a)+\beta_1y_2'(a)\big]+p_0(b)\big[\alpha_1y_2(b)+\beta_1y_2'(b)\big]\\
&+\beta_1\big[p_1(a)-p_0'(a)\big]y_2(a)-\beta_1\big[p_1(b)-p_0'(b)\big]y_2(b)\Big\}\\
+\frac{U_3}{\Delta}\Big\{&-p_0(a)\alpha_2\big[\alpha_1y_2(a)+\beta_1y_2'(a)\big]+p_0(b)\alpha_1\big[\alpha_2y_2(b)+\beta_2y_2'(b)\big]\\
&+\alpha_1\beta_2\big[p_1(a)-p_0'(a)\big]y_2(a)-\alpha_2\beta_1\big[p_1(b)-p_0'(b)\big]y_2(b)\Big\}\\
+\frac{U_4}{\Delta}\Big\{&-p_0(a)\beta_2\big[\alpha_1y_2(a)+\beta_1y_2'(a)\big]+p_0(b)\beta_1\big[\alpha_2y_2(b)+\beta_2y_2'(b)\big]\\
&+\beta_1\beta_2\big[p_1(a)-p_0'(a)\big]y_2(a)-\beta_1\beta_2\big[p_1(b)-p_0'(b)\big]y_2(b)\Big\}.
\end{aligned}
$$

这样，对应于 (5.15) 式的伴随边界条件就是

$$
V_1(y_2)=0,\qquad V_2(y_2)=0,
$$

其中

$$
\begin{aligned}
V_1(y_2)=&-p_0(a)\beta_2\big[\alpha_1y_2(a)+\beta_1y_2'(a)\big]+p_0(b)\beta_1\big[\alpha_2y_2(b)+\beta_2y_2'(b)\big]\\
&+\beta_1\beta_2\big[p_1(a)-p_0'(a)\big]y_2(a)-\beta_1\beta_2\big[p_1(b)-p_0'(b)\big]y_2(b)\\
=&-\beta_2\Big\{p_0(a)\big[\alpha_1y_2(a)+\beta_1y_2'(a)\big]+\big[p_1(b)-p_0'(b)\big]\beta_1y_2(b)\Big\}\\
&+\beta_1\Big\{p_0(b)\big[\alpha_2y_2(b)+\beta_2y_2'(b)\big]+\big[p_1(a)-p_0'(a)\big]\beta_2y_2(a)\Big\},\\
V_2(y_2)=&-p_0(a)\alpha_2\big[\alpha_1y_2(a)+\beta_1y_2'(a)\big]+p_0(b)\alpha_1\big[\alpha_2y_2(b)+\beta_2y_2'(b)\big]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\alpha_1\beta_2\big[p_1(a)-p_0'(a)\big]y_2(a)-\alpha_2\beta_1\big[p_1(b)-p_0'(b)\big]y_2(b)\\
=&-\alpha_2\Big\{p_0(a)\big[\alpha_1 y_2(a)+\beta_1 y_2'(a)\big]+\big[p_1(b)-p_0'(b)\big]\beta_1 y_2(b)\Big\}\\
&+\alpha_1\Big\{p_0(b)\big[\alpha_2 y_2(b)+\beta_2 y_2'(b)\big]+\big[p_1(a)-p_0'(a)\big]\beta_2 y_2(a)\Big\}.
\end{aligned}
$$

或者等价地，将上述伴随边界条件重新组合成

$$p_0(a)\big[\alpha_1 y_2(a)+\beta_1 y_2'(a)\big]+\big[p_1(b)-p_0'(b)\big]\beta_1 y_2(b)=0, \tag{5.16a}$$

$$p_0(b)\big[\alpha_2 y_2(b)+\beta_2 y_2'(b)\big]+\big[p_1(a)-p_0'(a)\big]\beta_2 y_2(a)=0. \tag{5.16b}$$

在介绍了微分算符的伴算符概念后，同样可以进一步讨论微分算符的自伴性与 Hermite 性. 这相当于 4.3.2 小节内容在微分算符条件下的应用，不再重复. 只是值得强调，所谓算符的自伴性，当然应当包括两部分的含义：既包括相应的微分表达式相等，即 $\boldsymbol{l}=\boldsymbol{l}^\dagger$，也包括相关的边界条件

$$U_1(y)=0,\quad U_2(y)=0 \qquad \text{与} \qquad V_1(y)=0,\quad V_2(y)=0$$

互相等价，或者说，边界条件自伴.

例 5.2 若

$$\boldsymbol{l}\,y=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+q(x)y, \tag{5.17}$$

即相当于 (5.1) 式中的 $p_0=p(x)$, $p_1=p_0'$, $p_2=q(x)$，由 (5.5) 式即可证得

$$\boldsymbol{l}^\dagger y=\frac{\mathrm{d}^2[p(x)y]}{\mathrm{d}x^2}-\frac{\mathrm{d}(p'y)}{\mathrm{d}x}+q(x)y=\boldsymbol{l}\,y. \tag{5.18}$$

如果边界条件仍为 (5.15)，则伴随边界条件 (5.16) 与 (5.15) 完全相同. 因此，由 (5.17) 及边界条件 (5.15) 所定义的二阶线性微分算符 $\boldsymbol{L}$ 就是自伴算符.

5.1.4 线性微分算符的本征值问题

定义 5.4 如果在算符 $\boldsymbol{L}$ 的定义域上存在非零函数 $y(x)$，使得

$$\boldsymbol{L}y=\lambda y, \tag{5.19a}$$

或者等价地写成

$$\boldsymbol{l}\,y=\lambda y, \tag{5.19b}$$

$$U_1(y)=0,\qquad U_2(y)=0, \tag{5.19c}$$

则常数 λ 就称为线性算符 $\boldsymbol{L}$ 的**本征值**，函数 $y(x)$ 就是算符 $\boldsymbol{L}$ 对应于本征值 λ 的**本征函数**.

假设方程 (5.19b) 的通解为

$$y(x)=c_1y_1(x,\lambda)+c_2y_2(x,\lambda),$$

代入边界条件 (5.19c)，有

$$c_1U_1\big(y_1(a,\lambda)\big)+c_2U_2\big(y_2(a,\lambda)\big)=0,$$
$$c_1U_1\big(y_1(b,\lambda)\big)+c_2U_2\big(y_2(b,\lambda)\big)=0.$$

由此，$y(x)\neq 0$ 的充分必要条件是

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix}U_1\big(y_1(a,\lambda)\big) & U_2\big(y_2(a,\lambda)\big)\\ U_1\big(y_1(b,\lambda)\big) & U_2\big(y_2(b,\lambda)\big)\end{vmatrix}=0. \tag{5.20}$$

$\Delta(\lambda)$ 称为线性算符 $\boldsymbol{L}$ 的**本征行列式**. (5.19) 式表明，本征值 λ 就是本征行列式 $\Delta(\lambda)$ 的零点. 按照常微分方程的解析理论，可以知道，对于 $[a,b]$ 中的任何 x 值，$y(x)$ 是参数 λ 的整函数. 因此，本征行列式 $\Delta(\lambda)$ 也必然是 λ 的整函数. 于是，根据复变函数理论，我们必将面临下列情形之一：

(1) 本征行列式 $\Delta(\lambda)$ 无零点，本征值问题 (5.19) 无解. 换言之，对于任何 λ 值，本征值问题 (5.19) 都只有零解.

(2) 本征行列式 $\Delta(\lambda)$ 恒为 0，因此任何 λ 值都是 $\boldsymbol{L}$ 的本征值.

(3) 本征行列式 $\Delta(\lambda)$ 有可数个零点 (换言之，算符 $\boldsymbol{L}$ 有可数个本征值)：可以有有限个零点，也可以有无穷多个零点；而且，在有限远处只有有限个零点，在有限远处没有聚点 (极限点).

作为本征值问题 (5.19) 的解，本征值 λ 是本征行列式 $\Delta(\lambda)$ 的零点，零点的阶数也没有任何限制. 而且，对于给定的一个本征值 λ，一定能求得关于 c_1,c_2 的非零解. 换言之，一定能求得相应于本征值 λ 的本征函数. 这样的 (线性无关的) 本征函数，最多只能有两个 (因为涉及的是二阶常微分方程)，或者说，本征值问题 (5.19) 的简并度最多为 2.

下面不加证明地给出关于伴随本征值问题的几个结论：

(1) 如果 λ 是线性算符 $\boldsymbol{L}$ 的本征值，则 λ^* 是伴随算符 $\boldsymbol{L}^\dagger$ 的本征值.

这个结论说明，如果 $\boldsymbol{L}y(x,\lambda)=\lambda y(x,\lambda)$，则 $\boldsymbol{L}^\dagger y(x,\lambda^*)=\lambda^* y(x,\lambda^*)$. 难点在于证明 $y(x,\lambda^*)$ 满足相应的伴随边界条件.

(2) 如果对应于本征值 λ，算符 $\boldsymbol{L}$ 有 p 个本征函数 (即简并度为 p)，则对应于本征值 λ^*. 算符 $\boldsymbol{L}^\dagger$ 也一定有 p 个本征函数.

(3) 如果 $\lambda\neq\mu^*$，则 $\boldsymbol{L}$ 的本征函数 $y(x,\lambda)$ 与 $\boldsymbol{L}^\dagger$ 的本征函数 $y(x,\mu)$ 正交.

把这些结论应用到自伴线性算符上，就得到：

(1) 自伴算符的本征值一定为实数；

(2) 对应不同本征值的本征函数一定正交.

§5.2　二阶常微分方程解的零点[1]

5.2.1　(x,ϕ) 图

不妨考虑方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+q(x)y=0. \tag{5.21}$$

假设方程中的系数 $p(x),q(x)$ 在某闭区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 内连续，且 $p(x)$ 可导，并进一步假设 $p(x)>0,\ a\leqslant x\leqslant b$. 若引进新的函数

$$z(x)=p(x)y'(x), \tag{5.22}$$

则方程 (5.21) 能改写为一阶微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{p(x)}z,\qquad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-q(x)y, \tag{5.23}$$

而后即可应用常微分方程组解的存在唯一性定理. 在关于 $p(x),q(x)$ 的并不苛刻的条件下，我们就能建立起有关方程组 (5.23) 的解的存在唯一性.

为了研究方程 (5.21) 的解的性质 (特别是关于解的零点)，值得引进极坐标

$$y=r(x)\cos\phi(x),\qquad z=r(x)\sin\phi(x). \tag{5.24}$$

因此方程组 (5.23) 就变成

$$r'\cos\phi-r\phi'\sin\phi=\frac{1}{p}r\sin\phi,\qquad r'\sin\phi+r\phi'\cos\phi=-qr\cos\phi.$$

解出 r' 与 ϕ':

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}=-\left[\frac{1}{p(x)}\sin^2\phi+q(x)\cos^2\phi\right], \tag{5.25a}$$

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x}=\left[\frac{1}{p(x)}-q(x)\right]r\sin\phi\cos\phi. \tag{5.25b}$$

注意方程 (5.25a) 中不含 $r(x)$，能够独立地解出 $\phi(x)$，而后代入方程 (5.25b)，又可解出 $r(x)$:

$$r(x)=\exp\left\{\frac{1}{2}\int\left[\frac{1}{p(x)}-q(x)\right]\sin 2\phi\,\mathrm{d}x\right\}. \tag{5.26}$$

我们有兴趣于讨论方程 (5.21) 的解的零点，所以只需将注意力集中在考察方程 (5.25a) 的解 $\phi(x)$. 我们首先看到，如果 $\phi(x)$ 是方程 (5.25a) 的解，则 $\phi(x)+k\pi$

[1] 引自文献: H. Sagan. *Boundary and Eigenvalue Problems in Mathematical Physics*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1961.

也是解；它们给出的 $\pm y(x)$ 线性相关．作为齐次方程的解，$\pm y(x)$ 应当看成同一个解．这样，我们总能假定，在给定 x_0 点处，$\phi(x)$ 满足

$$(k-1/2)\pi < \phi(x_0) \leqslant (k+1/2)\pi,$$

其中 k 是任意给定的整数．

引理 5.1　当且仅当 $\phi(x_1)=(k+1/2)\pi$ 时，方程 (5.21) 的解 $y(x)$ 有零点 x_1．点 x_1 称为 $\phi(x)$ 的 $\pi/2$-交叉点．

5.2.2　二阶常微分方程解的零点及其分布

定理 5.1　二阶线性齐次常微分方程 (5.21) 的解的零点都是一阶零点，即若 $y(x_1)=0$，则 $y'(x_1)\neq 0$．

这其实就是因为 x_1 是 $\phi(x_1)=(k+1/2)\pi$ 的一阶零点．

设 $y(x)$ 与 $\overline{y}(x)$ 是方程 (5.21) 的两个解，现在讨论它们的零点的相对位置．假设在区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 内 $p(x)>0$, $q(x)>0$．由方程 (5.25a) 可得

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}<0, \qquad \forall x\in[a,b].$$

这意味着函数 $\phi(x)$ 单调下降．假设它与直线 $\phi=(k+1/2)\pi$ 相交，对应于 $a\leqslant x\leqslant b$ 区间中的 x_1 (见图 5.1，该图中画的是 $k=0$)．更进一步，它与直线 $\phi=(k-1/2)\pi$ 相交于另一点，对应于 $x_2\,(>x_1)$．x_1 与 x_2 是解 $y(x)$ 的相邻两个零点．同时，对于方程 (5.21) 的另一个解 $\overline{y}(x)$，它对应于另一个 $\overline{\phi}(x)+k\pi$．此曲线不可能与 $\phi(x)+k\pi$ 相交，因为 (5.25a) 式表明，在任意一点 (x,ϕ)，有一个而且只有一个斜率 ϕ'．因此，ϕ 和 $\overline{\phi}$ 不可能相交，更不可能完全重合．我们总能挑选出一个 $\overline{k}$，使得

$$\phi<\overline{\phi}+\overline{k}\pi<\phi+\pi.$$

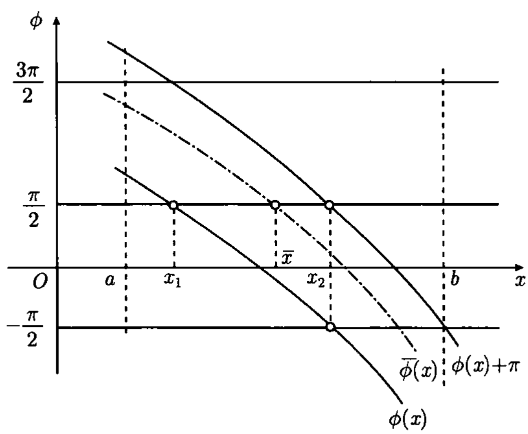


图 5.1　定理 5.1 的证明

换言之，$\overline{\phi}+\overline{k}$ 一定与 $\phi=(k+1/2)\pi$ 相交，其交点对应于 $\overline{x}$，处于 x_1 与 x_2 之间.

定理 5.2 若

(1) $y(x)$ 与 $\overline{y}(x)$ 是方程 (5.21) 的两个解；

(2) 方程 (5.21) 中的系数 $p(x)$ 与 $q(x)$ 同号；

(3) $y(x)$ 有相邻两个零点 x_1 与 x_2 (设 $x_1<x_2$)，

则 $\overline{y}(x)$ 必有零点 $\overline{x}$，$x_1<\overline{x}<x_2$.

现在补充讨论 $p(x)$ 与 $q(x)$ 不同号的情形. 不妨设 $p(x)>0$, $q(x)<0$. 在这种情形下，

$$\left.\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}\right|_{\phi=k\pi}=-q>0,$$

即曲线 $\phi(x)$ 以正斜率与直线 $\phi=k\pi$ 相交；另一方面，

$$\left.\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}\right|_{\phi=(k+1/2)\pi}=-\frac{1}{p}<0,$$

这说明曲线 $\phi(x)$ 以负斜率与直线 $\phi=(k+1/2)\pi$ 相交. 因此，曲线 $\phi(x)$ 一旦落入带形区域 $((k-1)\pi,\ (k-1/2)\pi)$ 内，就永远不能走出这个带形区域. 而处于带形区域 $((k-1/2)\pi,\ k\pi)$ 内的曲线 $\phi(x)$，则一定属于下列三种情形之一：

(1) 通过 $\phi=k\pi$ 后停留在带形区域 $(k\pi,\ (k+1/2)\pi)$ 内，

(2) 通过 $\phi=(k-1/2)\pi$ 但再也不走出带形区域 $((k-1)\pi,\ (k-1/2)\pi)$，

(3) 根本就一直处在带形区域 $((k-1/2)\pi,\ k\pi)$ 内.

总结以上各种情形，我们看到，正如图 5.2 所示，曲线 $\phi(x)$，最多只能有一个 $\pi/2$-交叉点. 这就是下面的定理 5.3:

定理 5.3 若 $y(x)$ 是常微分方程 (5.21) 的解，且系数 $p(x)$ 与 $q(x)$ 异号，则 $y(x)$ 要么只有一个零点，要么没有零点.

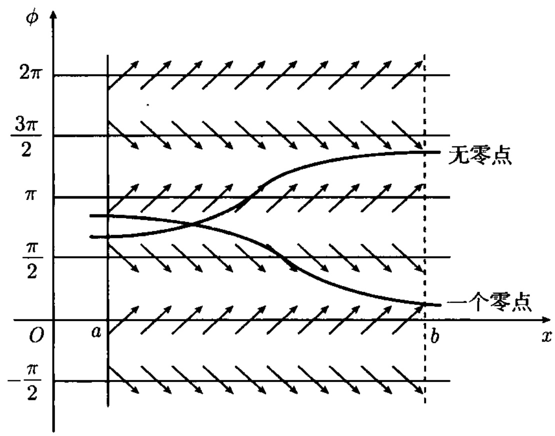


图 5.2　定理 5.3 的证明

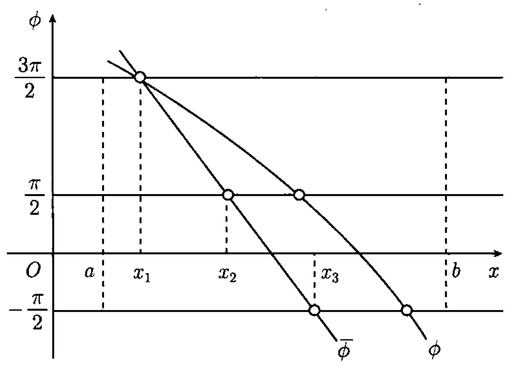


图 5.3　定理 5.4 的证明

定理 5.4　方程 (5.21) 的解的零点是离散的，即在任何有限区间内只有有限个零点 (如果有零点的话).

证　系数 $p(x)$ 与 $q(x)$ 异号的情形显然成立，所以下面只需证明 $p(x)$ 与 $q(x)$ 同号的情形. 在这种情形下，按照 (5.25a) 式，有 $\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}x<0$. 另一方面，

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}>-\left(\frac{1}{m}+M\right),$$

其中

$$m=\min_{x\in[a,b]}p(x),\qquad M=\max_{x\in[a,b]}q(x).$$

如图 5.3 所示，令 x_1 是 $y(x)$ 在 $a\leqslant x\leqslant b$ 内的第一个零点，则该点即为 $\phi(x)$ 的 $\pi/2$-交叉点. 现在考虑直线

$$\overline{\phi}=-tx+C,\qquad t=\frac{1}{m}+M.$$

选择 C，使得此直线与 $\phi(x)$ 交于 $(x_1,(k+1/2)\pi)$ 点. 这条直线还将与直线 $\phi=(k-r+1/2)\pi$ 交于 $x_r=x_1+\pi r/t$ 点. 如果区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 的长度有限，则在此区间内只能有有限个这样的交点. 因为 $\phi(x)$ 的斜率小于 $\overline{\phi}(x)$ 的斜率，它与直线 $\phi=(k-r+1/2)\pi$ 的交点不可能比 $\overline{\phi}(x)$ 还多. 定理得证. □

5.2.3　比较引理

引理 5.2 (比较引理)　设 $y_1(x)$ 是方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p_1(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+q_1(x)y=0$$

的解，而 $y_2(x)$ 是方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p_2(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+q_2(x)y=0$$

的解，其中 $p_i(x)$ 与 $q_i(x)$ 可以同号或异号，且 $p_1(x) \geqslant p_2(x)$，$q_1(x) \leqslant q_2(x)$. 根据 (5.24) 式，可以定出函数 $\phi_1(x)$ 与 $\phi_2(x)$，它们分别对应于 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$，且在区间 $a \leqslant x \leqslant b$ 内某点 x_0，$\phi_1(x_0)=\phi_2(x_0)$，则

$$\phi_2(x) \leqslant \phi_1(x), \qquad \forall x > x_0.$$

证 按照 (5.25a) 式，有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}(\phi_2-\phi_1)}{\mathrm{d}x} &= -\left(\frac{1}{p_2}\sin^2\phi_2 - \frac{1}{p_1}\sin^2\phi_1\right) - \left(q_2\cos^2\phi_2 - q_1\cos^2\phi_1\right) \\ &= -\left(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p_1}\right)\sin^2\phi_2 - (q_2-q_1)\cos^2\phi_2 \\ &\quad + \frac{1}{p_1}\left(\sin^2\phi_1 - \sin^2\phi_2\right) + q_1\left(\cos^2\phi_1 - \cos^2\phi_2\right).\end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned}h(x) &= \left(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p_1}\right)\sin^2\phi_2 - (q_2-q_1)\cos^2\phi_2, \\ k(x) &= \frac{1}{p_1}\frac{\sin^2\phi_1-\sin^2\phi_2}{\phi_1-\phi_2} + q_2\frac{\cos^2\phi_1-\cos^2\phi_2}{\phi_1-\phi_2},\end{aligned}$$

$h(x)$ 和 $k(x)$ 都是连续函数①，因此

$$\frac{\mathrm{d}(\phi_2-\phi_1)}{\mathrm{d}x} = h(x) + \left(\phi_2-\phi_1\right)k(x),$$

或者乘上积分因子 $\mathrm{e}^{-\int k(x)\mathrm{d}x}$ 从而化成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\mathrm{e}^{-\int k(x)\mathrm{d}x}\left(\phi_2-\phi_1\right)\right] = h(x)\mathrm{e}^{-\int k(x)\mathrm{d}x}.$$

由于

$$\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p_1} \geqslant 0, \qquad q_2-q_1 \geqslant 0,$$

所以 $h(x) \leqslant 0$. 因此

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\mathrm{e}^{-\int k(x)\mathrm{d}x}\left(\phi_2-\phi_1\right)\right] \leqslant 0,$$

---

① $h(x)$ 和 $k(x)$ 的连续性意味着它们在 $\phi_1=\phi_2$ 时必须用它们的极限值

$$\lim_{\phi_2\to\phi_1}\frac{\sin^2\phi_1-\sin^2\phi_2}{\phi_1-\phi_2} = -\sin 2\phi_1, \qquad \lim_{\phi_2\to\phi_1}\frac{\cos^2\phi_1-\cos^2\phi_2}{\phi_1-\phi_2} = \sin 2\phi_1$$

来定义. 这样，为了使 $k(x)$ 处处连续，我们必须定义

$$k(x)\big|_{\phi_2=\phi_1} = -\frac{1}{p_1}\sin 2\phi_1 + q_2\sin 2\phi_1.$$

即函数

$$s(x)=\mathrm{e}^{-\int k(x)\mathrm{d}x}(\phi_2-\phi_1)$$

单调下降．而因为 $\phi_1(x_0)=\phi_2(x_0)$，故 $s(x_0)=0$，因而

$$s(x)\leqslant 0,\qquad \forall x>x_0.$$

再因 $\mathrm{e}^{-\int k(x)\mathrm{d}x}>0$，引理得证． □

☞ **讨论** 比较引理还能修改为：若 $p_1(x)\geqslant p_2(x)$, $q_1(x)<q_2(x)$，则

$$\phi_2(x)<\phi_1(x),\qquad \forall x>x_0.$$

由比较引理能使我们得到有关 (5.21) 型微分方程解的零点的相对位置的某些重要信息．

定理 5.5 设 $y_1(x)$ 是方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p_1(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+q_1(x)y=0$$

的解，x_1, x_2 是 $y_1(x)$ 的两个相邻的零点，$x_1<x_2$，则方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p_2(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+q_2(x)y=0$$

的任何解 $y_2(x)$ 必定至少在 $(x_1,x_2]$ 内一点为 0，即至少存在一点 $\overline{x}\in(x_1,x_2]$，使 $y_2(\overline{x})=0$，其中系数满足

$$p_2(x)\geqslant p_1(x)>0,\qquad 0<q_1(x)\leqslant q_2(x).$$

证 根据假设可知，$y_1(x)$ 的 ϕ-函数 $\phi_1(x)$ 一定与某一直线 $\phi=(k+1/2)\pi$ 交于 $x=x_1$ 点，与直线 $\phi=(k-1/2)\pi$ 交于 $x=x_2$ 点 (见图 5.4)．我们可以不失普遍性地假设 $k=1$，即 $\phi_1(x_1)=3\pi/2$, $\phi_1(x_2)=\pi/2$．若 $\phi_2(x)$ 是 $y_2(x)$ 的 ϕ-曲线，我们也能不失普遍性地假设 $\pi/2<\phi_2(x_1)\leqslant 3\pi/2$．只要通过适当选择 $\phi_2(x)+n\pi$ 中的 n 就能做到这一点．

现在，我们必须考虑下列两种可能性：

(1) 在 $x_1\leqslant x<x_2$ 内存在某点 x_0，使得 $\phi_1(x_0)=\phi_2(x_0)$，则按照引理 5.2，有

$$\phi_2(x)\leqslant\phi_1(x),\qquad \forall x>x_0.$$

因此，$\phi_2(x)$ 一定在区间 $(x_1,x_2]$ 内某点 $\overline{x}$ 与直线 $\phi=\pi/2$ 相交，即 $y_2(\overline{x})=0$, $x_1<\overline{x}\leqslant x_2$．

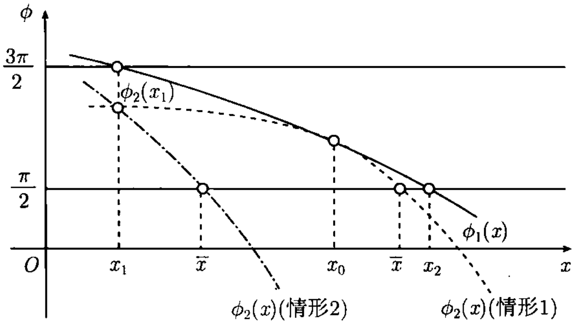


图 5.4　定理 5.5 的证明

(2) $\phi_2(x)$ 在区间 $[x_1, x_2)$ 内不与 $\phi_1(x)$ 相交，则因为 $\phi_2(x_1) < \phi_1(x_1)$，必有

$$\phi_2(x) < \phi_1(x), \qquad \forall x \in [x_1, x_2).$$

因此 $\phi_2(x)$ 一定与直线 $\phi = \pi/2$ 交于 $(x_1, x_2]$ 中某点 $\overline{x}$，即 $y_2(\overline{x}) = 0$，$x_1 < \overline{x} \leqslant x_2$.

□

我们已经知道，方程

$$y'' + \lambda y = 0 \tag{5.27}$$

(在这个方程中 p, q 均为常数) 的解为 $y(x) = A\sin(\sqrt{\lambda}x - \delta)$. 其相邻零点之间的距离为 $\pi/\sqrt{\lambda}$. 在 p, q 为 x 的函数的情形下，我们当然不能指望也有如此简单的结果. 然而，比较方程 (5.21) 与方程 (5.27)，并应用引理 5.2，我们能够估计出方程 (5.21) 解的零点之间的距离. 假设方程 (5.25a) 中的 $p(x)$ 与 $q(x)$ 同号，我们可以再考虑两个 (5.27) 型的方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(M_1\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) + m_2 y = 0, \tag{5.28a}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(m_2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) + M_2 y = 0, \tag{5.28b}$$

其中常数 m_1, m_2, M_1, M_2 满足下列要求：

$$m_1 \leqslant p(x) \leqslant M_1, \qquad m_2 \leqslant q(x) \leqslant M_2.$$

首先应用引理 5.2 于方程 (5.21) 及 (5.28a). 方程 (5.28a) 的解是

$$y_1^{(1)} = \sin\sqrt{\frac{m_2}{M_1}}(x - \delta), \qquad \delta \text{ 任意}.$$

它的相邻两个零点之间相距 $\pi\sqrt{m_2/M_1}$. 令 x_1 与 $x_1+\pi\sqrt{m_2/M_1}$ 为 $y_1^{(1)}(x)$ 的相邻的两个零点，于是，按照引理 5.2，方程 (5.21) 一定有一个解 $\overline{x}_1$，满足

$$x_1 < \overline{x}_1 \leqslant x_1 + \pi\sqrt{\frac{m_2}{M_1}}.$$

现在适当选择 δ，使得方程 (5.28a) 的另一个解 $y_2^{(1)}$ 的零点就是 $\overline{x}_1$. $y_2^{(1)}$ 的下一个零点就是 $\overline{x}_1+\pi\sqrt{m_2/M_1}$，而方程 (5.21) 的解 $y(x)$ 又必然有一个零点 $\overline{x}_2$：

$$\overline{x}_1 < \overline{x}_2 \leqslant \overline{x}_1 + \pi\sqrt{\frac{m_2}{M_1}}, \qquad 即 \qquad 0 < \overline{x}_2 - \overline{x}_1 \leqslant \pi\sqrt{\frac{m_2}{M_1}}.$$

将同样的论据以相反的顺序应用于方程 (5.21) 及 (5.28b)，我们就得到 $\overline{x}_2-\overline{x}_1 \geqslant \pi\sqrt{m_1/M_2}$. 这样就能总结为下面的定理：

定理 5.6 如果常数 m_1, m_2, M_1, M_2 给定，

$$m_1 \leqslant p(x) \leqslant M_1, \qquad m_2 \leqslant q(x) \leqslant M_2,$$

则

$$\pi\sqrt{\frac{m_1}{M_2}} \leqslant |x_2 - x_1| \leqslant \pi\sqrt{\frac{M_1}{m_2}},$$

其中 x_1 和 x_2 是方程 (5.21) 的解的相邻的两个零点，且约定方程中的系数同号，$\operatorname{sgn} p(x) = \operatorname{sgn} q(x)$.

把这个定理应用于 Bessel 方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) + \left(x - \frac{\mu^2}{x}\right)y = 0, \qquad \mu \geqslant 0. \tag{5.29}$$

考虑区间 $A \leqslant x \leqslant A+d$，其中 A, d 可以是任意正数. 因为 $p(x) = x$，$q(x) = x - \mu^2/x$，所以，在这个区间中，

$$m_1 = A, \qquad M_1 = A + d,$$
$$m_2 = A - \frac{\mu^2}{A+d}, \qquad M_2 = A + d.$$

这样，Bessel 方程在区间 $A \leqslant x \leqslant A+d$ 内解的相邻两个零点必然满足

$$\pi\sqrt{\frac{A}{A+d}} \leqslant |x_2 - x_1| \leqslant \pi\frac{A+d}{\sqrt{A(A+d)-\mu^2}}.$$

若 $A \to \infty$，则上述不等式的上下界均趋于 π. 这就是说，随着 $x \to \infty$，Bessel 函数 $\mathrm{J}_\mu(x)$ 的相邻两个零点之间的距离趋于 π.

§5.3 Sturm-Liouville 型方程的本征值问题

本节讨论正则的本征值问题

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+\left[q(x)+\lambda\rho(x)\right]y=0, \tag{5.30a}$$

$$a_{11}y(x_1)+a_{12}y'(x_1)=0, \tag{5.30b}$$

$$a_{21}y(x_2)+a_{22}y'(x_2)=0. \tag{5.30c}$$

这个本征值问题，作为一个特殊的常微分方程边值问题，其自伴性已在 §5.1 作过讨论，不再重复.

5.3.1 一个例子

例 5.3 考虑本征值问题

$$y''+\lambda y=0, \qquad 0<x<1, \tag{5.31a}$$

$$y(0)=0, \qquad y(1)\cos\beta+y'(1)\sin\beta=0, \tag{5.31b}$$

其中 β 为已知常数，不妨规定 $0\leqslant\beta<\pi$. 不难看出这个本征值问题的自伴性，因此它的本征值一定是实数. 直接将方程 (5.31a) 乘以 $y^*(x)$，而后积分即得

$$\begin{aligned}\lambda\int_0^1 y(x)y^*(x)\mathrm{d}x &= -\int_0^1 y''y^*\mathrm{d}x\\ &= -y'(x)y^*(x)\Big|_0^1+\int_0^1 y'(y')^*\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

代入边界条件 (5.31b)，就有

$$\lambda\int_0^1 |y(x)|^2\,\mathrm{d}x=\cot\beta\,|y(1)|^2+\int_0^1 |y'(x)|^2\,\mathrm{d}x.$$

也能看到本征值 λ 一定为实数，而且，当 $\cot\beta\geqslant0$ (即$0\leqslant\beta\leqslant\pi/2$) 时，本征值为正；当 $\cot\beta<0$ 即 $\pi/2<\beta<\pi$ 时，本征值可正可负.

在求解本征值问题 (5.31) 时，值得注意本征值随 β 的变化规律. 我们将要看到，在区间 $0\leqslant\beta<\pi$ 内，本征值 $\{\lambda_n\}$ 随着 β 的增大而减小. 从物理上说，这个本征值问题可以出现在细杆的热传导问题中. 设杆的左端温度为 0，右端与外界 (温度为 0) 按 Newton 冷却定律交换热量. $\beta=0$ 意味着右端的温度保持为 0. 随着 β 的增大，右端流失的热量越来越少：如果 $0<\beta<\pi/2$，有热量向周围介质散发，从杆的右端散发出热量的速率正比于右端的温度 (比例系数随 β 增大而减小)；如果 $\beta=\pi/2$，右端绝热；如果 $\pi/2<\beta<\pi$，反过来有热量从右端以正比于温度的速率

馈入细杆，而又有热量从左端流出 (以保持零温). 显然这种情形具有潜在的不稳定性. 我们也或许值得注意在 (5.31) 式出现负本征值时 β 的临界值.

对于 $0\leqslant\beta\leqslant\pi/2$ 的情形，$x=1$ 端的边界条件就是传统的第一、二、三类边界条件 (分别对应于 $\beta=0$，$\beta=\pi/2$ 及 $0<\beta<\pi/2$)，在任何一本数学物理方法教材中都可以找到相关的讨论，此处不再详述. 大家都知道，这时本征值 λ 是超越方程

$$\cos\beta\sin\sqrt{\lambda}+\sin\beta\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}=0,\qquad 即\qquad \tan\sqrt{\lambda}=-\sqrt{\lambda}\tan\beta \tag{5.32}$$

的解. 超越方程 (5.32) 有无穷多个正根 (即本征值) λ_n, $n=1,2,3,\cdots$. 当 $\beta=0$ 时，本征值为

$$\lambda_n=(n\pi)^2,\qquad n=1,2,3,\cdots.$$

当 $\beta=\pi/2$ 时，本征值为

$$\lambda_n=(n-1/2)^2\pi^2,\qquad n=1,2,3,\cdots.$$

而当 β 值介于 0 与 $\pi/2$ 之间时，λ_n 则处于 $(n-1/2)^2\pi^2$ 与 $(n\pi)^2$ 之间. 由图 5.5 可以直观地看到本征值 λ_n 随 β 的变化规律. 例如，当 β 由 0 逐渐增大到 $\pi/2$ 时，$\sqrt{\lambda_1}$ 由 π 逐渐减小到 $\pi/2$.

我们有兴趣于讨论 $\pi/2<\beta<\pi$ 的情形. 如果 $\lambda\neq 0$，超越方程 (5.32) 仍然有无穷多个正根 (本征值) λ_n. 只是值得注意，当 $\pi/2<\beta<3\pi/4$ 时，

$$(n-1)^2\pi^2<\lambda_n<(n-1/2)^2\pi^2,\qquad n=1,2,3,\cdots,$$

即 $\sqrt{\lambda_n}$ 依次出现在第一象限与第三象限. 而如果 $3\pi/4<\beta<\pi$，则

$$(n-1)^2\pi^2<\lambda_n<(n-1/2)^2\pi^2,\qquad n=2,3,4,\cdots.$$

由于 β 由 $(3\pi/4)-$ 变为 $(3\pi/4)+$ 时，本征值的位置发生突变 (见图 5.5)，故而将这些正本征值依次编为 $n=2,3,4,\cdots$. 下面将看到，其实 λ_1 仍然存在，只是变成了负数，而 $\beta=3\pi/4$ 正是出现负本征值的临界值.

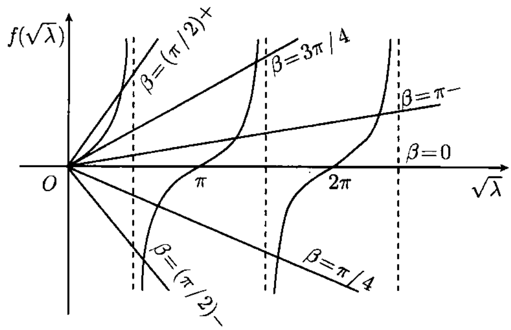


图 5.5　$\tan\sqrt{\lambda}=-\sqrt{\lambda}\tan\beta$ 的根

当 $\lambda = 0$ 时，方程 (5.31a) 的通解为 $y(x) = Ax + B$. 代入边界条件 (5.31b)，得

$$B = 0, \qquad A(\cos\beta + \sin\beta) = 0.$$

因此，如果 $\cos\beta + \sin\beta = 0$，即 $\beta = 3\pi/4$，则 $\lambda = 0$ 为本征值 (即 λ_1)，本征函数为 $y(x) = x$ (取 $A = 1$).

当 $\lambda < 0$ 时，不妨令 $\lambda = -\mu^2$. 这时可将方程 (5.31a) 的通解改写为

$$y(x) = A\sinh\mu x + B\cosh\mu x.$$

代入边界条件 (5.31b)，又得到

$$B = 0, \qquad A(\cos\beta\sinh\mu + \sin\beta\mu\cosh\mu) = 0.$$

因此，本征值 $\lambda = -\mu^2$ 应当是超越方程

$$\mu\tan\beta = -\tanh\mu$$

的解. 由图 5.6 可以看出，$\tanh\mu$ 在 $\mu = 0$ 点的切线斜率 $(\tanh\mu)'\big|_{\mu=0} = 1$，所以只有当 $-\tan\beta > 1$ 即 $3\pi/4 < \beta < \pi$ 时才有一个而且只有一个解 (它对应于本征值 λ_1). 随着 β 的增大，λ_1 单调减小，当 $\beta \to \pi$ 时，$\lambda_1 \to -\infty$.

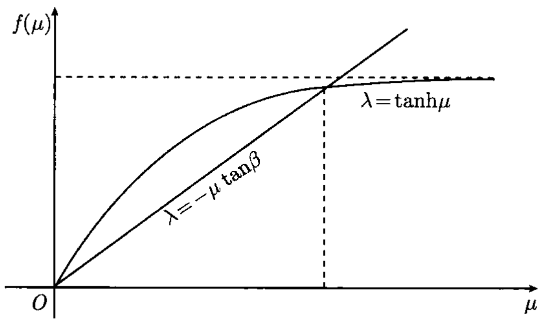


图 5.6 $\tanh\mu = -\mu\tan\beta$ 的根

5.3.2 Sturm-Liouville 问题的 (x, ϕ) 图

自伴微分方程解的零点与自伴边值问题的本征值之间存在着密切的联系. 既然 (x, ϕ) 图是研究第一个问题的有力工具，我们自然就会尝试将它应用于研究第二个问题，例如，本征值的数目及其分布的问题. 仍然可以像 §5.2 中那样，引进函数 $z(x) = p(x)y'(x)$，二阶微分方程 (5.30a) 就转化为一阶微分方程组 (5.23)，而后

引进极坐标 (5.24)，进一步推得新的方程组 (5.25)；在作这些变换的同时，边界条件 (5.30b) 和 (5.30c) 则变为

$$a_{11}y(x_1)+\frac{a_{12}}{p(x_1)}z(x_1)=0,\qquad a_{21}y(x_2)+\frac{a_{22}}{p(x_2)}z(x_2)=0.$$

再引进四个新的常数 A,B,α,β:

$$\begin{aligned}a_{11}&=A\sin\alpha, & a_{21}&=B\sin\beta,\\ \frac{a_{12}}{p(x_1)}&=-A\cos\alpha, & \frac{a_{22}}{p(x_2)}&=-B\cos\beta,\end{aligned}$$

又将边界条件化为

$$\sin\alpha\,\cos\phi(x_1)-\cos\alpha\,\sin\phi(x_1)=0,\qquad \sin\beta\,\cos\phi(x_2)-\cos\beta\,\sin\phi(x_2)=0,$$

即

$$\sin\left[\phi(x_1)-\alpha\right]=0,\qquad \sin\left[\phi(x_2)-\beta\right]=0.$$

因此

$$\phi(x_1)=\alpha+\mu\pi,\qquad \mu=0,1,2,\cdots,\tag{5.33a}$$

$$\phi(x_2)=\beta+\nu\pi,\qquad \nu=0,1,2,\cdots.\tag{5.33b}$$

显然边界条件只是对求函数 $\phi(x)$ 时有直接的影响，一旦有了 $\phi(x)$，$r(x)$ 也就确定了，最多只能相差一个可乘的常数 (见 (5.26) 式).

定理 5.7 设微分方程 (5.30a) 的系数 $p(x),q(x),\rho(x)$ 在区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 内连续，$p(x)$ 可导，$p(x)>0$, $\rho(x)>0$，则存在 λ_0，当 $\lambda\leqslant\lambda_0$ 时，Sturm-Liouville 问题 (5.30) 无解，其中 $a\leqslant x_1<x_2\leqslant b$.

证 证明可分为下列三步：

(1) 先任取一数 M (后面再决定对它的进一步的要求)，并取 λ_0 (它依赖于 M)，使得

$$q(x)+\lambda_0\rho(x)<-M,\qquad a\leqslant x\leqslant b.$$

因 $p(x)$ 在区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上连续，故存在数 m，使得

$$p(x)\geqslant m,\qquad a\leqslant x\leqslant b.$$

现在考虑微分方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(m\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)-My=0.$$

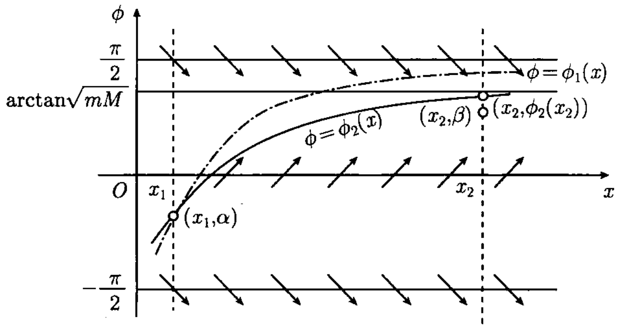


图 5.7 定理 5.7 的证明

把它的解表示为 $y_2(x)$:

$$y_2(x) = c_1 e^{\sqrt{m/M}x} + c_2 e^{-\sqrt{m/M}x},$$

且将它的 ϕ-函数记为 $\phi_2(x)$ (见图 5.7)，则

$$\tan\phi_2(x) = \frac{z_2(x)}{y_2(x)} = \sqrt{mM}\frac{c_1 e^{\sqrt{m/M}x} - c_2 e^{-\sqrt{m/M}x}}{c_1 e^{\sqrt{m/M}x} + c_2 e^{-\sqrt{m/M}x}}.$$

现在求 c_1, c_2，使 $y_2(x)$ 满足边界条件 (5.30b)，即 $\phi_2(x)$ 满足 (5.33a)，比如说，$\phi_2(x_1) = \alpha$，则

$$\tan\alpha = \sqrt{mM}\frac{c_1 e^{\sqrt{m/M}x_1} - c_2 e^{-\sqrt{m/M}x_1}}{c_1 e^{\sqrt{m/M}x_1} + c_2 e^{-\sqrt{m/M}x_1}}$$

必须成立. 这样就唯一决定了比值 c_1/c_2. 换言之，ϕ-函数

$$\phi_2(x) = \arctan\sqrt{mM}\frac{c_1 e^{\sqrt{m/M}x} - c_2 e^{-\sqrt{m/M}x}}{c_1 e^{\sqrt{m/M}x} + c_2 e^{-\sqrt{m/M}x}} \tag{5.34}$$

就完全由 x_1 处的第一个边界条件 (5.30b) 决定，因而就不一定能满足在 x_2 处的第二个边界条件 (5.30c). 另一方面，由 (5.34) 式，我们可以推断出:

(i) $\phi_2(x)$ 有渐近线 $\phi = \arctan\sqrt{mM}$.

(ii) 如果在 $(-\pi/2, \pi/2)$ 内任意取定一值 ϕ_0，我们总能找到一个 M，使得

$$\phi_2(x_2) \geqslant \phi_0, \qquad -\pi/2 < \phi_0 < \pi/2. \tag{5.35}$$

(2) 现在考虑方程 (5.30a) 的解 $y_1(x)$. 可以适当选择叠加常数，使边界条件 (5.30b) 得以满足. 这样，$y_1(x)$ 的 ϕ-函数 $\phi_1(x)$ 就满足 (5.33a) 式，即 $\phi_1(x_1) = \alpha$.

因为 $p_2=m, q_2=-M$，比较引理的修正条件 (见第 124 页有关比较引理的讨论) 完全满足，所以

$$\phi_2(x)<\phi_1(x), \qquad \forall x>x_1.$$

这意味着当 $x>x_1$ 时曲线 $\phi_1(x)$ 一定在 $\phi_2(x)$ 的上面.

(3) 我们的目的是要证明存在 λ_0，只要 $\lambda<\lambda_0$，Sturm-Liouville 问题 (5.30) 就无解；我们还将顺便证明存在数 M，只要在 $a\leqslant x\leqslant b$ 上 $q(x)+\lambda\rho(x)<-M$，$y_1(x)$ 就不可能满足 x_2 处的边界条件 (5.30c)，也就是说，$\phi_1(x_2)=\beta$ 不可能成立.

可以不失普遍性地假设 $-\pi/2<\alpha\leqslant\pi/2$, $-\pi/2<\beta<\pi/2$. 显然 β 不可能等于 $\pi/2$，因为 $\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}x\big|_{\phi=\pi/2}<0$，$\phi_1(x)$ 不可能从下方穿越 $\phi=\pi/2$. 因此我们可以严格地限制 $-\pi/2<\beta<\pi/2$. 我们再选 ϕ_0，使得 $\beta<\phi_0<\pi/2$，并取 M，使得 $\phi_2(x_2)>\phi_0$. 而由于 (5.35)，$\phi_1(x)>\phi_2(x)$，所以 $\phi_1(x)$ 就不可能满足 x_2 处的边界条件 $\phi_1(x_2)=\beta$. 我们唯一要做的就是选择 λ_0，使得

$$\lambda_0<-\frac{M+Q}{R},$$

其中 $Q=\max\limits_{[a,b]}|q(x)|$, $R=\min\limits_{[a,b]}\rho(x)$. □

引理 5.3　设微分方程 (5.30a) 的系数 $p(x),q(x),\rho(x)$ 在区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 内连续，$p(x)$ 可导，$p(x)>0$, $\rho(x)>0$，令 $y(x,\lambda)$ 是方程 (5.30a) 的解 (λ 任意)，且满足在 $x=x_1$ 处的边界条件 (5.30b)，$a\leqslant x_1<x_2\leqslant b$，相应的 ϕ-函数为 $\phi(x,\lambda)$，则 $\phi(x_2,\lambda)$ 随 λ 增大而严格单调下降，即

$$\phi(x_2,\lambda_1)>\phi(x_2,\lambda_2), \qquad 若\ \lambda_1<\lambda_2.$$

证　令 $y(x,\lambda)$ 是方程 (5.30a) 的解 (λ 任意)，且满足在 $x=x_1$ 处的边界条件 (5.30b)，因此，相应的 ϕ-函数 $\phi(x,\lambda)$ 满足 (5.33a). 令 $\lambda_1<\lambda_2$，则

$$q(x)+\lambda_1\rho(x)<q(x)+\lambda_2\rho(x), \qquad a\leqslant x\leqslant b.$$

又因 $\phi(x_1,\lambda_1)=\phi(x_1,\lambda_2)$，按照引理 5.2 的修正，必有

$$\phi(x,\lambda_1)>\phi(x,\lambda_2), \qquad \forall x>x_1.$$

由此即证得

$$\phi(x_2,\lambda_1)>\phi(x_2,\lambda_2).$$ □

引理 5.4　设微分方程 (5.30a) 的系数 $p(x),q(x),\rho(x)$ 在区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 内连续，$p(x)$ 可导，$p(x)>0$, $\rho(x)>0$，令 $y(x,\lambda)$ 是方程 (5.30a) 的解，且满足在 $x=x_1$ 处的边界条件 (5.30b)，$a\leqslant x_1<x_2\leqslant b$，相应的 ϕ-函数为 $\phi(x,\lambda)$，则

$$\lim_{\lambda\to\infty}\phi(x_2,\lambda)=-\infty.$$

证 用反证法. 按照引理 5.3, $\phi(x_2,\lambda)$ 随 λ 增大而严格单调下降, 所以, 当 $\lambda\to\infty$ 时, 要么 $\phi(x_2,\lambda)$ 极限存在, 要么 $\phi(x_2,\lambda)\to-\infty$. 让我们假设

$$\lim_{\lambda\to\infty}\phi(x_2,\lambda)=L. \tag{5.36}$$

因为 $y(x,\lambda)$ 满足边界条件 (5.30b), $\phi(x,\lambda)$ 一定满足 (5.33a), 即 $\phi(x_1,\lambda)=\alpha$. 不失普遍性, 可以假设 $-\pi/2\leqslant\alpha<\pi/2$. 因为 $p(x)>0$, $\rho(x)>0$, 只要 λ 足够大, 就有 $\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}x<0$. 因此, 我们假设

$$\frac{\pi}{2}-k\pi\leqslant L<\frac{\pi}{2}-(k-1)\pi,\qquad k\text{ 为某一正整数}.$$

如果这样, 从 (x_1,α) 点出发的 ϕ-函数不能有超过 k 个 $\pi/2$-交叉点, 即满足在 x_1 点的第一个边界条件的解 $y(x,\lambda)$, 在 $x_1\leqslant x\leqslant x_2$ 上不可能有超过 k 个的零点. 我们现在证明, 解 $y(x,\lambda)$ 在 $x_1\leqslant x\leqslant x_2$ 上至少有 $k+1$ 个零点 (事实上, 可以有任意个零点), 从而说明上面的假设 (5.36) 不正确. 其理由如下: 因为 $p(x),q(x),\rho(x)$ 在 $a\leqslant x\leqslant b$ 上连续, 所以存在常数 M,Q 及 R, 使得

$$p(x)\leqslant M,$$

且对于足够大的 λ, 有

$$q(x)+\lambda\rho(x)\geqslant Q+\lambda R>0.$$

在此基础上, 构造微分方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(M\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big)+(Q+\lambda R)y=0,$$

它有解

$$\overline{y}=A\sin\sqrt{\frac{Q+\lambda R}{M}}(x-\delta).$$

选择 δ, 使 $\overline{y}$ 满足在 x_1 点的边界条件 (5.30b), 或者说, 相应的 ϕ-函数满足 $\overline{\phi}(x_1)=\alpha$. 我们再次引用引理 5.2, 从而得到

$$\overline{\phi}(x)\geqslant\phi(x),\qquad\forall x>x_1.$$

显然我们能选取 λ, 使得 $\overline{y}$ 在 $x_1\leqslant x\leqslant x_2$ 上至少有 $k+1$ 个零点, 相应地, 它的 ϕ-函数 $\overline{\phi}(x)$ 至少有 $k+1$ 个 $\pi/2$-交叉点. 这样, $y(x,\lambda)$ 在 $x_1\leqslant x\leqslant x_2$ 上也必须至少有 $k+1$ 个零点. 证毕. □

定理 5.8 设微分方程 (5.30a) 的系数 $p(x),q(x),\rho(x)$ 在区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 内连续, $p(x)$ 可导, $p(x)>0$, $\rho(x)>0$, 则存在无穷多个本征值 $\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3<\cdots$, 使

Sturm-Liouville 问题 (5.30) 有非零解. 如果 $y(x,\lambda_k)$ 是对应于第 k 个本征值的解，则它在区间 $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ 上比 $y(x,\lambda_{k-1})$ 多一个零点，且 $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\lambda_k=\infty$.

证　关于本征值的分布状况见图 5.8.

首先注意，作为方程 (5.30a) 的解，且在 x_1 点满足边界条件 (5.30b)，函数 $y(x,\lambda)$ 是 λ 的连续函数，因此，$\phi(x,\lambda)$ 及 $\phi(x_1,\lambda)$ 也都是 λ 的连续函数. 现在，我们选择 λ_0，使得 $q(x)+\lambda_0\rho(x)>0$. 解 $y(x,\lambda_0)$ (它在 x_1 点满足边界条件 (5.30b))的 ϕ-函数 $\phi(x,\lambda_0)$ 一定与直线 $x=x_2$ 交于某点 ϕ_0. 若 $\phi_0=\beta$，则 $\phi(x_2,\lambda_0)=\beta$，即 $y(x,\lambda_0)$ 也满足边界条件 (5.30c). 因此 $\lambda=\lambda_0$ 就是第一个本征值.

如果 $\phi_0\neq\beta$，我们能不失普遍性地假设 $\beta-\pi\leqslant\phi_0<\beta$. 现在令 λ 增大，则 $\phi(x_2,\lambda)$ 将单调而连续地下降 (引理 5.3)，直到 $\lambda=\lambda_1$，$\phi(x_2,\lambda_1)=\beta-\pi$. 所以 λ_1 就是第一个本征值. 让 λ 继续增大，到达某一个值 λ_2，$\phi(x_2,\lambda_2)=\beta-2\pi$，即 λ_2 是第二个本征值. 如此继续，我们将能无休止地进行下去 (这是因为按照引理 5.4，$\lim\limits_{\lambda\to\infty}\phi(x_2,\lambda)=-\infty$). 这样，我们就成功地得到本征值 λ_k，使得

$$\phi(x_2,\lambda_k)=\beta-k\pi.$$

而且，因为 $\phi(x_2,\lambda_{k-1})=\beta-(k-1)\pi$，这就说明 $\phi(x_2,\lambda_k)$ 一定比 $\phi(x_2,\lambda_{k-1})$ 多

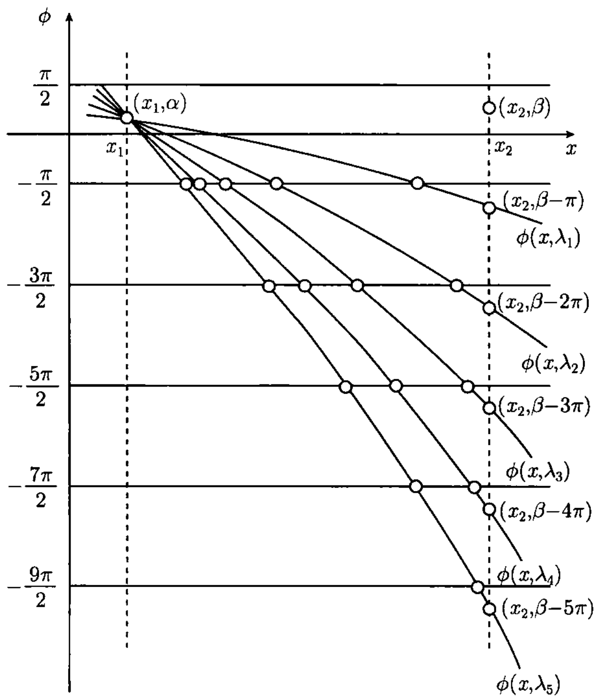


图 5.8　从 (x,ϕ) 图看本征值的分布

一个 $\pi/2$-交叉点，因此 $y(x,\lambda_k)$ 在区间 $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ 上比 $y(x,\lambda_{k-1})$ 多一个零点.

还需要证明 $\lim\limits_{k\to\infty}\lambda_k=\infty$. 用反证法. 假设 $\lim\limits_{k\to\infty}\lambda_k=\Lambda<\infty$，则对于任意小的 $\varepsilon>0$，存在 $N(\varepsilon)$，使得

$$|\lambda_n-\lambda_m|<\varepsilon, \qquad \forall n,m>N(\varepsilon).$$

又因为 $\phi(x_2,\lambda)$ 连续，所以对于任意小的 $\varepsilon_1>0$，存在 $\delta(\varepsilon_1)$，使得

$$|\phi(x_2,\lambda_n)-\phi(x_2,\lambda_m)|<\varepsilon_1, \qquad \forall\,|\lambda_n-\lambda_m|<\delta(\varepsilon_1).$$

令 $\varepsilon_1<\pi$，且 $\varepsilon=\delta(\varepsilon_1)$，则

$$|\phi(x_2,\lambda_n)-\phi(x_2,\lambda_m)|<\pi.$$

然而因为 $\phi(x_2,\lambda_n)=\beta-n\pi$, $\phi(x_2,\lambda_m)=\beta-m\pi$，所以必然有

$$|\phi(x_2,\lambda_n)-\phi(x_2,\lambda_m)|\geqslant\pi.$$

这与原设矛盾，因而证得 $\lim\limits_{k\to\infty}\lambda_k=\infty$. □

总结以上结果，我们能表述为：在一般情形下，Sturm-Liouville 问题无解；然而存在无穷多个值 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\cdots$，使 Sturm-Liouville 问题有非零解. 这些解，称为本征函数. 将本征值由小到大排列，则相应的本征函数在边界条件所规定的区间上有越来越多的零点，后一个本征值所对应的本征函数，总比前一个本征值所对应的本征函数多一个零点.

§5.4 奇异的本征值问题

5.4.1 二阶微分方程的奇异问题

作为一个例子，现在分别考虑区间 $0<x<\infty$ 和 $-\infty<x<\infty$ 上的方程

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+\lambda y=0.$$

在加上边界条件之前，我们先简单考察一下这个方程的解. 设 $\lambda=|\lambda|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $0\leqslant\theta<2\pi$，并约定 $\sqrt{\lambda}=|\lambda|^{1/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}$，因此 $\tau\equiv\mathrm{Im}\sqrt{\lambda}\geqslant 0$，而且只有 $\theta=0$ 时才有 $\tau=0$. 当 $\lambda\neq 0$ 时，微分方程的通解可以写成

$$A\sin\sqrt{\lambda}x+B\cos\sqrt{\lambda}x \qquad \text{或} \qquad C\exp\{\mathrm{i}\sqrt{\lambda}x\}+D\exp\{-\mathrm{i}\sqrt{\lambda}x\};$$

而当 $\lambda=0$ 时，通解为 $Ax+B$.

我们能立即得出下面三个结论:

(1) 对于任何 λ，在 $\mathscr{L}_2^{(c)}(-\infty,\infty)$ 内不存在非零解. 因为

$$\left|\exp\{\mathrm{i}\sqrt{\lambda}x\}\right|^2=\mathrm{e}^{-2\tau x},\qquad \left|\exp\{-\mathrm{i}\sqrt{\lambda}x\}\right|^2=\mathrm{e}^{2\tau x},$$

所以，对于任何 τ (包括 $\tau=0$)，有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\exp\{\mathrm{i}\sqrt{\lambda}x\}\right|^2\mathrm{d}x=\infty,\qquad \int_{-\infty}^{\infty}\left|\exp\{-\mathrm{i}\sqrt{\lambda}x\}\right|^2\mathrm{d}x=\infty.$$

(2) 若 $\mathrm{Im}\sqrt{\lambda}>0$ (即 $\lambda\notin[0,\infty)$)，则在 $\mathscr{L}_2^{(c)}(0,\infty)$ 内有一个解 $C\exp\{\mathrm{i}\sqrt{\lambda}x\}$，在 $\mathscr{L}_2^{(c)}(-\infty,0)$ 内有一个解 $D\exp\{-\mathrm{i}\sqrt{\lambda}x\}$.

(3) 若 $\mathrm{Im}\sqrt{\lambda}=0$ (即 $\lambda\in[0,\infty)$)，则在 $\mathscr{L}_2^{(c)}(0,\infty)$ 或 $\mathscr{L}_2^{(c)}(-\infty,0)$ 内都无解.

5.4.2 奇异问题的 Weyl 分类

考虑齐次方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)+\left[\lambda\rho(x)-q(x)\right]y=0,\qquad a<x<b, \tag{5.37a}$$

或者写成算符形式

$$\boldsymbol{l}\,y+\lambda y=0,\qquad a<x<b, \tag{5.37b}$$

其中

$$\boldsymbol{l}\equiv\frac{1}{\rho}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right]-q(x)\right\}, \tag{5.37c}$$

$p(x)$, $q(x)$, $\rho(x)$ 均为实函数. 我们将在满足

$$\int_a^b|y(x)|^2\,\rho(x)\,\mathrm{d}x<\infty \tag{5.38}$$

的函数组成的空间 $\mathscr{H}_\rho$ 内讨论方程 (5.37) 的解. 此时，内积及范数的定义分别为

$$\langle y_2,y_1\rangle_\rho=\int_a^b y_2^*(x)\,y_1(x)\,\rho(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\|y\|_\rho=\left[\langle y,y\rangle_\rho\right]^{1/2}=\left[\int_a^b|y(x)|^2\,\rho(x)\,\mathrm{d}x\right]^{1/2}.$$

凡是满足 (5.38) 式的函数 $y(x)$，以后称为具有有限的 ρ 范.

由算符 $\boldsymbol{l}$ 的定义，立即可以得到，对于任意二次可微函数 y_1 和 y_2，有

$$\begin{aligned}y_2^*\boldsymbol{l}\,y_1-y_1\boldsymbol{l}\,y_2^*&=-\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{p(x)\left[y_1(y_2^*)'-y_1'y_2^*\right]\right\}\\&=-\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}[p(x)W(y_1,y_2^*;x)]}{\mathrm{d}x},\qquad a<x<b,\end{aligned}$$

其中 $W(y_1,y_2^*;x)\equiv y_1(y_2^*)'-y_1'y_2^*$ 是 y_1 和 y_2^* 的 Wroński 行列式.

现在研究方程在端点奇异的情形，不妨假设方程 (5.37) 在端点 $x=a$ 正则，而在另一端 $x=b$ 奇异. 为了定义 $\int_a^b y_2^*(\boldsymbol{l}\, y_1)\rho(x)\,\mathrm{d}x$ 类型的积分，可任取一点 b_0，使 $a<b_0<b$，则

$$\int_a^{b_0}(y_2^*\boldsymbol{l}\, y_1-y_1\boldsymbol{l}y_2^*)\rho(x)\,\mathrm{d}x=p(a)W(y_1,y_2^*;a)-p(b_0)W(y_1,y_2^*;b_0). \tag{5.39a}$$

要将此公式扩充到整个 (a,b) 区间，就必须要求相关的积分

$$\int_a^b y_2^*(\boldsymbol{l}\, y_1)\rho(x)\,\mathrm{d}x \quad 及 \quad \int_a^b y_1(\boldsymbol{l}\, y_2^*)\rho(x)\,\mathrm{d}x$$

为有限值. 因此就需要局限于 y_1 和 y_1' 均绝对连续且 y_1 和 $\boldsymbol{l}y_1$ 均在(a,b) 上具有有限 ρ 范的函数集合 $\mathscr{D}$. 这样的函数组成了 Hilbert 空间 $\mathscr{H}_\rho$ 的一个子空间. 设 y_1, y_2 均属于 $\mathscr{D}$; 则因为 $\langle y_2,\boldsymbol{l}y_1\rangle_\rho$ 和 $\langle \boldsymbol{l}y_2,y_1\rangle_\rho$ 均存在，故

$$\langle y_2,\boldsymbol{l}y_1\rangle_\rho-\langle \boldsymbol{l}y_2,y_1\rangle_\rho=\lim_{b_0\to b}\big[p(a)W(y_1,y_2^*;a)-p(b_0)W(y_1,y_2^*;b_0)\big]. \tag{5.39b}$$

所以我们断定

$$\lim_{b_0\to b}p(b_0)W(y_1,y_2^*;b_0)$$

一定存在. 此极限即可记为 $p(b)W(y_1,y_2^*;b)$.

令 λ 为复数，$\phi(x)$ 是 $\boldsymbol{l}\,\phi+\lambda\phi=0$ 的解，则我们也有 $\boldsymbol{l}\,\phi^*+\lambda^*\phi^*=0$. 因此，

$$(\lambda-\lambda^*)\,|\phi|^2\,\rho(x)=\langle\phi,\boldsymbol{l}\,\phi\rangle_\rho-\langle\boldsymbol{l}\,\phi,\phi\rangle=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big[p(x)W(\phi,\phi^*;x)\big],$$

进一步就得到

$$2\mathrm{i}(\mathrm{Im}\,\lambda)\int_{a_0}^{b_0}|\phi|^2\,\rho(x)\,\mathrm{d}x=p(a_0)W(\phi,\phi^*;a_0)-p(b_0)W(\phi,\phi^*;b_0). \tag{5.40a}$$

如果 $\phi\in D$，我们有

$$2\mathrm{i}(\mathrm{Im}\,\lambda)\int_a^b|\phi|^2\,\rho(x)\,\mathrm{d}x=p(a)W(\phi,\phi^*;a)-p(b)W(\phi,\phi^*;b). \tag{5.40b}$$

下面就来研究方程 (5.37) 是否存在具有有限 ρ 范的解. 设方程 (5.37) 有一个端点奇异，即或者区间为半无界，或者区间有界，但 $p(x)$ 在一个端点为 0 (同时还可伴有 $q(x)$ 或 $\rho(x)$ 在该点无界). 微分方程的解不再一定属于使 $\int_a^b\rho(x)\,|y_1|^2\,\mathrm{d}x<\infty$ 的函数空间 $\mathscr{H}_\rho$. 下面的 Weyl 定理可以使我们按照 $\mathscr{H}_\rho$ 内解的数目将奇点分类.

定理 5.9 (Weyl 定理)[①] 考虑

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[p(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big]+\big[\lambda\rho(x)-q(x)\big]y=0,\qquad a<x<b, \tag{5.41}$$

其一端正则，而另一端奇异，除 λ 外系数固定．下列结论成立：

(1) 若对于 λ 的某个特殊值，(5.41) 的两个 (线性无关) 解均属于 $\mathscr{H}_\rho$，则对于任何 λ 值，方程 (5.37) 的解仍属于 $\mathscr{H}_\rho$；

(2) 对于 $\mathrm{Im}\,\lambda\neq 0$ 的任意 λ，方程 (5.41) 至少存在一个属于 $\mathscr{H}_\rho$ 的解．

Weyl 定理告诉我们，方程 (5.41) 的奇点一定属于下列两种互不相容情形之一：

极限圆情形：对于所有的 λ，所有的解都属于$\mathscr{H}_\rho$；

极限点情形：对于 $\mathrm{Im}\,\lambda\neq 0$ 的 λ 值，严格地只有一个解在 $\mathscr{H}_\rho$ 内，因此对于 $\mathrm{Im}\,\lambda=0$，$\mathscr{H}_\rho$ 内可以有一个解，也可以没有解．

为了确定属于哪种情形，检查一个 λ 值就足够了．

☞ **评述** 如果两个端点都是奇点，我们可以引进一个中间点 c，$a<c<b$，因此可以按照解在 $a<x<c$ 内的行为将 a 点分类，按照解在 $c<x<b$ 内的行为将 b 点分类．

分类显然与 c 点的选择无关．

例 5.4 设有方程 $y''+\lambda y=0$，这里 $p(x)=\rho(x)=1$．考虑下列三种情形：

(1) 在区间 $a<x<\infty$ 上，a 为有限值．这时 $\mathscr{H}_\rho=\mathscr{L}_2^{(c)}(a,\infty)$．点 a 正则，但右端 $b=\infty$ 奇异．若 $\lambda=0$，方程的通解为 $Ax+B$，在 $\mathscr{L}_2^{(c)}(a,\infty)$ 内无解，这意味着奇点 $b=\infty$ 属于极限点情形．容易核查 Weyl 定理的预言：对于 $\mathrm{Im}\,\lambda\neq 0$，严格地只有一个解在 $\mathscr{L}_2^{(c)}(a,\infty)$ 内．若取方程 $y''+\lambda y=0$ 的通解为

$$y(x)=A\exp\{\mathrm{i}\sqrt{\lambda}x\}+B\exp\{-\mathrm{i}\sqrt{\lambda}x\},$$

并规定 $0\leqslant\arg\lambda<2\pi$，则容易验证：当 $\lambda\notin[0,\infty)$ 时，$\sqrt{\lambda}$ 的虚部为正，$\exp(\mathrm{i}\sqrt{\lambda}x)$ 在 $\mathscr{L}_2^{(c)}(a,\infty)$ 内，而 $\exp(-\mathrm{i}\sqrt{\lambda}x)$ 则否；当 $\lambda\in[0,\infty)$ 时，在 $\mathscr{L}_2^{(c)}(a,\infty)$ 内无解．

(2) 在区间 $-\infty<x<b$ 上，b 有限．奇点 (现在是左端 $a=-\infty$) 仍属于极限点情形．

(3) 在区间 $-\infty<x<\infty$ 上．可综合 (1) 和 (2) 的结果：两个端点都属于极限点情形．

例 5.5 考虑具有参数 λ 的 0 阶 Bessel 方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big)+\lambda xy=0,\quad p(x)=\rho(x)=x. \tag{5.42}$$

① 证明从略，有兴趣的读者可查阅文献：M. Hajmirzaahmad, A. M. Krall, *Singular Second-Order Operator* (SIAM Rev. 34). 1992.

(1) 在 $0<x<b$ 上，b 有限. 空间 $\mathscr{H}_\rho$ 由 $\int_0^b x\,|y|^2\,\mathrm{d}x<\infty$ 的函数 y 组成. $p(0)=0$，故 $x=0$ 为奇点. 对于 $\lambda=0$，方程 (5.42) 退化为更简单的 Euler 型方程，有线性无关解 $y_1(x)=1$ 和 $y_2(x)=\ln x$. 由于积分 $\int_0^b x\,y_1^2\,\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^b x\,y_2^2\,\mathrm{d}x$ 均有限，因此，$x=0$ 属于极限圆情形. 这与下列事实一致：对于任意 λ，线性无关解能取为 $\mathrm{J}_0(\sqrt{\lambda}x)$ 和 $\mathrm{N}_0(\sqrt{\lambda}x)$，前者在 $x=0$ 有限，后者在 $x=0$ 对数发散；两个解都是在 $\mathscr{H}_\rho$ 内.

(2) 在 $a<x<\infty$ 上，$a>0$. 右端奇异，但左端正则. 空间 $\mathscr{H}_\rho$ 由 $\int_a^\infty x\,|y|^2\,\mathrm{d}x<\infty$ 的函数 y 组成. 因为 $\lambda=0$ 时的线性无关解 1 和 $\ln x$ 都不在 $\mathscr{H}_\rho$ 内，因此 ∞ 点属于极限点情形. 注意，若 $\lambda\notin[0,\infty)$，$\mathrm{H}_0^{(1)}(\sqrt{\lambda}x)$ 是唯一属于 $\mathscr{H}_\rho$ 的解；若 $\lambda\in[0,\infty)$，则 (在 $\mathscr{H}_\rho$ 内) 无解.

(3) 在 $0<x<\infty$ 上. 两端均为奇点，将 (1) 和 (2) 结合起来即可.

例 5.6　考虑方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big)+\frac{\lambda}{x}y=0,\qquad 0<x<\infty. \tag{5.43}$$

此时 $p(x)=x$, $\rho(x)=1/x$. 如果 $\lambda=0$，方程有线性无关解 $y_1=1$ 和 $y_2=\ln x$. 因为对于任意 $A>0$，有

$$\int_0^A\rho\,y_1^2\,\mathrm{d}x=\int_0^A\frac{\mathrm{d}x}{x}=\infty,\qquad \int_0^A\rho\,y_2^2\,\mathrm{d}x=\int_0^A\frac{\ln^2 x}{x}\mathrm{d}x=\infty,$$

所以 $x=0$ 点属于极限点的情形. 事实上，对于 $\lambda\neq0$，方程的两个线性无关解为 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{\lambda}\ln x}$ 和 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{\lambda}\ln x}$；如果 $\lambda\notin(0,\infty)$，则只有第二个解在区间 $(0,A)$ 上属于 $\mathscr{H}_\rho$；而如果 $\lambda\in(0,\infty)$，则两个解都不属于 $\mathscr{H}_\rho$. 和例 5.5(1) 作比较，就可以看出奇点的分类如何依赖于 $\rho(x)$.

对于 $x=\infty$，我们注意，若取 $\lambda=0$，则有

$$\int_A^\infty\rho\,y_1^2\,\mathrm{d}x=\infty,\qquad \int_A^\infty\rho\,y_2^2\,\mathrm{d}x=\infty,$$

所以 $x=\infty$ 点也属于极限点情形.

例 5.7　考虑 Hermite 方程

$$y''-2xy'+2\lambda=0,\qquad -\infty<x<\infty. \tag{5.44}$$

每个端点都是奇异的. 容易将此方程化为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\mathrm{e}^{-x^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big)+2\lambda\mathrm{e}^{-x^2}y=0, \tag{5.44$'$}$$

从而求得 $\rho(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$. $\lambda = 0$ 时方程 (5.44) 有线性无关解 $y_1(x) = 1$ 和 $y_2(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$. 因为

$$\int_{-\infty}^{0} |y_1|^2 \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x \text{ 与 } \int_0^{\infty} |y_1|^2 \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x \text{ 均存在,}$$

而

$$\int_{-\infty}^{0} |y_2|^2 \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x \text{ 与 } \int_0^{\infty} |y_2|^2 \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x \text{ 均不存在,}$$

所以两个端点都是极限点情形.

例 5.8 考虑 Legendre 方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right] + \lambda y = 0, \qquad -1 < x < 1. \tag{5.45}$$

此时 $p(x) = 1 - x^2$, $\rho(x) = 1$. 因为 $p(-1) = p(1) = 0$，所以两个端点 $x = \pm 1$ 都是奇点. 对于 $\lambda = 0$，方程有线性无关解 $y_1(x) = 1$ 和 $y_2(x) = \ln(1+x) - \ln(1-x)$. 对于任何 A，$-1 < A < 1$，积分 $\int_{-1}^{A} |y_1|^2 \mathrm{d}x$, $\int_{-1}^{A} |y_2|^2 \mathrm{d}x$, $\int_{A}^{1} |y_1|^2 \mathrm{d}x$ 及 $\int_{A}^{1} |y_2|^2 \mathrm{d}x$ 均有限，因此两个端点都属于极限圆情形.

5.4.3 极限圆情形下的本征值问题

设 $x = a$ 是正则点，$x = b$ 为奇点，处于极限圆情形. 在正则点处，我们加上边界条件

$$y(a)\cos\alpha - y'(a)\sin\alpha = 0. \tag{5.46}$$

其中系数为实数. 在奇点 $x = b$ 处，也必须加上适当的边界条件. 但是，我们不能简单模仿正则点的情形，因为 $y(b)$ 和 $y'(b)$ 可以是无穷，所以通常关于 $y(b)$ 和 $y'(b)$ 的条件失去意义. 然而，可以把正则点处的边界条件加以改写，使之允许推广到奇异的极限圆问题. 这正是重复 Weyl 定理的证明过程. 为此目的，可以将

$$p(b)W(y, y^*; b) = 0 \tag{5.47}$$

看成在 b 点的边界条件，等价于加在正则点 $x = a$ 处的实系数边界条件①. 奇点 (一个或两个端点) 属于极限圆情形的问题十分类似于正则问题. 在奇点处的边界条件可以用略为间接的方式 (如 (5.47) 式中那样) 指定，这样本征值问题也产生离散谱以及常见的本征函数形式. 它同正则情形的可能差别在于本征值 $|\lambda_n| \to \infty$ 而非 $\lambda_n \to \infty$.

① 可以证明，当 $\mathrm{Im}\,\lambda \neq 0$ 时，除了零解之外，$l\,y + \lambda y = 0$ 的解不能既满足 $p(a)W(y, y^*; a) = 0$，又满足 $p(b)W(y, y^*; b) = 0$. 这可以从 Weyl 定理的证明中看出.

例 5.9 考虑 0 阶 Bessel 方程 (见例 5.5)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)+\lambda xy=0 \tag{5.48}$$

在区间 $0<x<1$ 上的本征值问题. 在正则端点 $x=1$ 处，我们加上边界条件 $y(1)=0$. 在奇异端点 (属于极限圆情形) $x=0$ 处，我们加上与 (5.47) 式相同的边界条件，即 $p(0)W(y,z^*;0)=0$，其中的辅助函数 z 待定. 由前面的理论可知，z 能取为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)+\lambda_0 z=0 \tag{5.49}$$

的解，其中 $\operatorname{Im}\lambda_0\neq 0$, $p(0)W(z,z^*;0)=0$. 然而也可以用实数 λ_0 值，只要选取 z 与同一方程在正则点处满足边界条件的解 v 线性无关即可.

取 $\lambda_0=0$，则方程 (5.49) 有线性无关解 1 和 $\ln x$. 取 $v(x)=\ln x$，而另一个独立解为 $z=-1+A\ln x$ 的倍乘解，其中 A 为实数. 由于 $z=z^*$，因而 $p(0)W(z,z^*;0)=0$ 一定成立. 这样选定的 z 的特殊形式给出 $p(x)W(z^*,v;x)=-1$. 固定 A，条件 $p(0)W(y,z^*;0)=0$ 就变为

$$\lim_{x\to 0}\left[Ay-(A\ln x-1)xy'\right]=0.$$

对于每一个实的 A，我们能够考虑本征值问题

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)+\lambda xy=0,\qquad 0<x<1, \tag{5.50a}$$

$$y(1)=0,\qquad \lim_{x\to 0}\left[Ay-(A\ln x-1)xy'\right]=0. \tag{5.50b}$$

取不同的 A 值就导致不同的本征值及本征函数.

考虑 $A=0$ 的特殊情形，这时 $x=0$ 端的边界条件是

$$\lim_{x\to 0}xy'=0. \tag{5.51}$$

$\lambda\neq 0$ 时方程 (5.48) 的线性无关解是 $\mathrm{J}_0(\sqrt{\lambda}r)$ 和 $\mathrm{N}_0(\sqrt{\lambda}r)$，其中只有 $\mathrm{J}_0(\sqrt{\lambda}r)$ 满足 (5.50) 式. 边界条件 (5.51) 等价于通常的“有界条件”，其效果都是挑选 $\mathrm{J}_0(\sqrt{\lambda}r)$ 作为许可的解. 更进一步，$x=1$ 处的边界条件意味着 $\mathrm{J}_0(\sqrt{\lambda})=0$，它给出正本征值的序列 $\{\lambda_k\}$，相应的未归一化的本征函数为 $\mathrm{J}_0(\sqrt{\lambda_k}r)$，而归一化的本征函数

$$y_k(x)=\frac{\sqrt{2}}{\mathrm{J}_0'(\sqrt{\lambda_k})}\mathrm{J}_0(\sqrt{\lambda_k}x) \tag{5.52}$$

就构成了 $\mathscr{H}_\rho$ 内的正交归一基，即有

$$\int_0^1 y_k(x)y_j^*(x)\,x\,\mathrm{d}x=\delta_{kj}.$$

前面已经提到，A 的不同选取能得到不同的本征函数组．为了求出 $A \neq 0$ 时的本征函数，我们可令

$$y = C\mathrm{J}_0(\sqrt{\lambda}x) + D\mathrm{N}_0(\sqrt{\lambda}x),$$

并且先应用 $x=0$ 处的边界条件．注意在 $x=0$ 附近，有

$$\mathrm{J}_0(\sqrt{\lambda}x) \sim 1, \qquad \mathrm{N}_0(\sqrt{\lambda}x) \sim \frac{2}{\pi}\ln\frac{\sqrt{\lambda}x}{2} + \frac{2\gamma}{\pi},$$
$$\mathrm{J}_0'(\sqrt{\lambda}x) \sim 0, \qquad \mathrm{N}_0'(\sqrt{\lambda}x) \sim \frac{2}{\pi\sqrt{\lambda}x},$$

其中 γ 为 Euler 常数，这样就定出

$$\frac{D}{C} = -\frac{\pi}{2}\frac{A}{1+A[\gamma+\ln(\sqrt{\lambda}/2)]}.$$

应用 $x=1$ 处的边界条件，我们就导出 λ 必须满足

$$\mathrm{J}_0(\sqrt{\lambda}) + A\left(\gamma + \ln\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\right)\mathrm{J}_0(\sqrt{\lambda}) - \frac{\pi A}{2}\mathrm{N}_0(\sqrt{\lambda}) = 0.$$

将此方程的根记为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k, \cdots$，则本征函数正比于

$$y_k(x) = \mathrm{J}_0(\sqrt{\lambda_k}x) - \frac{\pi}{2}\frac{A}{1+A[\gamma+\ln(\sqrt{\lambda_k}/2)]}\mathrm{N}_0(\sqrt{\lambda_k}x). \tag{5.53}$$

5.4.4 极限点情形下的本征值问题

仍然在 $\mathscr{H}_\rho$ 中讨论方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) + \big[\lambda\rho(x) - q(x)\big]y = 0. \qquad a < x < b, \tag{5.54}$$

如果端点 a 正则，端点 b 奇异，处于极限点情形，通常在 $x=a$ 附加上 (5.46) 型的条件，但在 b 点就不能加上任何条件．因为按照 Weyl 定理，对于任意 λ，方程 (5.54) 最多只能有一个解属于 $\mathscr{H}_\rho$．因此，可以预见，对于这类本征值问题，不外乎会出现下面两种结果：

(1) 当 $\mathrm{Im}\,\lambda = 0$ 时，方程 (5.54) 有一个解属于 $\mathscr{H}_\rho$，例如，记为 $y_1(x,\lambda)$，再代入边界条件 (5.46)，判断是否有解．或者换一种说法，我们也可以先求出既满足方程 (5.54)、又满足边界条件 (5.46) 的解，而后讨论它是否属于 $\mathscr{H}_\rho$．

(2) 方程 (5.54) 的解全不属于 $\mathscr{H}_\rho$，因此，本征值问题无解．

如果两个端点 a 和 b 都属于极限点情形，可以在区间 $a \leqslant x \leqslant b$ 内任取一点 c，因此只有 $y_1(x,\lambda)$ 既属于 $\mathscr{H}_\rho(a,c)$，又属于 $\mathscr{H}_\rho(c,b)$ 时，换言之，只有 $y_1(x,\lambda) \in \mathscr{H}_\rho(a,b)$ 时，本征值问题才有可能有解．

例 5.10 在例 5.7 中已经讨论过 Hermite 方程

$$y'' - 2xy' + 2\lambda y = 0, \qquad -\infty < x < \infty, \tag{5.55a}$$

它的两个奇点 $x = \pm\infty$ 都属于极限点情形.

首先在 $0 \leqslant x < \infty$ 上求解相关的本征值问题，而在 $x = 0$ 端的边界条件为

$$y(0) = 0. \tag{5.55b}$$

由常微分方程幂级数解法，可以求得既满足方程 (5.55a)、又满足边界条件 (5.55b) 的解

$$y(x) = c_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} \frac{\Gamma\left(k + \dfrac{1-\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{1-\lambda}{2}\right)} (2x)^{2k+1}.$$

由于当 k 足够大时，x^{2k+1} 项的系数为

$$\text{常数} \times \frac{2^{2k+1}}{\Gamma(2k+2)} \Gamma\left(k + \frac{1-\lambda}{2}\right) \sim \text{常数} \times \frac{1}{k^{k+(\lambda+3)/2} \mathrm{e}^{-k}},$$

所以当 x 足够大时 $y(x)$ 的行为与函数

$$\text{常数} \times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(k+2+\lambda/2)} x^{2k+1}$$

相同. 在 λ 为实数的条件下[①]，则因

$$\frac{1}{(k+k_0+3)!} \leqslant \frac{1}{\Gamma(k+2+\lambda/2)} \leqslant \frac{1}{(k+k_0+2)!},$$

其中 $k_0 = [\lambda/2]$，故有

$$x^{-5-2k_0}\left(\mathrm{e}^{x^2} - \sum_{k=0}^{k_0+2} \frac{x^{2k}}{k!}\right) \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{\Gamma(k+2+\lambda/2)} \leqslant x^{-3-2k_0}\left(\mathrm{e}^{x^2} - \sum_{k=0}^{k_0+1} \frac{x^{2k}}{k!}\right).$$

这样就能判断，在一般情形下，作为无穷级数解的 $y(x)$，

$$\int_0^{\infty} y^2(x)\, \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x \text{ 发散},$$

除非

$$\text{本征值} \quad \lambda_n = 2n+1, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots, \tag{5.56a}$$

① 不难证明，此本征值问题如果有解，本征值 λ 一定为实数.

相应的本征函数便是 $2n+1$ 阶 Hermite 多项式

$$\mathrm{H}_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{(2k+1)!} \frac{(2n+1)!}{(n-k)!}(2x)^{2k+1} \tag{5.56b}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k}}{k!} \frac{(2n+1)!}{(2n-2k+1)!}(2x)^{2n-2k+1}, \tag{5.56c}$$

这相当于在上面的 $y(x)$ 中代入 $\lambda = 2n+1$，并取 $c_1 = (-1)^n(2n+1)!/n!$.

同样，如果 $x=0$ 端的边界条件为

$$y'(0) = 0, \tag{5.55c}$$

则既满足方程 (5.55a)、又满足边界条件 (5.55c) 的解为

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} \frac{\Gamma(k-\lambda/2)}{\Gamma(-\lambda/2)}(2x)^{2k}.$$

重复上面类似的讨论，就能得到本征值

$$\lambda_n = 2n, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots, \tag{5.57a}$$

而本征函数为 $2n$ 阶 Hermite 多项式

$$\mathrm{H}_{2n}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{(2k)!} \frac{(2n)!}{(n-k)!}(2x)^{2k} \tag{5.57b}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k}}{k!} \frac{(2n)!}{(2n-2k)!}(2x)^{2n-2k}. \tag{5.57c}$$

也可以在空间 $\mathscr{H}_\rho(-\infty, \infty)$ 内求方程 (5.55a) 的解，这正好就是上面两种情形的总和：

$$\text{本征值} \qquad \lambda_n = n, \qquad\qquad n = 0, 1, 2, \cdots, \tag{5.58a}$$

$$\text{本征函数} \qquad \mathrm{H}_n(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^{k}}{k!} \frac{n!}{(n-2k)!}(2x)^{n-2k}. \tag{5.58b}$$

例 5.11　考虑例 5.6 中的方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right] + \frac{\lambda}{x}y = 0, \qquad 0 < x < \infty. \tag{5.59}$$

$x=0$ 与 ∞ 都属于极限点情形．由于当 λ 为实数时，方程的解都不属于 $\mathscr{H}_\rho(0, A)$ 或 $\mathscr{H}_\rho(A, \infty)$，因此，此本征值问题无解．

第六章 广 义 函 数

为了准确理解常微分方程与偏微分方程的 Green 函数问题，需要建立广义函数的概念.

我们熟悉的第一个“广义函数”是 Dirac 的 δ 函数 $\delta(x)$. 作为粗略的理解，这个函数除了在 $x=0$ 点为 ∞ 外，处处为 0，而其积分为 1. 按照函数及积分的定义，没有一个传统意义下的函数 (以下称为经典函数) 能够具有这个性质.

通常将 δ 函数理解为函数序列的极限：设想有一个函数序列，它们在 $x=0$ 处有逐渐升高而又逐渐变陡的高峰，曲线下的面积保持为 1，同时函数在每一点的值趋于 0，但 $x=0$ (在该点函数的值趋于无穷) 除外. 甚至还可以对 $\delta(x)$ 进行“微分”和“积分”，从而得到广义函数 $\delta'(x)$ 和单位阶跃函数 (即 Heaviside 函数) $\eta(x)$.

这样引进的 $\delta(x)$, $\delta'(x)$, $\eta(x)$ 等等，都属于广义函数. 它们都不是传统意义下的函数.

利用函数序列定义广义函数，是数学物理方法课程中常常采用的方法. 这种方法的优点是形象直观. 如此定义广义函数，理所当然地需要辅之以明确规定必需的运算法则. 事实上，如果笼统地、无条件地说广义函数可以像普通函数那样微分或积分，并不一定正确，有时甚至会导出明显荒谬的结果. 正是基于这一理由，本章将简要介绍广义函数的基本概念与运算规则. 这对于正确理解和正确运用广义函数至为重要.

§6.1 线 性 泛 函

6.1.1 线性泛函是函数概念的推广

回忆一下定义在$\mathscr{R}_n$ 上的连续实函数. 所谓函数 f，本质上是一个对应关系或法则，它把 $\mathscr{R}_n$ 上的每一点 x 和相应的实数 (称之为 f 在 x 点的值) $y=f(x)$ 联系起来.

我们其实也曾经采用间接的方式定义过函数 f. 例如，在普通的 Fourier 级数中，若 f 是 $0\leqslant x\leqslant\pi$ 上的可微实函数，则 f 可以由 Fourier 正弦系数 $b_n=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi f(x)\sin nx\mathrm{d}x$ 表征. 反之，能够由 Fourier 正弦系数通过 Fourier 级数重构出 $f(x)$. 值得强调的是：从概念上说，不论是否存在重构公式，$f(x)$ 总可以毫不含糊地由这些系数确定. 这种做法的实质是，有别于通过逐点 x 给定 f 的数值 (函数值 $f(x)$) 定义函数的办法，我们可以采用一种新的替代办法，即对于属于辅助函数类 (即上面的 $\sin x,\sin 2x,\cdots$) 中的每一个函数 ϕ，给出实数 $\displaystyle\int_{\mathscr{R}_n}f(x)\phi(x)\mathrm{d}x$；或

者说，f 是一个对应关系，它将此辅助函数类上的任意一个函数和相应的实数值 $\int_{\mathscr{R}_n} f(x)\phi(x)\mathrm{d}x$ 联系起来，即 f 是此辅助函数类上的泛函. 这里的辅助函数类 ϕ，作为定义 f 的载体，当然需要满足一定的要求. 引进辅助函数空间上的泛函，目的不仅是要给出函数的另一种描述方式，更重要的是，这种新观点将允许我们定义经典函数所不能描写的对应关系. 适当选定 ϕ 所属的辅助函数类，我们能够用泛函定义 δ 函数之类的奇异函数.

最适当的辅助函数类是非常平滑的函数 (称为检验函数) 构成的函数类.

6.1.2 检验函数

先引进关于函数支集的概念.

定义 6.1 函数 $f(x)$ 的**支集**是 $\mathscr{R}_n$ 内 $f(x)\neq 0$ 的点的全体构成的点集的闭包 (即 $f(x)\neq 0$ 的点集及这个点集的极限点).

在此基础上就可以建立检验函数的定义.

定义 6.2 检验函数 $\phi(x)=\phi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是在 $\mathscr{R}_n$ 上无限可微[①]且有有限支集[②]的函数. $\mathscr{R}_n$ 上全部检验函数的空间表示为 $\mathscr{C}_0^\infty(\mathscr{R}_n)$，简写为 $\mathscr{C}_0^\infty$.

☞ **评述**

1. 若 $\phi_1(x),\phi_2(x)$ 是 $\mathscr{R}_n$ 上的检验函数，则对于任何实数 ε_1 和 ε_2，$\varepsilon_1\phi_1+\varepsilon_2\phi_2$ 也是 $\mathscr{R}_n$ 上的检验函数. 因此 $\mathscr{C}_0^\infty(\mathscr{R}_n)$ 是实线性空间.

2. (非零) 检验函数的存在性.

在 $\mathscr{R}_1$ 上，检验函数 $\phi(x)$ 可以在区间 $a<x<b$ 外恒为 0，但在区间内必须取非零值，甚至 ϕ 在 $x=a$ 和 $x=b$ 点的各阶导数可以为 0. 难以设想在 a 和 b 如此“平滑”的函数如何能异于零函数. 事实上，如果 $\phi(x)$ 能在 $x=a$ 点展开为收敛半径不为 0 的 Taylor 级数，则 $\phi(x)$ 必恒为 0，因为在 $x=a$ 点的各阶导数均为 0. 关于检验函数的经典例子是:

$$\phi(x)=\begin{cases}\exp\left\{\dfrac{1}{x^2-1}\right\}, & |x|<1,\\ 0, & |x|\geqslant 1,\end{cases}\tag{6.1}$$

如图 6.1 所示. 毫无疑问，ϕ 在 $x\neq\pm 1$ 处无限可微. 至于在 $x=\pm 1$ 两点，显然

$$\lim_{x\to\pm 1\mp}\exp\left\{\frac{1}{x^2-1}\right\}=0,$$

因此 $\phi(x)$ 在 $x=\pm 1$ 连续. 而由于

$$\lim_{t\to\infty}t^m\mathrm{e}^{-t}=0,\qquad m=0,1,2,\cdots,$$

① 这意味着各种次序的任意阶偏导数存在.

② 即在一定有界区域 (检验函数 $\phi(x)$ 不同，此有界区域可以不同) 外恒为 0.

作变换 $t=1/(1-x^2)$，则有

$$\lim_{x\to\pm1\mp}\frac{1}{(x^2-1)^m}\exp\left\{\frac{1}{x^2-1}\right\}=0,$$

这样就能证明 ϕ 在 $x=\pm1$ 的各阶导数均为 0.

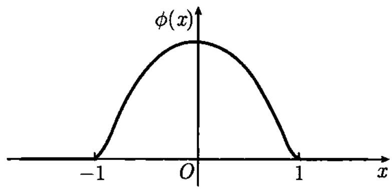


图 6.1 检验函数 $\phi(x)$

类似地，$\mathscr{R}_n$ 上的球对称检验函数可取为

$$\phi(x)=\begin{cases}\exp\left\{\dfrac{1}{|x|^2-1}\right\}, & |x|<1,\\ 0, & |x|\geqslant 1,\end{cases}\tag{6.2}$$

在本章中约定将坐标 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 简写为 x，而 $|x|=r$ 是径向坐标 (即到原点的距离，$\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$).

根据检验函数的上述定义，可以导出它的下列性质：

(1) 若 $\phi(x)\in\mathscr{C}_0^\infty(\mathscr{R}_n)$，则 $\phi(x)$ 的各阶导数亦然；

(2) 若 $\phi(x)\in\mathscr{C}_0^\infty(\mathscr{R}_n)$，且 $a(x)$ 无限可微，则 $a(x)\phi(x)\in\mathscr{C}_0^\infty(\mathscr{R}_n)$；

(3) 若 $\phi(x_1,\cdots,x_m)\in\mathscr{C}_0^\infty(\mathscr{R}_m)$, $\psi(x_{m+1},\cdots,x_n)\in\mathscr{C}_0^\infty(\mathscr{R}_{n-m})$，则

$$\phi(x_1,\cdots,x_m)\psi(x_{m+1},\cdots,x_n)\in\mathscr{C}_0^\infty(\mathscr{R}_n).$$

6.1.3 检验函数空间 $\mathscr{C}_0^\infty$ 内的收敛性

在建立检验函数空间内的收敛概念之前，需要先引进关于偏导数和微分算符的简写记号. 令 $k_1,\cdots,k_n$ 为非负整数，$k=(k_1,\cdots,k_n)$ 称为 n 维多重指标. 定义

$$|k|=k_1+\cdots+k_n \qquad 及 \qquad D^k=\frac{\partial^{|k|}}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_n^{k_n}}=\frac{\partial^{k_1+\cdots+k_n}}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_n^{k_n}}.$$

如果 k 的某一分量为 0，则应理解为不含有对相应自变量的偏导数. 例如，$n=3$，$k=(2,0,5)$，则

$$D^k=\frac{\partial^7}{\partial x_1^2\partial x_3^5}.$$

应用这种简写记号，即可将 n 个自变量的任意 p 阶线性微分算符 $\boldsymbol{L}$ 写成

$$\boldsymbol{L}=\sum_{|k|\leqslant p} a_k(x)D^k, \tag{6.3}$$

其中系数 $a_k(x)=a_{k_1,\cdots,k_n}(x_1,\cdots,x_n)$ 是任意函数.

为了建立 $\mathscr{C}_0^\infty(\mathscr{R}_n)$ 内的收敛性概念，等价的办法就是定义 $\mathscr{C}_0^\infty(\mathscr{R}_n)$ 内的**零序列**. 我们称检验函数序列 $\{\phi_1(x),\cdots,\phi_m(x),\cdots\}$ 是 $\mathscr{C}_0^\infty(\mathscr{R}_n)$ 内的零序列，当且仅当下列条件成立:

(1) 存在一个共同的有界区域，在区域之外所有的 $\phi_m(x)$ 均为 0 (即所有 $\phi_m(x)$, $m=1,2,\cdots$ 的支集一定包含在一个足够大的球域内)；

(2) 对于每一个 n 维的多重指标 k，有

$$\lim_{m\to\infty}\max_{x\in\mathscr{R}_n}\left|D^k\phi_m(x)\right|=0.$$

所谓 $\{\phi_m(x)\}$ 是 $\mathscr{C}_0^\infty(\mathscr{R}_n)$ 内的零序列，意味着 $\{\phi_m(x)\}$ 及其各阶导数均在 $\mathscr{R}_n$ 内一致地趋于 0.

§6.2　广 义 函 数

6.2.1　广义函数的定义

定义 6.3　如果对于 $\mathscr{C}_0^\infty$ 内的每一个 $\phi(x)$，总能 (按照约定的法则) 确定一个实数，记为 $\langle f,\phi\rangle$，使得对于所有的实数 α_1, α_2 及 $\mathscr{C}_0^\infty$ 内的所有 ϕ_1, ϕ_2，有

$$\langle f,\alpha_1\phi_1+\alpha_2\phi_2\rangle=\alpha_1\langle f,\phi_1\rangle+\alpha_2\langle f,\phi_2\rangle,$$

则称 f 是 $\mathscr{C}_0^\infty$ 上的**线性泛函**.

实数 $\langle f,\phi\rangle$ 是 f 作用在 ϕ 的**值**，或者说，是 f 在 ϕ 上的**作用**.

注意对于任何线性泛函，我们总有

$$\langle f,0\rangle=0 \qquad \text{及} \qquad \left\langle f,\sum_{k=1}^m\alpha_k\phi_k\right\rangle=\sum_{k=1}^m\alpha_k\langle f,\phi_k\rangle.$$

定义 6.4　已知 $\{\phi_m(x)\}$ 是 $\mathscr{C}_0^\infty$ 内的零序列，f 是 $\mathscr{C}_0^\infty$ 上的线性泛函，若当 $m\to\infty$ 时 $\langle f,\phi_m\rangle$ 趋于 0，则称线性泛函 f **连续**.

定义 6.5　$\mathscr{C}_0^\infty$ 上的连续线性泛函称为 (n 维) **广义函数**.

如果 f_1, f_2 是任意两个广义函数，c_1, c_2 是任意常数，定义 $f=c_1f_1+c_2f_2$ 为

$$\langle f,\phi\rangle\triangleq c_1\langle f_1,\phi\rangle+c_2\langle f_2,\phi\rangle,$$

则 f 也满足广义函数的所有条件. 因此 n 维广义函数也构成线性空间 (记为 $\mathscr{D}_n$).

广义函数是经典数学中函数概念的推广. 一方面，经典函数也能看成广义函数，或者说，广义函数涵盖了经典函数作为它的特殊情形; 另一方面，建立起广义函数的概念，使我们能处理像 δ 函数这样超乎常规的“函数”.

6.2.2 作为广义函数的局部可积函数

定义 6.6 若对于 $\mathscr{R}_n$ 内的任何有界域 Ω，积分 $\int_\Omega |f|\,\mathrm{d}x$ 存在，则称函数 $f(x)$ **局部可积**.

连续函数和分段连续函数都是局部可积函数.

定理 6.1 $\mathscr{R}_n$ 中的局部可积函数 $f(x)$ 通过法则

$$\begin{aligned}\langle f,\phi\rangle &\triangleq \int_{\mathscr{R}_n} f(x)\,\phi(x)\,\mathrm{d}x\\ &\equiv \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1,\cdots,x_n)\,\phi(x_1,\cdots,x_n)\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n\end{aligned}\tag{6.4}$$

定义相应的 (n 维) 广义函数 f.

证 显然 (6.4) 式已经定义了 $\mathscr{C}_0^\infty$ 上的线性泛函. 为了证明它的连续性，可取 $\{\phi_m(x)\}$ 为零序列. 零序列中所有元素在有限球域 Ω 外均为 0，则

$$|\langle f,\phi_m\rangle| < \left(\max_{x\in\Omega}|\phi_m(x)|\right)\int_\Omega |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

因为 $\{\phi_m(x)\}$ 为零序列，$\lim\limits_{m\to\infty}\max\limits_{x\in\Omega}|\phi_m(x)|=0$，而 f 局部可积，即积分 $\int_\Omega |f(x)|\,\mathrm{d}x$ 为有限值，因此一定有

$$\lim_{m\to\infty}\langle f,\phi_m\rangle = 0,$$

即泛函 (6.4) 连续，所以 f 是广义函数. □

例 6.1 令 c 为常数，显然 $\mathscr{C}_0^\infty$ 上的泛函 $\int_{\mathscr{R}_n} c\,\phi(x)\mathrm{d}x$ 是连续线性泛函，所以它是一个广义函数，是由常数函数 $f(x)=c$ 通过 (6.4) 式

$$\langle c,\phi\rangle = \int_{\mathscr{R}_n} c\,\phi(x)\mathrm{d}x$$

定义的广义函数. 特别是 $c=0$ 时，就定义了广义函数 0.

除了我们需要理解广义函数概念而定义广义函数 c 外，在实用上，其实倒无须区别数 c，常数点函数 c (每一点均取常数值 c) 及广义函数 c.

例 6.2 下列一元函数 (多数是连续或分段连续函数) 都是局部可积的，因而也都可以通过 (6.4) 式定义相应的广义函数:

幂函数: $|x|^\alpha$ $(\alpha>-1)$; 三角函数: $\sin x$, $\cos x$;

指数函数：e^x, e^{-x};　　　　对数函数：$\ln|x|$;

符号函数：$\operatorname{sgn} x$;　　　　Heaviside 函数：$\eta(x)$.

☞ **评述** 函数在无穷远处的行为并不影响它的局部可积性，然而在有限远点，不能容许太高的奇异性. 例如，在 $\mathscr{R}_n$ 中，若 $\alpha < n$，则 $1/|x|^\alpha$ 是局部可积的，但 $\alpha > n$ 时则否.

定义 6.7 以积分式 (6.4) 定义的广义函数是**正则**的，否则就是**奇异**的.

例 6.3 令 ξ 是 $\mathscr{R}_1$ 内的固定一点. 考虑由

$$\langle \delta_\xi, \phi \rangle \triangleq \phi(\xi) \tag{6.5a}$$

定义的线性泛函 δ_ξ，即它对任何一个检验函数 ϕ 的作用就是遴选出 ϕ 在 $x = \xi$ 的值 $\phi(\xi)$. 如果 $\{\phi_m(x)\}$ 是 $\mathscr{C}_0^\infty(\mathscr{R}_1)$ 内的零序列，则数列 $\{\phi_m(\xi)\}$ 趋于 0. 因此 δ_ξ 是 $\mathscr{C}_0^\infty(\mathscr{R}_1)$ 上的连续线性泛函，它是一个广义函数 —— Dirac 广义函数 (本性点为 ξ)，记为 δ_ξ, $\delta_\xi(x)$ 或 $\langle \delta_\xi, \phi \rangle$. 特别是本性点 $\xi = 0$ 时，

$$\langle \delta_0, \phi \rangle = \phi(0) \tag{6.5b}$$

就定义了广义函数 δ_0 (常简单记为 δ).

☞ **评述** 常常把广义函数 δ_ξ 或 δ_0 称为 δ 函数，并且仍旧表示为 $\delta_\xi(x)$ 或 $\delta(x)$. 但要注意这种叫法并不准确，因为 $\delta_\xi(x)$ 不是经典意义下的函数，谈论它在某一点的函数值是没有意义的. δ 函数的全部含义就是 (6.5) 式：它对检验函数的作用就是遴选出检验函数在本性点的值.

δ 函数属于奇异型广义函数. 这是因为，如果它是正则广义函数，则必须存在一个局部可积函数 $f(x)$，使得

$$\int_{\mathscr{R}_n} f(x)\phi(x)\mathrm{d}x = \phi(0), \qquad \forall\, \phi \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathscr{R}_n). \tag{6.6}$$

这里假设 δ 函数的本性点 $\xi = 0$. 现在考虑检验函数 $\psi_a(x) = \phi(x/a)$，其中 $\phi(x)$ 见 (6.2) 式. 由于 $|\psi_a(x)| \leqslant \psi_a(0) = \phi(0) = 1/\mathrm{e}$，因此

$$\left| \int_{\mathscr{R}_n} f(x)\psi_a(x)\mathrm{d}x \right| = \left| \int_{|x|<a} f(x) \exp\left\{ \frac{a^2}{|x|^2 - a^2} \right\} \mathrm{d}x \right| \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}} \int_{|x|<a} |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

只要 $f(x)$ 是局部可积的，就一定有 $\lim\limits_{a\to 0} \displaystyle\int_{|x|<a} |f(x)|\,\mathrm{d}x = 0$，因此

$$\lim_{a\to 0} \int_{\mathscr{R}_n} f(x)\psi_a(x)\mathrm{d}x = 0.$$

另一方面，若 (6.6) 式成立，则必有

$$\int_{\mathscr{R}_n} f(x)\psi_a(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\mathrm{e}},$$

与 a 无关. 此二结果互相矛盾. 所以 Dirac 广义函数 δ 是奇异的. 如果本性点在 ξ 而非原点，可同样证明. 可以把 δ_ξ 想象成 ξ 处集中点源的源密度.

6.2.3 广义函数的局部性质

前面已经提到，不能指定广义函数在某一点的值，例如，不能说“广义函数 f 在 x_0 点的值为 0”. 但是，可以说“广义函数 f 在 x_0 的某个邻域 U 内为 0”. 这个说法的确切含义是: 对于 $\mathscr{C}_0^\infty$ 内的任意 $\phi(x)$，无论其支集是否在 U 内，我们总恒有 $\langle f,\phi\rangle = 0$.

如果有一个经典函数 $f(x)$，它在 x_0 点的邻域 U 内 (几乎处处) 为 0，则 $f(x)$ 对应的广义函数 f 在 U 内为 0.

奇异函数 δ_ξ 在任意 $x \neq \xi$ 的邻域内总是 0.

如果广义函数 f 在某开集 G 中每一点的邻域内均为 0，则称此广义函数在 G 上为 0.

若广义函数在任意一点的邻域内均为 0，则此广义函数对于 $\mathscr{C}_0^\infty$ 内的每一个 $\phi(x)$ 都有

$$\langle f,\phi\rangle = 0.$$

6.2.4 广义函数的本性点

如果 f 是广义函数，它在 x_0 的邻域内不为 0，则称 x_0 为广义函数 f 的**本性点** (essential point). 例如，$x = 0$ 就是泛函 $f(x) = x^2$ 的本性点 (尽管作为经典函数，x^2 本身在该点为 0)；当然 x 轴上的其他点也都是这个泛函的本性点. 广义函数 f 的全部本性点的集合称为**支集**. 通常的连续 (或分段连续) 函数 $f(x)$ 所对应的正则广义函数 f 的支集就是使 $f(x) \neq 0$ 的点集的闭包. 广义函数 δ_ξ 的支集就是单独一个点 $x = \xi$.

6.2.5 广义函数相等

首先对任意两个广义函数作局部的比较. 如果广义函数 f 和 g 的差 $f-g$ 在某开域 G 内为 0，则称 f 和 g 在此开域内相等. 如果 f 和 g 在 $\mathscr{R}_n$ 内每一点的邻域内都相等，则它们在整个 $\mathscr{R}_n$ 内相等，即对于所有 $\phi(x)$，$\langle f,\phi\rangle = \langle g,\phi\rangle$.

特别是，如果广义函数和一个普通的局部可积函数在区域 G 内相等，则称此广义函数在 G 内正则. 例如，尽管广义函数 δ_ξ 是奇异的，但它在本性点 ξ 之外处处正则 (且为 0).

如果 $f_1(x), f_2(x)$ 是不同的连续函数，它们生成不同的广义函数，则在 $\mathscr{C}_0^\infty$ 内至少存在某个 ϕ，使得 $\langle f_2,\phi\rangle \neq \langle f_1,\phi\rangle$ 或 $\langle f_2 - f_1,\phi\rangle \neq 0$. 这是因为，作为连

续函数，$f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 不同，则一定存在 x_0，使得 $f_2(x_0) \neq f_1(x_0)$. 不妨假设 $f_2(x_0) > f_1(x_0)$. 由函数的连续性可知，一定存在 x_0 的邻域 $|x - x_0| < \varepsilon$，使得 $f_2(x) - f_1(x) > 0$. 我们总可以选取检验函数 ϕ，使之在 $|x - x_0| < \varepsilon$ 内恒非负，而在区间外处处为 0. 对于这个 ϕ，法则 (6.4) 表明 $\langle f_2, \phi\rangle > \langle f_1, \phi\rangle$，即广义函数 f_1 和 f_2 是不同的.

如果两个函数全等，但有限个点除外，那么这两个函数不可能全都连续. 不妨假设这两个函数局部可积. 我们看到，如果除了有限个点外，局部可积函数 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 全等，则它们生成同样的广义函数. 更普遍地说，如果对于每一个有界域 Ω，$\int_\Omega |f_1 - f_2|\,\mathrm{d}x = 0$，则称此二函数**几乎处处相等**. 两个几乎处处相等的局部可积函数生成同样的广义函数. 换一个说法，两个几乎处处相等的函数之差一定几乎处处为 0，它一定生成广义函数 0①. 这意味着不同的广义函数对应于不同的函数，至少对于正则广义函数是如此. 正是因为这个原因，尽管我们不能说广义函数在给定点的值，但仍常常用 $f(x)$ 表示广义函数，无论是正则广义函数或是奇异广义函数. 甚至对于奇异广义函数，也常常纯形式地写成

$$\langle f, \phi\rangle = \int_{\mathscr{R}_n} f(x)\phi(x)\mathrm{d}x, \tag{6.4$'$}$$

尽管按照传统的积分定义，这个记号可能没有意义.

再次强调：f, $f(x)$ 和 $\langle f, \phi\rangle$ 都是同一个广义函数的记号，可以灵活地用于不同场合.

定义 6.8 若对于支集包含在开集 Ω 内的所有检验函数 ϕ，$\langle f, \phi\rangle = 0$，则称广义函数 f 在 Ω 上为 0；若 $\langle f_1, \phi\rangle = \langle f_2, \phi\rangle$，则称广义函数 f_1 和 f_2 在 Ω 上相等.

§6.3 广义函数的基本运算

下面讨论广义函数的基本运算. 在定义这些运算时 (线性运算除外)，我们总是从正则广义函数出发，设法将相应的运算转移到检验函数上 (这是因为，作为普通函数，检验函数的这些运算已有明确的定义)，从而采用这样得到的关系式作为对于任意广义函数进行相关运算的定义.

6.3.1 广义函数的线性组合

两个广义函数的线性组合 $f = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$ 定义为

$$\langle \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, \phi\rangle = \alpha_1 \langle f_1, \phi\rangle + \alpha_2 \langle f_2, \phi\rangle. \tag{6.7}$$

① 正因为如此，我们就把几乎处处为 0 的函数称为零函数，相应地，就把几乎处处相等的函数看成是同一个函数.

取 $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = -1$，就定义了广义函数的减法 $f_1 - f_2$. 特别是，$f_1 - f_2 = 0$ 完全等价于 $f_1 = f_2$.

6.3.2 广义函数的平移

可以将 $\mathscr{R}_n$ 上的局部可积函数 $f(x)$ 平移 $a \equiv (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 而得到局部可积函数 $f(x-a)$，它就定义了广义函数

$$\begin{aligned}\langle f(x-a), \phi(x)\rangle &= \int_{\mathscr{R}_n} f(x-a)\phi(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathscr{R}_n} f(x)\phi(x+a)\mathrm{d}x = \langle f(x), \phi(x+a)\rangle .\end{aligned}$$

相应地，就定义任意广义函数 f 的平移为

$$\langle f(x-a), \phi(x)\rangle = \langle f(x), \phi(x+a)\rangle . \tag{6.8}$$

6.3.3 广义函数的缩放 (相似变换)

如果 $f(x)$ 局部可积，则 $f(\alpha x)$ 亦然 ($\alpha \neq 0$ 为任意实数). 对应于 $f(\alpha x)$ 的广义函数是 $\int_{\mathscr{R}_n} f(\alpha x)\phi(x)\mathrm{d}x$. 置 $\alpha x = y$，并注意 $\alpha < 0$ 需颠倒积分限，我们求得

$$\langle f(\alpha x), \phi(x)\rangle = \frac{1}{|\alpha|^n}\left\langle f(x), \phi\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right\rangle . \tag{6.9a}$$

即使 f 是奇异广义函数，我们也可以用 (6.9a) 式去定义广义函数 $f(\alpha x)$.

$\alpha = -1$ 的相似变换是对于原点的反射：

$$\langle f(-x), \phi(x)\rangle = \langle f(x), \phi(-x)\rangle . \tag{6.9b}$$

6.3.4 广义函数与普通函数的乘积

若 $f(x)$ 和 $a(x)$ 都是局部可积的，$a(x)f(x)$ 不一定局部可积. 然而，如果 $a(x)$ 无限可微 (但不必具有有限支集)，则 $a\phi$ 是检验函数，且

$$\langle af, \phi\rangle = \int_{\mathscr{R}_n} a(x)f(x)\phi(x)\mathrm{d}x = \langle f, a\phi\rangle . \tag{6.10}$$

这样 $a(x)f(x)$ 就通过 (6.10) 式生成相应的广义函数. 这个运算法则适用于任何广义函数 f 与无限可微函数的乘积.

6.3.5 广义函数的导数

如果 $f(x)$ 是 $\mathscr{R}_1$ 中的可微函数，其一阶导数 $f'(x)$ 局部可积，则 f' 也根据 (6.4) 式定义了它所对应的广义函数：

$$\langle f', \phi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\,\phi(x)\,\mathrm{d}x, \tag{6.11}$$

并且就定义为广义函数 f 的导数．换言之，在上述条件下，由 f 生成的广义函数的导数就是由 f' 生成的广义函数．

例 6.4 当 $\alpha>0$ 时，可以求得广义函数 $|x|^\alpha$，$|x|^\alpha\operatorname{sgn}x$，$|x|^\alpha\eta(x)$ 的导数：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}|x|^\alpha=\alpha|x|^{\alpha-1}\operatorname{sgn}x, \tag{6.12}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[|x|^\alpha\operatorname{sgn}x\right]=\alpha|x|^{\alpha-1}, \tag{6.13}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^\alpha\eta(x)\right]=\alpha x^{\alpha-1}\eta(x). \tag{6.14}$$

为保证右端出现的广义函数有定义，以上各式均要求 $\alpha-1>-1$，即 $\alpha>0$.

反复应用 (6.12) — (6.14) 诸式，可以进一步得到 $\alpha>-1$ 时这些广义函数的高阶导数：

$$|x|^\alpha=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+n+1)}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[|x|^{\alpha+n}(\operatorname{sgn}x)^n\right], \tag{6.15}$$

$$|x|^\alpha\operatorname{sgn}x=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+n+1)}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[|x|^{\alpha+n}(\operatorname{sgn}x)^{n+1}\right], \tag{6.16}$$

$$x^\alpha\eta(x)=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+n+1)}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[x^{\alpha+n}\eta(x)\right]. \tag{6.17}$$

但是还存在另外一种情形，即 $f(x)$ 不 (处处) 可导，或虽可导而 $f'(x)$ 并不局部可积，因而需要重新定义广义函数 f 的导数．为此，我们在 $f'(x)$ 局部可积的条件下，寻找新的关系式，原则仍然是能将微商运算转移到检验函数上去，从而作为广义函数导数的新定义．事实上，将 (6.11) 式分部积分，就可以得到

$$\begin{aligned}\langle f',\phi\rangle&=\int_{-\infty}^{\infty}f'(x)\phi(x)\mathrm{d}x\\&=f(x)\phi(x)\Big|_{-\infty}^{\infty}-\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\phi'(x)\mathrm{d}x=-\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\phi'(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

因此我们也可以用

$$\langle f',\phi\rangle=\langle f,-\phi'\rangle \tag{6.18}$$

来定义广义函数的导数．采用这个定义的好处是：因为 ϕ 是检验函数，故 $-\phi'$ 亦然；f 是广义函数，故 f 对 $-\phi'$ 的作用有定义．这就说明，只要 $f(x)$ 局部可积，不论它作为普通函数时在 $\mathscr{R}_1$ 中是否处处可导，更无须考虑 $f'(x)$ 是否局部可积，都可以用 (6.18) 式作为广义函数 f 的导数定义．显然，定义 (6.18) 式涵盖了 (6.11) 式作为它的特殊情形．

更进一步，对于奇异广义函数 f (例如广义函数 δ)，同样也采用 (6.18) 式来定义它的导数 f'．

正是基于这样的认识，我们可以将上面 (6.15) — (6.17) 诸式中的 n 放宽为满足 $\alpha+n>0$ 的整数. 在这样的条件下，上述诸式右端出现的广义函数均有定义，它们的导数也都有确切的定义，因而就可以作为左端各广义函数 (即使 $\alpha<-1$，但 $\alpha\neq$ 负整数) 的定义. 这样定义的广义函数，在 $-\infty<x<0$ 或 $0<x<\infty$ 的区间中，都等于具有同样记号的经典函数.

同样的论点可以应用到 n 维广义函数 f 的偏导数上. 我们定义

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i},\phi\right\rangle=\left\langle f,-\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right\rangle. \tag{6.19}$$

重复应用这个定义，可得

$$\left\langle D^k f,\phi\right\rangle=(-1)^{|k|}\left\langle f,D^k\phi\right\rangle. \tag{6.20}$$

这样我们就有了明确的结论：每一个广义函数都能 (无限) 求导，并且给出了广义函数的求导法则. 广义函数的导数仍然是广义函数.

例 6.5 (Heaviside 函数的导数) 在经典的意义下，Heaviside 函数在 $x=0$ 点不可导，不论我们如何去定义 $\eta(0)$ 的值. 但是，按照 (6.18) 式，η' 可以通过

$$\langle\eta',\phi\rangle=\langle\eta,-\phi'\rangle=-\int_0^\infty\phi'(x)\mathrm{d}x=\phi(0)$$

定义为广义函数. 这正是 δ 函数. 因此，在广义函数的意义下，

$$\eta'(x)=\delta(x). \tag{6.21}$$

相应地，(6.21) 式也可以形式地积分而给出

$$\eta(x)=\int_{-\infty}^x\delta(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1, & x>0.\end{cases}$$

例 6.6 (间断函数的导数) Heaviside 函数 $\eta(x)$ 就是一个间断函数，它在广义函数的意义下的导数 $\eta'=\delta$. 因此，可以预料，对于具有第一类间断点的任意函数 $f(x)$，它的广义函数导数 f' 也将含有广义函数 δ. 设 $f(x)$ 在实轴上无限可导，但 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 点除外. 若函数在这些点处的跃度分别为 $\Delta f_1,\Delta f_2,\cdots,\Delta f_k$，则

$$g=f-\sum_{i=1}^k\Delta f_i\eta(x-a_i) \tag{6.22}$$

连续，且具有分段连续的导数 (亦即 g 的广义函数导数) g'. 换一种写法，直接用 $[f']$ 表示剔除间断点后对 f 微商得到的函数 (例如 $[\eta']=0$)，即 $g'=[f']$. 这样，在

广义函数意义下对 (6.22) 式微商，我们得到

$$g' = f' - \sum_{i=1}^{k} \Delta f_i \delta(x - a_i), \qquad \text{即} \qquad f' = [f'] + \sum_{i=1}^{k} \Delta f_i \delta(x - a_i). \tag{6.23}$$

f 在第一类间断点 a_i 处的不连续性，相应地，在它的广义函数导数中就贡献一项 $\Delta f_i \delta(x - a_i)$. 因此，分段连续函数 $[f']$ 一般并不等于 f 的广义函数导数 f'.

还可以继续计算间断函数的高阶导数. 例如，可以计算 $f = \mathrm{e}^{-|x|}$ 的各阶导数：

$$\begin{aligned}
f' &= [f'] = -\mathrm{e}^{-|x|}\operatorname{sgn} x, \\
f'' &= [f''] - 2\delta(x) = \mathrm{e}^{-|x|} - 2\delta(x), \\
f''' &= [f'''] - 2\delta'(x) = -\mathrm{e}^{-|x|}\operatorname{sgn} x - 2\delta'(x), \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots .
\end{aligned}$$

§6.4 奇异广义函数 δ

广义函数 δ 是最常用的广义函数，并且常常直接称为 δ 函数，其定义已由 (6.5) 式给出. 下面列出它的主要性质：

性质 1 按照定义 (6.5)，如果 δ 的本性点 ξ 不包含在检验函数 $\phi(x)$ 的支集内，则

$$\int_a^b \delta_\xi(x)\phi(x)\mathrm{d}x = 0, \qquad \xi \notin [a, b].$$

换言之，在任何不包含 ξ 点在内的区间 Ω 上，

$$\langle \delta_\xi, \phi \rangle = 0, \qquad \xi \notin \Omega, \tag{6.24a}$$

因此，正是在这个意义上，我们说，

$$\delta_\xi = 0, \qquad \xi \notin \Omega. \tag{6.24b}$$

性质 2 (δ 函数的平移性质) 根据广义函数的运算法则 (6.8)，有

$$\langle \delta(x - \xi), \phi(x) \rangle = \langle \delta(x), \phi(x + \xi) \rangle = \phi(\xi),$$

和 (6.5a) 式相比较，就有

$$\delta_\xi(x) = \delta(x - \xi). \tag{6.25}$$

性质 3 (δ 函数的奇偶性) 根据广义函数的运算法则 (6.9b)，有

$$\langle \delta(-x), \phi(x) \rangle = \langle \delta(x), \phi(-x) \rangle = \phi(0) = \langle \delta(x), \phi(x) \rangle,$$

所以 δ 函数是偶函数，即

$$\delta(-x)=\delta(x). \tag{6.26}$$

性质 4 (δ 函数与无限可微函数 $a(x)$ 的乘积)　根据广义函数的运算法则 (6.10)，有

$$\langle a(x)\delta_\xi(x),\phi(x)\rangle=\langle\delta_\xi(x),a(x)\phi(x)\rangle=a(\xi)\phi(\xi),$$

所以

$$a(x)\delta_\xi(x)=a(x)\delta(x-\xi)=a(\xi)\delta(x-\xi). \tag{6.27a}$$

特别是，$\xi=0$ 时有

$$a(x)\delta(x)=a(0)\delta(x). \tag{6.27b}$$

例如，$a(x)=x$ 时有

$$\langle x\delta(x),\phi(x)\rangle=\langle\delta(x),x\phi(x)\rangle=0,$$

所以

$$x\delta(x)=0. \tag{6.27c}$$

这个看似简单却很重要的结论，值得表述为定理：

定理 6.2　广义函数方程 $xf(x)=0$ 的解是 $f(x)=c\,\delta(x)$，其中 c 为任意常数.

性质 5 (δ 函数的导数)　根据广义函数的运算法则 (6.18)，有

$$\langle\delta'(x-\xi),\phi(x)\rangle=-\langle\delta(x-\xi),\phi'(x)\rangle=-\phi'(\xi). \tag{6.28}$$

如此继续，还可得到 δ 函数的 n 阶导数 $\delta^{(n)}$，其定义为

$$\left\langle\delta^{(n)}(x-\xi),\phi(x)\right\rangle=(-1)^n\phi^{(n)}(\xi). \tag{6.29}$$

例 6.7　考虑 $\mathscr{R}_3$ 内的局部可积函数 $1/|x|$. 在经典意义下，此函数显然在原点不可导. 现在在广义函数的意义下计算 $\nabla^2(1/|x|)$. 因为 ∇^2 中只含有对自变量的二阶导数，故根据 (6.20) 式，有

$$\left\langle\nabla^2\frac{1}{|x|},\phi\right\rangle=\left\langle\frac{1}{|x|},\nabla^2\phi\right\rangle=\int_{\mathscr{R}_3}\frac{\nabla^2\phi}{|x|}\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{|x|>\varepsilon}\frac{\nabla^2\phi}{|x|}\mathrm{d}x.$$

上式最后一步是因为 $1/|x|$ 在原点的奇异性比较弱，右端的积分收敛. 注意在一定有界区域外 $\phi=0$，用 Green 公式计算上式右端的积分，可得到

$$\int_{|x|>\varepsilon}\frac{\nabla^2\phi}{|x|}\mathrm{d}x=\int_{|x|>\varepsilon}\phi\nabla^2\left(\frac{1}{|x|}\right)\mathrm{d}x+\int_{|x|=\varepsilon}\left[\frac{1}{|x|}\frac{\partial\phi}{\partial\boldsymbol{n}}-\phi\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{n}}\left(\frac{1}{|x|}\right)\right]\mathrm{d}S,$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 是区域 $|x|>\varepsilon$ 的外法线. 置 $|x|=r$，注意 $\partial/\partial\boldsymbol{n}=-(\partial/\partial r)$ 及 $\nabla^2(1/r)=0, r\neq 0$，所以上式右端第一项为 0，因此有

$$\int_{|x|>\varepsilon}\frac{\nabla^2\phi}{|x|}\mathrm{d}x=-\int_{|x|=\varepsilon}\Big(\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}+\frac{\phi}{r^2}\Big)\mathrm{d}S.$$

因为检验函数的导数是有界的，即 $|\partial\phi/\partial r|<M$，所以

$$\left|\int_{|x|=\varepsilon}\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}\mathrm{d}S\right|\leqslant\frac{M}{\varepsilon}(4\pi\varepsilon^2)=4\pi\varepsilon M\to 0,\qquad \varepsilon\to 0.$$

同时，

$$\int_{|x|=\varepsilon}\frac{\phi}{r^2}\mathrm{d}S=\int_{|x|=\varepsilon}\frac{\phi(0)+[\phi(x)-\phi(0)]}{r^2}\mathrm{d}S=4\pi\phi(0)+\int_{|x|=\varepsilon}\frac{\phi(x)-\phi(0)}{r^2}\mathrm{d}S.$$

因为 $\phi(x)$ 在 $x=0$ 连续，所以上式后一个积分在 $\varepsilon\to 0$ 时趋于 0. 由此就导出

$$\left\langle\nabla^2\frac{1}{|x|},\phi\right\rangle=-4\pi\phi(0),$$

所以，在广义函数的意义下，

$$\nabla^2\frac{1}{|x|}=-4\pi\delta(x).\tag{6.30}$$

§6.5 δ 型函数族与 δ 型函数序列

定义 δ 函数的最自然的办法之一就是计算普通函数 (比如说，局部可积函数) 的极限. 例如，在一维情形中，可以把 $x=0$ 处的单位点源设想为均匀分布源的序列 $\{s_k(x)\}$ 在 $k\to\infty$ 时的极限，其中

$$s_k(x)=\begin{cases}0, & |x|>1/(2k),\\ k, & |x|<1/(2k).\end{cases}\tag{6.31}$$

也可以举出 Gauss 型的分布函数 $s_k(x)=(k/\sqrt{\pi})\mathrm{e}^{-k^2x^2}$，它和 (6.31) 式的分布函数具有类似的特征：随着"宽度"变小，强度增大，然而保持"总量"(函数的积分值) 恒为 1. 尽管在经典意义下，谈论它们的极限 $\lim\limits_{k\to\infty}s_k(x)=\delta(x)$ 是没有意义的，可是在广义函数的意义下，$\lim\limits_{k\to\infty}s_k(x)$ 和 $\delta(x)$ 二者都有明确的定义. 只要

$$\lim_{k\to\infty}\langle s_k,\phi\rangle=\langle\delta,\phi\rangle,\quad 即\quad \lim_{k\to\infty}\int_{\mathscr{R}_1}s_k(x)\phi(x)\mathrm{d}x=\phi(0),\quad \forall\,\phi\in\mathscr{C}_0^{\infty}(\mathscr{R}_1),$$

则在广义函数的意义下，$\lim\limits_{k\to\infty}s_k(x)=\delta(x)$.

例 6.8　考虑在 $\mathscr{R}_1$ 内的序列 (6.31)，我们有

$$\langle s_k, \phi\rangle = \int_{|x|<1/(2k)} k\phi(x)\mathrm{d}x = \phi(0) + \int_{|x|<1/(2k)} k[\phi(x)-\phi(0)]\mathrm{d}x$$

及

$$\begin{aligned}\left|k\int_{|x|<1/(2k)}[\phi(x)-\phi(0)]\mathrm{d}x\right| &\leqslant k\int_{|x|<1/(2k)}|\phi(x)-\phi(0)|\,\mathrm{d}x\\ &\leqslant \max_{|x|<1/(2k)}|\phi(x)-\phi(0)|.\end{aligned}$$

若 $\phi(x)$ 在 $x=0$ 点连续，则当 $k\to\infty$ 时此最大值趋于 0. 因此，对于在原点连续的任意 ϕ，一定有

$$\lim_{k\to\infty}\langle s_k, \phi\rangle = \phi(0), \tag{6.32}$$

换言之，(6.32) 式对所有检验函数均正确. 因此，在广义函数的意义下，我们有

$$\lim_{k\to\infty} s_k(x) = \delta(x),$$

定义 6.9　令 $\{f_\alpha(x)\}$ 是 $\mathscr{R}_n$ 内的局部可积函数族，如果它具有特性

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0}\int_{\mathscr{R}_n} f_\alpha(x)\phi(x)\mathrm{d}x = \phi(0), \qquad \forall\,\phi\in\mathscr{C}_0^\infty(\mathscr{R}_n), \tag{6.33a}$$

则 $\{f_\alpha\}$ 称为 ($\alpha\to\alpha_0$ 的) n 维 δ **型函数族**. 如果

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\mathscr{R}_n} f_k(x)\phi(x)\mathrm{d}x = \phi(0), \qquad \forall\,\phi\in\mathscr{C}_0^\infty(\mathscr{R}_n), \tag{6.33b}$$

则称 $\{f_k\}$ 为 n 维 δ **型函数序列**.

序列 (6.31) 就是一维 δ 型函数序列的例子. 下面的定理提供了如何从一个非负函数 $f(x)$ 出发，通过压缩而同时提高峰的高度来构造出 δ 型函数序列的方法.

定理 6.3　令 $f(x)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是 $\mathscr{R}_n$ 上的非负局部可积函数，

$$\int_{\mathscr{R}_n} f(x)\mathrm{d}x = 1.$$

定义

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha^n}f\left(\frac{x}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha^n}f\left(\frac{x_1}{\alpha},\frac{x_2}{\alpha},\cdots,\frac{x_n}{\alpha}\right), \qquad \alpha>0, \tag{6.34a}$$

则 $\{f_\alpha(x)\}$ 是 $\alpha\to 0+$ 的 δ 型函数族；而若令 $\alpha=1/k$，则

$$\{s_k(x) = k^n f(kx_1,kx_2,\cdots,kx_n),\ k=1,2,3,\cdots\} \tag{6.34b}$$

是 $k\to\infty$ 的 δ 型函数序列.

例 6.9 $\mathscr{R}_1$ 内的非负型 δ 型函数族:

(1) $f(x)=\dfrac{1}{\pi(x^2+1)}$, $\left\{f_\alpha(x)=\dfrac{\alpha}{\pi(x^2+\alpha^2)}\right\}$ ($\alpha\to 0+$ 的 δ 型函数族).

(2) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{4\pi}}e^{-x^2/4}$, $\left\{f_t(x)=\dfrac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-x^2/4t}\right\}$ ($t\to 0+$ 的 δ 型函数族, $\alpha=\sqrt{t}$).

(3) $f(t)=\dfrac{e^{-1/4t}}{\sqrt{4\pi}\,t^{3/2}}\eta(t)$, $\left\{f_x(t)=\dfrac{x\,e^{-x^2/4t}}{\sqrt{4\pi}\,t^{3/2}}\eta(t)\right\}$ ($x\to 0+$ 的 δ 型函数族, $\alpha=x^2$).

(4) $f(x)=\dfrac{\sin^2 x}{\pi x^2}$, $\left\{f_R(x)=\dfrac{\sin^2 Rx}{\pi R x^2}\right\}$ ($R\to\infty$ 的 δ 型函数族).

(1) 出现在势论中; (2) 和 (3) 都出现在与时间有关的热传导方程中; (4) 是 Féjer 核, 出现在 Fourier 级数中①.

(5) 令 $I_k=\displaystyle\int_{-1}^{1}(1-x^2)^k dx=2^{2k+1}\frac{k!\,k!}{(2k+1)!}$, 则序列

$$f_k(x)=\begin{cases}(1-x^2)^k/I_k, & |x|<1,\\ 0, & |x|\geqslant 1\end{cases}$$

是 $k\to\infty$ 的 δ 型函数序列, 在证明 Weierstrass 的逼近理论时有用.

(6) $r\to 1-$ 的 δ 型函数族:

$$f_r(\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}\left(\dfrac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\theta}\right), & |\theta|\leqslant\pi,\\ 0, & |\theta|>\pi.\end{cases}$$

这是所谓的 Poisson 核, 来源于势论 (单位圆内的 Dirichlet 问题).

例 6.10 $\mathscr{R}_n$ 内的非负型 δ 型函数族:

$$(1)\quad \psi(x)=\begin{cases}k_n\exp\left\{\dfrac{1}{|x|^2-1}\right\}, & |x|<1,\\ 0, & |x|\geqslant 1,\end{cases}$$

取定常数 k_n, 使 ψ 在单位球域内的积分为1, 则 $f_\alpha(x)=\psi(x/\alpha)$ 是 $\alpha\to 0+$ 的 δ 型函数族:

$$\lim_{\alpha\to 0+}\int_{\mathscr{R}_n}\psi\left(\frac{x}{\alpha}\right)\phi(x)dx=\phi(0),\qquad \forall\phi\in\mathscr{C}_0^\infty(\mathscr{R}_n).$$

(2) $f(x)$ 仅依赖于 $r=|x|$. 例如有 Gauss 核

① 参阅吴崇试编著的《数学物理方法专题 —— 复变函数与积分变换》(北京大学出版社), 第 11 章, §11.5.

$$f(r) = (4\pi)^{-n/2}\mathrm{e}^{-r^2/4},$$
$$f(r) = (4\pi t)^{-n/2}\mathrm{e}^{-r^2/4t} \qquad (\text{当 } t \to 0+ \text{ 为 } \delta \text{ 型函数族}).$$

这两个函数族出现在 n 维热传导及概率论中.

定理 6.3 不是构造 δ 型函数族或 δ 型函数序列的唯一途径. 事实上，要使得 (6.33a) 式成立，还可以放宽 $\{f_\alpha\}$ 的条件，例如，允许 $\{f_\alpha\}$ 可以改变符号.

例 6.11 $\mathscr{R}_1$ 内 δ 型函数族的几个例子，它们都不是 (6.34) 式的类型.

(1) Fourier 积分的 Dirichlet 核:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}\omega = \frac{\sin Rx}{\pi x},$$

它是 $R \to \infty$ 的 δ 型函数族. 注意 $\dfrac{\sin Rx}{\pi x} = Rf(Rx)$，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$，其中 $f(x) = \dfrac{\sin x}{\pi x}$.

(2) 序列

$$f_k(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\sum_{m=-k}^{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx} = \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\sin(k+1/2)x}{\sin(x/2)}, & |x| \leqslant \pi, \\ 0, & |x| > \pi \end{cases}$$

是 $k \to \infty$ 的 δ 型函数序列. 它是 Fourier 级数的 Dirichlet 核①，在证明 Fourier 级数的收敛定理时起了重要作用.

§6.6 广义函数序列的收敛性

6.6.1 广义函数族

考虑依赖于参数 α 的广义函数族 $\{f_\alpha(x)\}$，其中 α 属于某个指标集②. 对于该指标集内的每个 α，定义了一个广义函数 f_α.

定义 6.10 令 $\{f_\alpha\}$ 是 n 维广义函数族. 如果

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0}\langle f_\alpha, \phi\rangle = \langle f, \phi\rangle, \qquad \forall\,\phi \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathscr{R}_n), \tag{6.35}$$

则称 $\alpha \to \alpha_0$ 时 $\{f_\alpha\}$ 在广义函数的意义下收敛到 f，记为 $f_\alpha \to f$.

通过上述定义，广义函数的收敛性就转化为数列的收敛性.

① 参阅吴崇试编著的《数学物理方法专题 —— 复变函数与积分变换》(北京大学出版社)，第 11 章，§11.5.

② 这个指标集常常就是正整数集，即 α 为正整数 k，因而就是讨论广义函数序列.

定理 6.4 若对于 $\mathscr{C}_0^\infty(\mathscr{R}_n)$ 内的每一个 ϕ，极限 $\lim\limits_{\alpha\to\alpha_0}\langle f_\alpha,\phi\rangle$ 存在，则存在并且只存在一个广义函数 f，使得 $\alpha\to\alpha_0$ 时 $f_\alpha\to f$，亦即

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0}\langle f_\alpha,\phi\rangle=\langle f,\phi\rangle,\qquad\forall\phi\in\mathscr{C}_0^\infty(\mathscr{R}_n).$$

作为定理 6.4 的特殊情形，考虑广义函数序列 $\{f_k\}$. 若对于每个 ϕ，$\lim\limits_{k\to\infty}\langle f_k,\phi\rangle$ 存在，由此就可推定存在唯一的一个广义函数 f，使得 $k\to\infty$ 时，对于每个 ϕ，$\langle f_k,\phi\rangle\to\langle f,\phi\rangle$，即 $f_k\to f$.

由广义函数序列的收敛性又能导出广义函数级数的收敛定义. 令 $u_1,u_2,\cdots,u_k,\cdots$ 是 n 维广义函数. 当且仅当广义函数序列 $f_k=\sum\limits_{j=1}^{k}u_j$ 收敛，则有 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k=f$.

在处理 $\mathscr{R}_n$ 上的局部可积函数族 $\{f_\alpha\}$ 时，我们可以探求有关广义函数的收敛性与经典意义下的收敛性之间的关系. 然而广义函数意义下的收敛性毕竟不等同于经典意义下的收敛性，甚至没有 (经典意义下的) 逐点收敛性也可能有广义函数的收敛性. 例如，当 $m\to\infty$ 时，$\mathscr{R}_1$ 内的序列 $\{\sin mx\}$ 并不 (逐点) 收敛，然而用分部积分能够证明，对于每一个检验函数 ϕ，有

$$\lim_{m\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\sin mx\,\phi(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\int_{-\infty}^{\infty}\cos mx\,\phi'(x)\,\mathrm{d}x=\cdots=0,$$

所以在广义函数的意义下

$$\sin mx\to0,\qquad m\to\infty.\tag{6.36a}$$

6.6.2 广义函数族的微商

令$\{f_\alpha\}$ 是任意广义函数族，且当 $\alpha\to\alpha_0$ 时在广义函数意义下 $f_\alpha\to f$，则因为

$$\left\langle\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i},\phi\right\rangle=\left\langle f_\alpha,-\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\right\rangle\to\left\langle f,-\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\right\rangle=\left\langle\frac{\partial f}{\partial x_i},\phi\right\rangle,$$

所以在广义函数的意义下，有

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}\to\frac{\partial f}{\partial x_i},\qquad\alpha\to\alpha_0.$$

由此立即推出，当 $\alpha\to\alpha_0$ 时，在广义函数的意义下 $D^kf_\alpha\to D^kf$，其中 k 为任意的多重指标. 这样，每一个广义函数序列或广义函数级数都可以逐项微商. 这和经典的函数级数有很大的不同：在经典意义下，只在比较严格的限制下才能逐项微商！

作为简单的一维的例子，我们由 (6.36a) 式就能推出

$$\lim_{m\to\infty}m^p\sin mx=\lim_{m\to\infty}m^p\cos mx=0,\qquad\forall p\in\mathbb{N}.\tag{6.36b}$$

同样，若有广义函数序列 $\{f_m,\ m\in\mathbb{N}\}$，它收敛到广义函数 f，则立即可得

$$\left\langle\frac{\partial f_m}{\partial x_j},\phi\right\rangle=\left\langle f_m,-\frac{\partial\phi}{\partial x_j}\right\rangle\to\left\langle f,-\frac{\partial\phi}{\partial x_j}\right\rangle=\left\langle\frac{\partial f}{\partial x_j},\phi\right\rangle.$$

所以逐项微商而得到的序列 $\left\{\dfrac{\partial f_m}{\partial x_j},\ m\in\mathbb{N}\right\}$ 一定收敛到 $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$.

类似地，若广义函数序列 $h_1+h_2+\cdots+h_m+\cdots$ 收敛到广义函数 g，则可逐项微商，从而得到

$$h_1'+h_2'+\cdots+h_m'+\cdots=g'.$$

上面的这些结果说明，在广义函数的意义下，微商与求极限总可以交换次序．但在经典的微积分中并没有这样的结论．可微函数构成的收敛序列，微商后一般并不收敛．例如，序列 $\{f_m=\sin mx/m\}$ 一致收敛到 0，可是这个序列的导数 $\{f_m'(x)=\cos mx\}$ 在经典意义下并不收敛，更谈不上收敛到序列极限的导数．但是在广义函数的意义下，序列 f_m' 收敛，而且收敛到 0．不仅如此，在广义函数的意义下，序列

$$f_m''=-m\sin mx,\qquad f_m'''=-m^2\cos mx\qquad(m=1,2,\cdots)$$

及更高阶导数的序列也都收敛到 0.

例 6.12 考虑由

$$\ln(x+\mathrm{i}0)=\begin{cases}\ln x, & x>0,\\ \ln|x|+\mathrm{i}\pi, & x<0\end{cases}$$

定义的泛函．因为对于固定的 y，有

$$\ln(x+\mathrm{i}y)=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)+\mathrm{i}\arctan\frac{y}{x},$$

所以，当 $y\to0+$ 时左端趋于 $\ln(x+\mathrm{i}0)$．而右端

- 第一项收敛 (单调下降) 到 $\ln|x|$；
- 第二项收敛到 $h(x)=\mathrm{i}\pi\eta(-x)=\mathrm{i}\pi\left[1-\eta(x)\right]$.

所以在广义函数意义下仍然有

$$\ln(x+\mathrm{i}0)=\lim_{y\to0+}\ln(x+\mathrm{i}y).$$

注意 $\ln|x|$ 的导数是 $1/x$，$h(x)$ 的导数是 $-\mathrm{i}\pi\delta(x)$，所以

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln(x+\mathrm{i}0)=\frac{1}{x}-\mathrm{i}\pi\delta(x).\tag{6.37a}$$

另一方面，因为在广义函数的意义下，微商与求极限总可以交换次序，所以

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln(x+\mathrm{i}0)=\lim_{y\to0+}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln(x+\mathrm{i}y)\right]=\lim_{y\to0+}\frac{1}{x+\mathrm{i}y}.$$

这样我们就得到了

$$\lim_{y\to0+}\frac{1}{x+\mathrm{i}y}=\mathrm{v.p.}\frac{1}{x}-\mathrm{i}\pi\delta(x),\tag{6.37b}$$

其中 v.p. 表示取 Cauchy 主值. 此结果即等价于

$$\lim_{y\to0+}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\phi(x)}{x+\mathrm{i}y}\mathrm{d}x=\mathrm{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\phi(x)}{x}\mathrm{d}x-\mathrm{i}\pi\phi(0).\tag{6.37c}$$

在数学物理中，经常遇到在 $\mathscr{R}_n$ 上不一致收敛的函数序列. 这些函数序列，可能逐点收敛，可能不逐点收敛，甚至完全不收敛. 不论在哪种情形下，常常可以应用广义函数来理解逐项求导的合法性. 例如，已知序列 $\{f_k(x)\}$ (为了简单起见，假设定义在 $\mathscr{R}_1$ 上)，若能找到正整数 m，使得 $\{f_k(x)\}$ 是序列 $\{g_k(x)\}$ 的 m 阶导数，且 $g_k(x)\rightrightarrows g(x)$，则在广义函数的意义下，也有 $g_k(x)\to g(x)$. 因为在广义函数意义下逐项求导是合法的，所以 $g_k^{(m)}\to g^{(m)}$，即 $f_k\to g^{(m)}$，其中 $g^{(m)}$ 是 g (在广义函数意义下) 的 m 阶导数.

§6.7 奇异广义函数 $1/x$

6.7.1 两个例题

例 6.13 求广义函数 $x^\alpha\eta(x)$ $(-1<\alpha<0)$ 的导数.

§6.3 中其实已经讨论过这个问题，见 (6.17) 式. 按照广义函数的求导法则，应当有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^\alpha\eta(x)\right]=\alpha x^{\alpha-1}\eta(x),\qquad -1<\alpha<0.$$

现在要来进一步探求一下这个求导法则的内涵. 注意，$x^\alpha\eta(x)$ 作为普通函数，在 $-1<\alpha<0$ 的条件下是局部可积的，但 (在 $x=0$ 点) 不可导. 而且，即使先置 $x=0$ 点而不顾，这个函数在区间 $0<x<\infty$ 上的导数 $\alpha x^{\alpha-1}$ 也不局部可积. 因此，我们必须按照 (6.18) 式来求 $x^\alpha\eta(x)$ 它作为广义函数的导数:

$$\langle[x^\alpha\eta(x)]',\phi\rangle=-\langle x^\alpha\eta(x),\phi'\rangle=\int_0^\infty x^\alpha\phi'(x)\mathrm{d}x.$$

为了计算出此积分，可以分部积分，从而得到

$$\langle[x^\alpha\eta(x)]',\phi\rangle=-\lim_{\varepsilon\to0}\left\{x^\alpha\left[\phi(x)+C\right]\Big|_\varepsilon^\infty-\int_\varepsilon^\infty\alpha x^{\alpha-1}\left[\phi(x)+C\right]\mathrm{d}x\right\}.$$

取 $C=-\phi(0)$，则有

$$\langle[x^{\alpha}\eta(x)]',\phi\rangle=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\varepsilon}^{\infty}\alpha x^{\alpha-1}\big[\phi(x)-\phi(0)\big]\mathrm{d}x=\int_{0}^{\infty}\alpha x^{\alpha-1}\big[\phi(x)-\phi(0)\big]\mathrm{d}x.$$

这正是广义函数 $[x^{\alpha}\eta(x)]'$ 的定义，即 $\big[x^{\alpha}\eta(x)\big]'=\alpha x^{\alpha-1}\eta(x)$ 的准确含义．这时得到的导数 $\alpha x^{\alpha-1}\eta(x)$ 是奇异的，但当 $x\neq0$ 时，它和正则广义函数相同．广义函数 $\alpha x^{\alpha-1}\eta(x)$ 的奇异性，就表现为它对于检验函数 $\phi(x)$ 的作用是

$$\begin{aligned}\big\langle\alpha x^{\alpha-1}\eta(x),\phi\big\rangle&=\int_{-\infty}^{\infty}\alpha x^{\alpha-1}\eta(x)\big[\phi(x)-\phi(0)\big]\mathrm{d}x\\&=\int_{0}^{\infty}\alpha x^{\alpha-1}\big[\phi(x)-\phi(0)\big]\mathrm{d}x,\end{aligned}\tag{6.38}$$

而非

$$\int_{-\infty}^{\infty}\alpha x^{\alpha-1}\eta(x)\phi(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{\infty}\alpha x^{\alpha-1}\phi(x)\mathrm{d}x.$$

后一积分显然是发散的．前一积分与后一积分不同：被积函数中的 $\phi(x)$ 换成了 $\phi(x)-\phi(0)$，这样既保证了积分在 $x=0$ 处的收敛性，也不破坏积分在 ∞ 处的收敛性．即使在广义函数的意义下，我们仍然常常习惯性地、纯粹形式地将 $\big\langle\alpha x^{\alpha-1}\eta(x),\phi\big\rangle$ 写成

$$\big\langle\alpha x^{\alpha-1}\eta(x),\phi\big\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\alpha x^{\alpha-1}\eta(x)\phi(x)\mathrm{d}x,$$

只是这时上式右端的表达式不应当看成通常意义下的定积分，而应当理解为 (6.38) 式．用广义函数的语言说，这种做法称为“发散积分的正则化”．

例 6.14 在广义函数意义下计算定积分

$$\int_{0}^{a}x^{\alpha}\phi(x)\mathrm{d}x,\qquad -n-1<\alpha<-n,\ a>0,$$

其中 $\phi(x)$ 为检验函数．

为了计算此积分，需要设法将被积函数化为另一 (广义) 函数的导数．为此，先将积分改写为

$$\int_{0}^{a}x^{\alpha}\phi(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}\big[x^{\alpha}\eta(x)-x^{\alpha}\eta(x-a)\big]\phi(x)\mathrm{d}x.$$

若 $f(x)$ 是当 $x\geqslant a$ 时可微的普通函数，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big[f(x)\eta(x-a)\big] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big\{\big[f(x)-f(a)\big]\eta(x-a)\big\} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big[f(a)\eta(x-a)\big]$$
$$= f'(x)\eta(x-a) + f(a)\delta(x-a).$$

将此公式反复应用于 $x^\alpha\eta(x-a)$ 型的函数，就得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big[x^{\alpha+1}\eta(x-a)\big] = (\alpha+1)x^\alpha\eta(x-a) + a^{\alpha+1}\delta(x-a),$$
$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\big[x^{\alpha+2}\eta(x-a)\big] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{(\alpha+2)x^{\alpha+1}\eta(x-a) + a^{\alpha+2}\delta(x-a)\right\}$$
$$= (\alpha+2)(\alpha+1)x^\alpha\eta(x-a) + (\alpha+2)a^{\alpha+1}\delta(x-a) + a^{\alpha+2}\delta'(x-a),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

并且结合 (6.17) 式，有

$$\begin{aligned} x^\alpha\eta(x) - x^\alpha\eta(x-a) = {} & \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+n+1)}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left\{x^{\alpha+n}[\eta(x)-\eta(x-a)]\right\} \\ & + \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+2)}a^{\alpha+1}\delta(x-a) + \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+3)}a^{\alpha+2}\delta'(x-a) + \cdots \\ & + \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+n+1)}a^{\alpha+n}\delta^{(n-1)}(x-a), \qquad \alpha+n > -1. \end{aligned}$$

代入所求积分，即可求得

$$\begin{aligned} \int_0^a x^\alpha\phi(x)\mathrm{d}x = {} & (-1)^n\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+n+1)}\int_0^a x^{\alpha+n}\phi^{(n)}(x)\mathrm{d}x \\ & + \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+2)}a^{\alpha+1}\phi(a) - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+3)}a^{\alpha+2}\phi'(a) \\ & + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+n+1)}a^{\alpha+n}\phi^{(n-1)}(a). \end{aligned} \tag{6.39}$$

在标准的数学分析教程中，左端的积分是不收敛的．但如果在形式上分部积分 n 次，而且弃去 $x^{\alpha+1}, x^{\alpha+2}, \cdots, x^{\alpha+n}$ 等项在下限 $x=0$ 的值 (应为无穷)[①]，则正好就得到 (6.39) 式．

6.7.2 发散积分的正则化，非局部可积函数的正则化泛函

在 §6.2 中，已经讨论过如何定义局部可积函数所对应的广义函数．因此，广义函数的重要问题之一自然是：给定一个普通的 (非局部可积的，或者说，具有不可积奇点的) 函数 $f(x)$ (例如一元函数 $1/x$)，能否也定义出相应的广义函数？或者换一个说法，是否存在一个广义函数 f，它在 $f(x)$ 局部可积的所有点上都等于 $f(x)$？

① 这相当于选择特殊的检验函数，即 $x=0$ 是 $\phi(x)$ 的 n 阶零点：$\phi(0)=\phi'(0)=\phi''(0)=\cdots=\phi^{(n-1)}(0)=0$，而 $\phi^{(n)}(0)\neq 0$．

而且，一旦建立了这样的对应关系 $f(x)\mapsto f$，更进一步的问题就是：在相应的广义函数加法与 (无限可微) 函数相乘及微分运算中，这种对应关系是否得以保持？对这些问题的回答至为重要，这涉及能否将具有不可积奇点的函数包括进广义函数中来.

不妨先讨论只有一个 (不可积) 奇点的情形. 令 $f(x)$ 是处处局部可积函数，但 $x=x_0$ 点除外，在该点函数具有不可积的奇异性. 在这种情况下，积分

$$\int_{\mathscr{R}_n} f(x)\phi(x)\mathrm{d}x,\qquad \phi(x)\in\mathscr{C}_0^\infty \tag{6.40}$$

一般是不收敛的. 但是如果 $\phi(x)$ 在 x_0 点的邻域内为 0，则积分可能收敛. 我们的问题就是，是否可以利用类似于例 6.13 与例 6.14 的办法，重新定义泛函，使得对于 $\mathscr{C}_0^\infty$ 内所有 $\phi(x)$，泛函值能由某种特定形式的积分给出. 这样的泛函就称为发散积分 (6.40) 的正则化，或称为 $f(x)$ 的正则化泛函.

函数 $f(x)$ 的正则化泛函是连续线性泛函 f，它处处等于 $f(x)$，但 x_0 点除外.

例 6.15　广义函数 $(\ln x)\eta(x)$ 的导数.

当 $x>0$ 时，这个广义函数和普通函数 $\ln x$ 相等，而后者的导数为 $1/x$，故可以推测，作为广义函数 $(\ln x)\eta(x)$ 的导数，可能与泛函 $\displaystyle\int_0^\infty\frac{\phi(x)}{x}\mathrm{d}x$ 有联系. 但这是一个发散积分，且无法用 $\phi(x)-\phi(0)$ 代替 $\phi(x)$ 的办法使之正则化，因为这样代换后的积分在 ∞ 仍是发散的. 因此，我们还需从广义函数导数的定义 (6.18) 出发：

$$\begin{aligned}
\langle[(\ln x)\eta(x)]',\phi\rangle &= -\langle(\ln x)\eta(x),\phi'\rangle = -\int_0^\infty(\ln x)\phi'(x)\mathrm{d}x\\
&= -\lim_{\varepsilon\to0}\int_\varepsilon^\infty(\ln x)\phi'(x)\mathrm{d}x = -\lim_{\varepsilon\to0}\left\{(\ln x)\phi(x)\Big|_\varepsilon^\infty-\int_\varepsilon^\infty\frac{\phi(x)}{x}\mathrm{d}x\right\}\\
&= -\lim_{\varepsilon\to0}\left\{(\ln\varepsilon)\phi(\varepsilon)-\int_\varepsilon^\infty\frac{\phi(x)}{x}\mathrm{d}x\right\}\\
&= -\lim_{\varepsilon\to0}\left\{(\ln\varepsilon)\phi(0)+(\ln\varepsilon)\big[\phi(\varepsilon)-\phi(0)\big]-\int_\varepsilon^\infty\frac{\phi(x)}{x}\mathrm{d}x\right\}\\
&= -\lim_{\varepsilon\to0}\left\{(\ln\varepsilon)\phi(0)-\int_\varepsilon^\infty\frac{\phi(x)}{x}\mathrm{d}x\right\}\\
&= \int_0^\infty\frac{\phi(x)-\phi(0)\eta(1-x)}{x}\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

这样得到的正是函数 $\dfrac{1}{x}\eta(x)$ 的正则化泛函. 上面的最后一步用到了

$$-\ln\varepsilon=\int_\varepsilon^1\frac{\mathrm{d}x}{x}=\int_\varepsilon^\infty\frac{\eta(1-x)}{x}\mathrm{d}x.$$

下面列出有关正则化泛函存在性的几个结论. 为了简单起见，取 $x_0=0$.

结论 1 如果存在整数 $m>0$，使得 $f(x)\cdot|x|^m$ 局部可积，则积分 (6.40) 可以正则化.

在这种情形下，可以按照下列方程构造正则化泛函 f：

$$\begin{aligned}\langle f,\phi\rangle=\int_{\mathscr{R}_n} f(x)\Bigg\{\phi(x)-\Bigg[\phi(0)+\frac{\partial\phi(x)}{\partial x_1}\bigg|_{x=0}x_1\\+\cdots+\frac{\partial^m\phi(x)}{\partial {x_n}^m}\bigg|_{x=0}\frac{x_n^m}{m!}\Bigg]\eta(1-|x|)\Bigg\}\mathrm{d}x,\end{aligned}\tag{6.41}$$

即从 $\phi(x)$ 的 Taylor 展开中减去足够多的项，使得留下的项具有高于 $|x|^m$ 的幂.

显然，积分 (6.41) 对 $\mathscr{C}_0^\infty$ 内的所有 $\phi(x)$ 收敛，而且是连续线性泛函. 如果函数 $\phi(x)$ 直至其 m 阶导数在坐标原点的邻域内均为 0，则 (6.41) 式变为

$$\langle f,\phi\rangle=\int_{\mathscr{R}_n} f(x)\phi(x)\mathrm{d}x.$$

所以除坐标原点之外，f 与 $f(x)$ 相等.

结论 2 如果 f_0 是积分 (6.40) 的正则化泛函问题的一个特解，即 f_0 使积分 (6.40) 正则化，则 f_0 加上本性点在 $x_0=0$ 的任意一个泛函就得到通解 f.

令 f_0 是正则化泛函，g 是本性点在原点上的泛函，则对于在原点邻域内为 0 的检验函数 $\phi(x)$，有

$$\langle f_0+g,\phi\rangle=\langle f_0,\phi\rangle+\langle g,\phi\rangle=\langle f_0,\phi\rangle,$$

所以 f_0+g 也是正则化泛函. 反之，如果 $f_0\neq f_1$ 是积分 (6.40) 的两个正则化泛函，则对于所有在原点邻域内为 0 的检验函数 $\phi(x)$，有

$$\langle f_0-f_1,\phi\rangle=\langle f_0,\phi\rangle-\langle f_1,\phi\rangle=0.$$

所以 f_0-f_1 是集中作用在原点 $x_0=0$ 的泛函.

结论 3 如果在顶点位于 $x_0=0$ 的某个立体角内，$f(x)$ 满足条件

$$f(x)\geqslant F(|x|),$$

当 $r\to 0$ 时 $F(r)$ 比 $1/r$ 的任意次幂都快地单调上升，则积分 (6.40) 不能正则化.

☞ **评述** 这个结果并不表明在广义函数分析中从不考虑无穷阶奇异性的函数，只不过作为有关广义函数概念的入门性介绍，我们所考虑的只是一类特殊的检验函数，即属于空间 $\mathscr{C}_0^\infty$ 的检验函数.

如果 $f(x)$ 有不止一个奇点，而是有多个甚至可数的无穷多个孤立奇点，也可以类似地定义正则化泛函，只要在任意有界区间中，奇点的个数是有限的.

6.7.3 广义函数 $1/x$

广义函数 $1/x$ 可定义为广义函数 $\ln|x|$ 的导数.

在 $\mathscr{R}_1$ 内，局部可积函数 $f(x)=\ln|x|$ 可通过泛函

$$\langle \ln|x|,\phi\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\ln|x|\,\phi(x)\mathrm{d}x$$

定义相应的广义函数. 现在求此广义函数的导数，按照定义 (6.18)，我们有

$$\begin{aligned}\langle [\ln|x|]',\phi\rangle &=-\langle \ln|x|,\phi'\rangle=-\int_{-\infty}^{\infty}\ln|x|\,\phi'(x)\mathrm{d}x=-\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|\geqslant\varepsilon}\ln|x|\,\phi'(x)\mathrm{d}x\\ &=\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\left[-\ln|x|\,\phi(x)\Big|_{-\infty}^{-\varepsilon}-\ln|x|\,\phi(x)\Big|_{\varepsilon}^{\infty}\right]+\int_{|x|\geqslant\varepsilon}\frac{1}{x}\phi(x)\mathrm{d}x\right\}\\ &=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|\geqslant\varepsilon}\frac{1}{x}\phi(x)\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

即

$$\left\langle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln|x|,\phi(x)\right\rangle=\mathrm{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x}\phi(x)\mathrm{d}x. \tag{6.42a}$$

因此，可以定义广义函数 $1/x$ 为

$$\left\langle\frac{1}{x},\phi(x)\right\rangle=\mathrm{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x}\phi(x)\mathrm{d}x, \tag{6.42b}$$

亦即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln|x|=\frac{1}{x}. \tag{6.43}$$

☞ **评述** 作为普通函数，$1/x$ 不是局部可积的，因而广义函数 $1/x$ 属于奇异型广义函数. 这个广义函数，在 $-\infty<x<0$ 或 $0<x<\infty$ 的区间内与平常的函数 $1/x$ 相等.

如果进一步定义广义函数

$$\ln(x+\mathrm{i}0)=\lim_{y\to 0+}\ln(x+\mathrm{i}y)=\ln|x|+\mathrm{i}\pi\eta(-x),$$

就还能得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln(x+\mathrm{i}0)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln|x|+\mathrm{i}\pi\frac{\mathrm{d}\eta(-x)}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x}-\mathrm{i}\pi\delta(x). \tag{6.44}$$

广义函数 $1/x$ 是方程 $xf=1$ 的奇广义函数解.

通过广义函数 $1/x$，可以进一步定义

$$\frac{1}{x^m}=\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}x^{m-1}}\frac{1}{x}. \tag{6.45}$$

第七章　常微分方程的 Green 函数

§7.1　广义函数中的微分方程

在经典微积分的范畴内，我们已经熟悉了作为经典函数的常微分方程

$$a_0(x)u^{(n)}(x)+a_1(x)u^{(n-1)}(x)+\cdots+a_n(x)u(x)=b(x) \tag{7.1}$$

的解．但一旦涉及微分方程的 Green 函数问题，方程中出现 δ 函数，原则上就必然应当在广义函数的层次上加以研究．作为广义函数 $u(x)$ 的 n 阶线性常微分方程，(7.1) 式在广义函数下是有意义的．这里需要假设系数 $a_0(x), a_1(x),\cdots,a_n(x)$ 是无限可微函数．本节将从广义函数的角度，建立起微分方程解的概念及其与经典意义下的解的异同，包括概念上的差异和实际解式上的差异．

7.1.1　$\mathscr{R}_1$ 内的微分方程 $u'=0$

考虑特别简单的微分方程

$$u'=0. \tag{7.2}$$

我们知道，作为普通函数的微分方程，其通解 (经典解) 为常数 $u=C$．而且，如果把方程 (7.2) 看成广义函数的微分方程，则广义函数 C 仍然是它的解．现在要证明，作为广义函数的微分方程，方程 (7.2) 的通解仍然只是常数 $u=C$，即作为广义函数微分方程 (7.2) 的通解 u，一定满足 $\langle u,\phi\rangle=\langle c,\phi\rangle$．

首先需要了解，在广义函数的框架内，所谓方程 (7.2) 的广义函数解 u，按照广义函数导数的定义，就应当理解为满足泛函等式

$$\langle u,\phi'\rangle=0,\qquad \forall\phi(x)\in\mathscr{K}. \tag{7.2$'$}$$

但问题是，从表达式 (7.2′) 看，如此定义的泛函 u，它并不是作用在 $\mathscr{C}_0^\infty$ 内的任意函数上，它只作用于 $\mathscr{C}_0^\infty$ 的子集 (记为 M)，此子集内的函数总是 $\mathscr{C}_0^\infty$ 内另一个函数的导数．并非每个检验函数都有这样的特性．例如检验函数 (5.1) 就不是另一个检验函数的导数．对于检验函数空间 $\mathscr{C}_0^\infty$ 内的子集 M，一定具有下列性质：

引理 7.1　设 $\psi\in\mathscr{C}_0^\infty(\mathscr{R}_1)$，则 $\psi\in M$ 的充分必要条件是

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi\,\mathrm{d}x=0. \tag{7.3}$$

证　先证必要性．若 $\psi\in M$，则 $\psi=\chi'$，其中 $\chi\in\mathscr{C}_0^\infty(\mathscr{R}_1)$．由此得出 $\int_{-\infty}^{\infty}\psi\mathrm{d}x=\chi\Big|_{-\infty}^{\infty}=0$，故 (7.3) 式成立．

再证充分性. 因 $\psi \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathscr{R}_1)$，且 $\int_{-\infty}^{\infty} \psi \, \mathrm{d}x = 0$，故可定义 $\chi(x) = \int_{-\infty}^{x} \psi \, \mathrm{d}x$. 则 χ 无限可微，且由于 (7.3) 式，故 χ 在一定有界区间外为 0. 因此 χ 为检验函数，且由 $\chi' = \psi$，可得 $\psi \in M$. □

按照引理 7.1，我们就可以将整个检验函数空间 $\mathscr{C}_0^\infty$ 划分为两部分，一部分是子集 M，其特征是 $\int_{-\infty}^{\infty} \psi \, \mathrm{d}x = 0$，而剩余的部分，应当有 $\int_{-\infty}^{\infty} \phi_0 \, \mathrm{d}x$ 存在，然而不为 0. 在这部分中，我们总可以毫不困难地找到一个检验函数 ϕ_0，满足 $\int_{-\infty}^{\infty} \phi_0 \, \mathrm{d}x = 1$ 的要求. 可以证明，任意一个检验函数 ϕ，总可以表示为 ϕ_0 与 ψ 这两类检验函数的线性叠加，见下面的引理：

引理 7.2　令 $\phi_0(x)$ 是固定 (然而任意) 的检验函数，使 $\int_{-\infty}^{\infty} \phi_0 \, \mathrm{d}x = 1$，则对于任意一个检验函数 $\phi(x) \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathscr{R}_1)$，总存在唯一的一个常数 a 和唯一的一个元素 $\psi \in M$，使得

$$\phi(x) = a\phi_0(x) + \psi(x). \tag{7.4}$$

证　取 $a = \langle 1, \phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi \, \mathrm{d}x$，并且定义 $\psi = \phi - a\phi_0$，由 ψ 的定义能看出它是检验函数，且 $\int_{-\infty}^{\infty} \psi \, \mathrm{d}x = 0$. 因此 $\psi \in M$. 唯一性的证明从略. □

完成了这些准备工作之后，现在就可以着手讨论方程 (7.2). 因为 u 为广义函数，由 (7.4) 式，一定有

$$\langle u, \phi \rangle = a \langle u, \phi_0 \rangle + \langle u, \psi \rangle ,$$

其中 $\psi \in M$. 若 u 是 (7.2) 的解，则 $\langle u, \psi \rangle = 0$. 所以对于每一个 $\phi \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathscr{R}_1)$，都有

$$\langle u, \phi \rangle = a \langle u, \phi_0 \rangle = \langle u, \phi_0 \rangle \int_{-\infty}^{\infty} \phi \, \mathrm{d}x = \langle c, \phi \rangle ,$$

其中 c 是常数 $\langle u, \phi_0 \rangle$. 这样我们已经证明了只有广义函数为常数才能是方程 (7.2) 的解，容易验证常数广义函数的确满足微分方程 (7.2).

同样可以证明，若 $a_1(x), a_2(x), \cdots, a_n(x)$ 均为无限可微函数，则对于高阶齐次微分方程

$$u^{(n)} + a_1(x)u^{(n-1)} + a_2(x)u^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1}(x)u' + a_n(x)u = 0,$$

在广义函数的意义下，除了经典解之外，也别无它解.

但如果方程的系数有奇点时，情况便会不同：在广义函数中可以出现 (经典解中所没有的) 新的解.

例 7.1　考虑一阶微分方程 $x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$.

当 $x \neq 0$ 时，其解一定为常数. 因此，在广义函数下，就有两个线性无关解 $y_1(x) = 1$ 和 $y_2(x) = \eta(x)$，因而通解为

$$y = C_1 + C_2\eta(x).$$

例 7.2 在广义函数中，方程 $-2x^3y' = y$ 只有单独一个解 $y = 0$，这是因为当 $x \neq 0$ 时广义函数解一定与经典解 $y = C\exp\{x^{-2}\}$ 重合，其中 $C \neq 0$ 或 $C = 0$ 均可. 然而按照 §6.7 结论 3 (见第 168 页) 所述，积分 $\int \exp\{x^{-2}\}\phi(x)\,\mathrm{d}x$ 无法正则化，故只有唯一选择 $C = 0$.

7.1.2 $\mathscr{R}_1$ 内的微分方程 $u' = f$

再转到非齐次方程

$$u' = f, \tag{7.5}$$

其中 f 是任意给定的广义函数. 按照定义，当且仅当

$$\langle u, \phi' \rangle = -\langle f, \phi \rangle, \qquad \forall \phi \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathscr{R}_1)$$

时，f 满足方程 (7.5). 为了求出 (7.5) 的通解，我们利用 (7.4) 式作分解而写为

$$\langle u, \phi \rangle = a\langle u, \phi_0 \rangle + \langle u, \psi \rangle,$$

其中 $\psi \in M$，比如说 $\psi = \chi'$, $\chi \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathscr{R}_1)$. χ 可以用 ϕ 表示出来：

$$\chi = \int_{-\infty}^x \psi(s)\,\mathrm{d}s = \int_{-\infty}^x \phi(s)\,\mathrm{d}s - \langle 1, \phi \rangle \int_{-\infty}^x \phi_0(s)\,\mathrm{d}s.$$

因为 u 是方程 (7.5) 的解，则

$$\langle u, \psi \rangle = \langle u, \chi' \rangle = -\langle f, \chi \rangle,$$

因此

$$\langle u, \phi \rangle = \langle u, \phi_0 \rangle \langle 1, \phi \rangle - \langle f, \chi \rangle.$$

我们能够合理地定义广义函数 u_p[①]，作为方程 (7.5) 的特解：

$$\langle u_p, \phi \rangle = -\langle f, \chi \rangle. \tag{7.6}$$

---

① χ 的确是检验函数，线性地依赖于 ϕ，所以 (7.6) 式就在检验函数 ϕ 的空间内定义了一个线性泛函. 而且如果 $\{\phi_m\}$ 是 $\mathscr{C}_0^\infty(\mathscr{R}_1)$ 内的零序列，则 $\{\psi_m\}$ 及 $\{\chi_m\}$ 亦然. 因此由 (7.6) 式定义的泛函连续，换言之，是广义函数.

因此，方程 (7.5) 的每一个解都一定是

$$\langle u,\phi\rangle = C\langle 1,\phi\rangle + \langle u_p,\phi\rangle$$

的形式. 反之，也容易验证，每一个这种形式的广义函数的确都是解. 这和我们在数学分析中得到的结论一致：非齐次常微分方程的通解等于该方程的一个特解加上相应齐次方程的通解.

7.1.3 经典解、弱解和广义函数解

现在看常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = f(x), \qquad \Omega: a < x < b, \tag{7.7}$$

即

$$\left\langle \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x},\phi \right\rangle = \langle f,\phi\rangle, \qquad \forall\phi\in \mathscr{K}_0^\infty(\Omega), \tag{7.7$'$}$$

其中 $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$ 表示支集在 Ω 内的检验函数类. 如果 $f(x)$ 是连续函数，我们能在经典意义下定义解的概念：若 $u(x)$ 具有连续导数，在 Ω 上逐点满足 (7.7) 式，则称它是**经典解** (或**严格解**). 将 (7.7$'$) 式的左端分部积分，并利用在边界的邻域内 $\phi\equiv 0$ 这一事实，就能得到，对于 (7.7) 式的任意一个经典解，有

$$\int_\Omega f\phi\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega u\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x, \qquad \forall\phi\in \mathscr{C}_0^\infty(\Omega). \tag{7.8}$$

(7.8) 式的两端在 f 及 u 均不局部可积时也有意义，它给出方程 (7.7) 的弱解：若 f 局部可积，则当且仅当对于 $\mathscr{C}_0^\infty(\mathscr{R}_1)$ 内的每一个 ϕ，u 都满足 (7.8) 式时，u 称为方程 (7.7) 的**弱解**. 这时我们也说 $\mathrm{d}u/\mathrm{d}x = f$ 在减弱的意义下成立.

更进一步，如果 f 也是广义函数，则当且仅当广义函数 u 满足

$$-\left\langle u,\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}\right\rangle = \langle f,\phi\rangle, \qquad \forall\phi\in \mathscr{C}_0^\infty(\mathscr{R}_1) \tag{7.9}$$

时，u 称为 (7.7) 的**广义函数解**. 注意 (7.9) 式左端是广义函数 u' 的定义. 如果广义函数 f 是由局部可积函数生成的，并且我们寻找的解 u 也是局部可积函数，则 (7.9) 式退化为 (7.8) 式，即退化为弱解.

可以把这些思想推广到更一般的算符. 令 $\boldsymbol{L}$ 是 n 个自变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的任意 p 阶线性微分算符：

$$\boldsymbol{L} = \sum_{|k|\leqslant p} a_k(x)\boldsymbol{D}^k, \qquad \begin{cases} k=(k_1,k_2,\cdots,k_n), \\ |k| = k_1+k_2+\cdots+k_n. \end{cases}$$

假定 $a_k(x)$ 无限可微，则对于任意广义函数 u，广义函数 $\boldsymbol{L}u$ 总存在，仿照 §6.3 中定义广义函数运算法则的做法，总可以将对 u 实施的微分运算 $\boldsymbol{L}$ 转移到检验函数 ϕ 上：

$$\langle \boldsymbol{L}u, \phi\rangle \triangleq \langle u, \boldsymbol{L}^\dagger \phi\rangle,$$

其中 $\boldsymbol{L}^\dagger$ 就是 $\boldsymbol{L}$ 的伴算符，

$$\boldsymbol{L}^\dagger \phi = \sum_{|k|\leqslant p} (-1)^{|k|} \boldsymbol{D}^k (a_k \phi). \tag{7.10}$$

因此我们也就对方程

$$\boldsymbol{L}u = f, \qquad x \in \Omega \tag{7.11}$$

赋予了广义函数的意义，其中 f 是已知的广义函数.

定义 7.1 如果

$$\langle u, \boldsymbol{L}^\dagger \phi\rangle = \langle f, \phi\rangle, \qquad \forall\, \phi \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathscr{R}_1), \tag{7.12}$$

则称广义函数 u 是方程 (7.11) 的解.

定义 7.2 若 f 局部可积，则称满足 (7.12) 式的局部可积函数 u 为方程 (7.11) 在 Ω 上的弱解.

定理 7.1 令 $f(x)$ 在 Ω 上连续，则

(1) 方程 (7.11) 的经典解也是弱解；

(2) Ω 上有 p 阶连续导数的任意弱解是经典解.

这自然就产生一个问题，方程 (7.11) 是否能有弱解而非经典解. 定理 7.1 之 (2) 告诉我们，任何一个这样的弱解不能属于 $\mathscr{C}^p(\Omega)$. $\Omega = \mathscr{R}_1$ 中的一个简单例子是一阶微分方程 $xu' = 0$，它有弱解 $u(x) = \eta(x)$，$\langle x\eta', \phi\rangle = \langle \eta', x\phi\rangle = \langle \delta, x\phi\rangle = 0$，但显然不是经典解. 在 $\mathscr{R}_1$ 中，弱解与微分方程具有奇点 (在本例中是 $x = 0$) 有关，在该点，方程的最高阶导数 $\boldsymbol{D}^p u$ 的系数为 0. 偏微分方程的情形要更复杂. 这时需要考察最高阶导数的有关各项的系数，见下面的例子.

例 7.3 在 $\mathscr{R}_2$ 中，$x = (x_1, x_2)$. 考虑方程

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0, \tag{7.13}$$

它的经典解是 $u = f(x_2)$，其中 f 可微. 因为在方程中没有涉及对 x_2 求微商，故 $f(x_2)$ 可微的要求可以减弱而仍然满足方程. 例如，$u = \eta(x_2)$ 就是方程 (7.13) 的弱解，因为容易验证

$$\left\langle \frac{\partial \eta(x_2)}{\partial x_1}, \phi(x_1, x_2)\right\rangle = \left\langle \eta(x_2), -\frac{\partial \phi}{\partial x_1}\right\rangle = -\int_0^\infty \mathrm{d}x_2 \int_{-\infty}^\infty \frac{\partial \phi}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x_1$$

$$= -\int_0^\infty \phi(x_1, x_2)\Big|_{x_1=-\infty}^{x_1=\infty} \mathrm{d}x_2 = 0.$$

例 7.4 在 $\mathscr{R}_2$ 中，$x = (x_1, x_2)$. 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 \tag{7.14}$$

有经典解 $u = f(x_1) + g(x_2)$，其中 f 和 g 二次可微. 但即使 f 和 g 不可微，这种类型的 u 仍旧是解. 的确，$u = \eta(x_1) + \eta(x_2)$ 就是方程 (7.14) 的弱解，因为

$$\left\langle \frac{\partial^2 (\eta(x_1) + \eta(x_2))}{\partial x_1 \partial x_2}, \phi(x_1, x_2) \right\rangle = \left\langle \eta(x_1) + \eta(x_2), \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_2} \right\rangle$$
$$= \int_0^\infty \mathrm{d}x_1 \int_{-\infty}^\infty \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_2} \mathrm{d}x_2 + \int_0^\infty \mathrm{d}x_2 \int_{-\infty}^\infty \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_2} \mathrm{d}x_1 = 0.$$

例 7.5 考虑一维空间的齐次波动方程

$$\Box^2 u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \tag{7.15}$$

如果 f 是实变量的任意函数，具有连续二阶导数，则容易看出 $u = f(x-t)$ 是方程 (7.15) 的解. 这个解是以速率 1 向右运动的波. 在物理上似乎没有任何理由限制波形必须二次可微. 下面证明 $u = \eta(x-t)$ 就是 方程(7.15) 的弱解. 因为 $\Box^2$ 是自伴的，按照 (7.12) 式，我们就只需证明

$$\langle \eta(x-t), \Box^2 \phi(x,t) \rangle = 0, \qquad \forall \text{检验函数 } \phi(x,t),$$

或者等价地，

$$\iint_{x>t} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = 0, \qquad \forall \phi \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathscr{R}_2). \tag{7.16}$$

作变量变换 $x_1 = x - t$, $x_2 = x + t$，我们发现，上面的积分就简化为

$$\int_0^\infty \mathrm{d}x_1 \int_{-\infty}^\infty \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_2} \mathrm{d}x_2.$$

因为 $\partial\phi/\partial x_1$ 仍为检验函数，故

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_2} \mathrm{d}x_2 = 0.$$

由此就证明了 (7.16) 式. 同样的办法可以证明 $u = \eta(x+t)$ 也是方程 (7.15) 的弱解. 我们看到，方程 (7.15) 的弱解在特征线 $x = t$ 和 $x = -t$ (即 $x_1 = 0$ 和 $x_2 = 0$) 上可以有跃变.

§7.2　常微分方程初值问题的 Green 函数

设有 Sturm-Liouville 型 (非齐次) 常微分方程的初值问题

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[p(t)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right]+q(t)y(t)=f(t), \tag{7.17a}$$

$$y(0)=A, \qquad y'(0)=B, \tag{7.17b}$$

这里不要求系数 $p(t)$ 与 $q(t)$ 是偶函数，同时约定 $y(t<0)=0$. 现在的问题是：如何定义相应的 Green 函数，使之能用于求解上述常微分方程初值问题.

7.2.1　Green 函数解法：冲量定理

我们可以定义上述常微分方程初值问题的 Green 函数 $g(t;\tau)$，它是常微分方程初值问题

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[p(t)\frac{\mathrm{d}g(t;\tau)}{\mathrm{d}t}\right]+q(t)g(t;\tau)=\delta(t-\tau), \tag{7.18a}$$

$$g(t;\tau)\big|_{t<\tau}=0, \qquad \left.\frac{\mathrm{d}g(t;\tau)}{\mathrm{d}t}\right|_{t<\tau}=0 \tag{7.18b}$$

的解. 在初值问题 (7.17) 中的 A,B 均为 0 的条件下，可以由 $g(t;\tau)$ 直接叠加出 $y(t)$. 其基本思路是，将方程 (7.17a) 的非齐次项分解为无穷多个脉冲：

$$f(t)=\int_0^\infty f(\tau)\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau,$$

利用方程 (7.18a) 置换上式中的 $\delta(t-\tau)$，即

$$\begin{aligned} f(t) &=\int_0^\infty f(\tau)\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[p(t)\frac{\mathrm{d}g(t;\tau)}{\mathrm{d}t}\right]+q(t)g(t;\tau)\right\}\mathrm{d}\tau \\ &=\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[p(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right]+q(t)\right\}\int_0^\infty f(\tau)g(t;\tau)\mathrm{d}\tau, \end{aligned}$$

再与 (7.17a) 式比较，就能推断出

$$y(t)=\int_0^\infty f(\tau)g(t;\tau)\mathrm{d}\tau=\int_0^t f(\tau)g(t;\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{7.19}$$

如果 A,B 不为 0，我们可以 (根据冲量定理) 将初值问题 (7.17) 改写成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[p(t)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right]+q(t)y(t)=f(t)+p(0)\big[B\delta(t-0)+A\delta'(t-0)\big], \tag{7.20a}$$

$$y(0)=0, \qquad y'(0)=0, \tag{7.20b}$$

从而得到

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^{\infty} \Big\{ f(\tau) + p(0)\big[B\delta(\tau-0) + A\delta'(\tau-0)\big] \Big\} g(t;\tau)\mathrm{d}\tau \\ &= \int_0^t f(\tau)g(t;\tau)\mathrm{d}\tau + p(0)\left[Bg(t;0) - A\frac{\mathrm{d}g(t;\tau)}{\mathrm{d}\tau}\bigg|_{\tau=0} \right]. \end{aligned} \tag{7.21}$$

在上面的推导过程中，需要将初始条件 (7.20b) 中的 $y(0)$ 与 $y'(0)$ 理解为 $y(0-)$ 与 $y'(0-)$，或者将方程 (7.20a) 中 $\delta(t-0)$ 与 $\delta'(t-0)$ 的本性点理解为 $0+$.

7.2.2 另一种 Green 函数解法

我们还可以引进初值问题 (7.17) 所对应的伴随 Green 函数 $g^{\dagger}(-\tau;-t)$，它满足微分方程初值问题

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left[p(\tau)\frac{\mathrm{d}g^{\dagger}(-\tau;-t)}{\mathrm{d}\tau} \right] + q(\tau)g^{\dagger}(-\tau;-t) = \delta(t-\tau), \tag{7.22a}$$

$$g^{\dagger}(-\tau;-t)\big|_{-\tau<-t} = 0, \qquad \frac{\mathrm{d}g^{\dagger}(-\tau;-t)}{\mathrm{d}\tau}\bigg|_{-\tau<-t} = 0, \tag{7.22b}$$

亦即

$$g^{\dagger}(-\tau;-t)\big|_{\tau>t} = 0, \qquad \frac{\mathrm{d}g^{\dagger}(-\tau;-t)}{\mathrm{d}\tau}\bigg|_{\tau>t} = 0. \tag{7.22c}$$

我们可以把 $g^{\dagger}(-\tau;-t)$ 理解为体系在 $-t$ 时刻受到一个单位强度的扰动后而在 $-\tau$ 时刻的响应；初始条件 (7.22b) 表明体系在受到扰动之前完全处于静止状态.

Green 函数 $g^{\dagger}$ 与 g 并不相等，因为它们是不同方程的解. 事实上，方程 (7.22a) 等价于 (这只是将 t 与 τ 互易而后将 $-t$ 与 $-\tau$ 改写为 t 与 τ)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[p(-t)\frac{\mathrm{d}g^{\dagger}(t;\tau)}{\mathrm{d}t} \right] + q(-t)g^{\dagger}(t;\tau) = \delta(t-\tau). \tag{7.22a$'$}$$

可以看出，除非 $p(-t)=p(t)$, $q(-t)=q(t)$ ①，否则方程 (7.22a′) 左端的算符

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[p(-t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \right] + q(-t)$$

不同于出现在方程 (7.17a) 左端的算符.

为了用 Green 函数 $g^{\dagger}(-\tau;-t)$ 叠加出定解问题 (7.17) 的解，需要先将该定解问题改写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left[p(\tau)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau} \right] + q(\tau)y(\tau) = f(\tau), \tag{7.17a$'$}$$

$$y(0) = A, \qquad y'(0) = B. \tag{7.17b$'$}$$

---

① 显然，当 $p(-t)=p(t)$, $q(-t)=q(t)$ 时，就有 $g^{\dagger}(-\tau;-t)=g(-\tau;-t)$，即 $g^{\dagger}(t;\tau)=g(t;\tau)$.

而后将方程 (7.17a′) 与 (7.22a) 分别乘以 $g^\dagger(-\tau;-t)$ 与 $y(\tau)$，相减，再在区间 $(-\infty,\infty)$ 上积分，即得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left\{g^\dagger(-\tau;-t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left[p(\tau)\frac{\mathrm{d}y(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\right]-y(\tau)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left[p(\tau)\frac{\mathrm{d}g^\dagger(-\tau;-t)}{\mathrm{d}\tau}\right]\right\}\mathrm{d}\tau$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\Big[f(\tau)g^\dagger(-\tau;-t)-y(\tau)\delta(t-\tau)\Big]\mathrm{d}\tau.$$

因此，定解问题 (7.17) 的解为

$$\begin{aligned}y(t)&=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)g^\dagger(-\tau;-t)\mathrm{d}\tau-\left\{p(\tau)\left[g^\dagger(-\tau;-t)\frac{\mathrm{d}y(\tau)}{\mathrm{d}\tau}-y(\tau)\frac{\mathrm{d}g^\dagger(-\tau;-t)}{\mathrm{d}\tau}\right]\right\}_{-\infty}^{\infty}\\&=\int_0^t f(\tau)g^\dagger(-\tau;-t)\mathrm{d}\tau+p(0)\left[g^\dagger(-\tau;-t)\frac{\mathrm{d}y(\tau)}{\mathrm{d}\tau}-y(\tau)\frac{\mathrm{d}g^\dagger(-\tau;-t)}{\mathrm{d}\tau}\right]_{\tau=0}\\&=\int_0^t f(\tau)g^\dagger(-\tau;-t)\mathrm{d}\tau+p(0)\left[Bg^\dagger(0;-t)-A\frac{\mathrm{d}g^\dagger(-\tau;-t)}{\mathrm{d}\tau}\bigg|_{\tau=0}\right].\end{aligned}\tag{7.23}$$

7.2.3 Green 函数的对称性

当方程 (7.17a) 具有时间反演不变性，即 $p(-t)=p(t)$，$q(-t)=q(t)$ 时，可以证明 Green 函数具有对称性 (或称倒易性)

$$g(t;\tau)=g(-\tau;-t).\tag{7.24}$$

如果 $p(-t)\neq p(t)$，$q(-t)\neq q(t)$，此式当然不再成立．然而比较 (7.21) 与 (7.23) 两式，就会发现，我们应当有

$$g(t;\tau)=g^\dagger(-\tau;-t).\tag{7.25}$$

这个结果原则上可以根据 $g(t;\tau)$ 与 $g^\dagger(-\tau;-t)$ 满足的初值问题 (7.18) 与 (7.22) 而导出．请读者补足证明．

7.2.4 一般的常微分方程初值问题

对于一般的常微分方程初值问题

$$\alpha(t)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+\beta(t)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\gamma(t)y(t)=f(t),\tag{7.26a}$$

$$y(0)=A,\qquad y'(0)=B,\tag{7.26b}$$

我们固然可以将方程 (7.26a) 变为 Sturm-Liouville 型的 (非齐次) 方程，但是也可以直接由此初值问题定义相关的 Green 函数，并进而求出初值问题的解 $y(t)$．这时采用微分算符及其伴算符的记号，会显得更加简捷．为此令

$$\boldsymbol{L}_t=\alpha(t)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}+\beta(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+\gamma(t),\tag{7.27a}$$

则方程 (7.26a) 即可改写为 $\boldsymbol{L}_t y = f(t)$. 定义 Green 函数 $g^\dagger(-\tau;-t)$ 为下列常微分方程初值问题的解：

$$\boldsymbol{M}_\tau\, g^\dagger(-\tau;-t) = \delta(t-\tau), \qquad 0<t,\tau<\infty, \tag{7.28a}$$

$$g^\dagger(-\tau;-t)\Big|_{\tau>t} = 0, \qquad \frac{\mathrm{d}g^\dagger(-\tau;-t)}{\mathrm{d}\tau}\Bigg|_{\tau>t} = 0, \tag{7.28b}$$

其中 $\boldsymbol{M}_\tau$ 是 $\boldsymbol{L}_\tau$ 的伴算符：

$$\boldsymbol{M}_\tau = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2}\big[\alpha(\tau)\big] - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\big[\beta(\tau)\big] + \gamma(\tau). \tag{7.27b}$$

同时将初值问题 (7.26) 中的自变量改写为 τ，即

$$\boldsymbol{L}_\tau\, y(\tau) = f(\tau), \tag{7.29a}$$

$$y(0) = A, \qquad y'(0) = B, \tag{7.29b}$$

再将方程 (7.29a) 乘以 $g^\dagger(-\tau;-t)$，方程 (7.28a) 乘以 $y(\tau)$，相减而后积分，于是有

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \big[g^\dagger(-\tau;-t)\,\boldsymbol{L}_\tau\, y(\tau) - y(\tau)\,\boldsymbol{M}_\tau\, g^\dagger(-\tau;-t)\big]\,\mathrm{d}\tau \\
&\quad= \int_0^\infty \big[f(\tau)g^\dagger(-\tau;-t) - y(\tau)\delta(t-\tau)\big]\mathrm{d}\tau \\
&\quad= \int_0^\infty f(\tau)g^\dagger(-\tau;-t)\mathrm{d}\tau - y(t).
\end{aligned}$$

由此即得

$$\begin{aligned}
y(t) &= \int_0^\infty f(\tau)g^\dagger(-\tau;-t)\mathrm{d}\tau - \int_0^\infty \big[g^\dagger(-\tau;-t)\,\boldsymbol{L}_\tau\, y(\tau) - y(\tau)\,\boldsymbol{M}_\tau\, g^\dagger(-\tau;-t)\big]\mathrm{d}\tau \\
&= \int_0^t f(\tau)g^\dagger(-\tau;-t)\mathrm{d}\tau - \int_0^\infty \big[g^\dagger(-\tau;-t)\,\boldsymbol{L}_\tau\, y(\tau) - y(\tau)\,\boldsymbol{M}_\tau\, g^\dagger(-\tau;-t)\big]\mathrm{d}\tau.
\end{aligned}$$

注意

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \big[g^\dagger(-\tau;-t)\,\boldsymbol{L}_\tau\, y(\tau) - y(\tau)\,\boldsymbol{M}_\tau\, g^\dagger(-\tau;-t)\big]\mathrm{d}\tau \\
&\quad= \int_0^\infty \left\{g^\dagger(-\tau;-t)\alpha(\tau)\frac{\mathrm{d}^2 y(\tau)}{\mathrm{d}\tau^2} - y(\tau)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2}\Big[\alpha(\tau)g^\dagger(-\tau;-t)\Big]\right\}\mathrm{d}\tau \\
&\qquad+ \int_0^\infty \left\{g^\dagger(-\tau;-t)\beta(\tau)\frac{\mathrm{d}y(\tau)}{\mathrm{d}\tau} + y(\tau)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\Big[\beta(\tau)g^\dagger(-\tau;-t)\Big]\right\}\mathrm{d}\tau \\
&\quad= \left\{\alpha(\tau)\left[g^\dagger(-\tau;-t)\frac{\mathrm{d}y(\tau)}{\mathrm{d}\tau} - y(\tau)\frac{\mathrm{d}g^\dagger(-\tau;-t)}{\mathrm{d}\tau}\right]\right\}_0^\infty
\end{aligned}$$

$$+\left[\beta(\tau)-\alpha'(\tau)\right]y(\tau)g^{\dagger}(-\tau;-t)\Big|_0^{\infty}$$
$$=-\alpha(0)\left[Bg^{\dagger}(0;-t)-A\frac{\mathrm{d}g^{\dagger}(-\tau;-t)}{\mathrm{d}\tau}\bigg|_{\tau=0}\right]-\left[\beta(0)-\alpha'(0)\right]Ag^{\dagger}(0;-t),$$

因此最后就得到

$$y(t)=\int_0^t f(\tau)g^{\dagger}(-\tau;-t)\mathrm{d}\tau+\left[\beta(0)-\alpha'(0)\right]Ag^{\dagger}(0;-t)$$
$$+\alpha(0)\left[Bg^{\dagger}(0;-t)-A\frac{\mathrm{d}g^{\dagger}(-\tau;-t)}{\mathrm{d}\tau}\bigg|_{\tau=0}\right]. \tag{7.30}$$

显然，当 $\alpha'(t)=\beta(t)$ 时，此结果即与 (7.23) 式一致.

另外，也可以想到，如果要定义 Green 函数 $g(t;\tau)$，则按照 (7.25) 式的要求，它应当是

$$\boldsymbol{M}_t\, g(t;\tau)=\delta(t-\tau), \qquad 0<t,\ \tau<\infty, \tag{7.31a}$$
$$g(t;\tau)\big|_{t<\tau}=0, \qquad \frac{\mathrm{d}g(t;\tau)}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t<\tau}=0 \tag{7.31b}$$

的解.

§7.3 常微分方程边值问题的 Green 函数

对于 Sturm-Liouville 型非齐次常微分方程的边值问题

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+q(x)y(x)=f(x), \tag{7.32a}$$
$$y(a)=A, \qquad y(b)=B, \tag{7.32b}$$

我们可以定义 Green 函数 $g(x;\xi)$ 为定解问题

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}g(x;\xi)}{\mathrm{d}x}\right]+q(x)g(x;\xi)=\delta(x-\xi), \qquad a<x,\ \xi<b, \tag{7.33a}$$
$$g(a;\xi)=0, \qquad g(b;\xi)=0 \tag{7.33b}$$

的解. 在一般的数学物理方法教材中都会证明此 Green 函数具有对称性:

$$g(x;\xi)=g(\xi;x). \tag{7.34}$$

边值问题 (7.32) 的解 $y(x)$ 可由 $g(x;\xi)$ 叠加而得，即

$$y(x)=\int_a^b g(x;\xi)f(\xi)\mathrm{d}\xi+\left[Bp(b)\frac{\mathrm{d}g(x;\xi)}{\mathrm{d}\xi}\bigg|_{\xi=b}-Ap(a)\frac{\mathrm{d}g(x;\xi)}{\mathrm{d}\xi}\bigg|_{\xi=a}\right]. \tag{7.35}$$

有关证明与推导，此处不再重复.

第三类边界条件的情形可以类似地讨论.

如果我们面临的是非 Sturm-Liouville 型常微分方程的边值问题

$$\alpha(x)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+\beta(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\gamma(x)y(x)=f(x), \tag{7.36a}$$

$$y(a)=A, \qquad y(b)=B, \tag{7.36b}$$

则有两种方法可供选择：第一种方法是将它转化为 Sturm-Liouville 型非齐次常微分方程的边值问题. 为此将方程 (7.36a) 的两端同乘以 $\rho(x)$:

$$\alpha(x)\rho(x)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+\beta(x)\rho(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\gamma(x)\rho(x)y=f(x)\rho(x),$$

选择 $\rho(x)$，使得 $\alpha(x)\rho(x)=p(x)$, $\beta(x)\rho(x)=p'(x)$，即

$$\rho(x)=\frac{1}{\alpha(x)}\exp\left\{\int^x\frac{\beta(\xi)}{\alpha(\xi)}\mathrm{d}\xi\right\},$$

而后就可以直接引用 (7.32) — (7.35) 式的结果，只是要将 (7.32a) 及 (7.35) 式中的 $f(x)$ 换成 $f(x)\,\rho(x)$.

第二种方法是直接根据定解问题 (7.36) 定义相应的 Green 函数 $\mathscr{G}(x;\xi)$ 或 $\mathscr{G}^\dagger(x;\xi)$. 采用上一节中的记号

$$\boldsymbol{L}_x=\alpha(x)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+\beta(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+\gamma(x), \tag{7.37a}$$

$$\boldsymbol{M}_x=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\big[\alpha(x)\big]-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big[\beta(x)\big]+\gamma(x), \tag{7.37b}$$

$\mathscr{G}(x;\xi)$ 和 $\mathscr{G}^\dagger(\xi;x)$ 分别是边值问题

$$\boldsymbol{L}_x\,\mathscr{G}(x;\xi)=\delta(x-\xi), \tag{7.38a}$$

$$\mathscr{G}(a;\xi)=0, \qquad \mathscr{G}(b;\xi)=0 \tag{7.38b}$$

与

$$\boldsymbol{M}_x\,\mathscr{G}^\dagger(x;\xi)=\delta(x-\xi), \tag{7.39a}$$

$$\mathscr{G}^\dagger(a;\xi)=0, \qquad \mathscr{G}^\dagger(b;\xi)=0 \tag{7.39b}$$

的解. 将边值问题 (7.39) 中的 ξ 改写为 ξ'，而后将方程 (7.38a) 与 (7.39a) 分别乘以 $\mathscr{G}^\dagger(x;\xi')$ 与 $\mathscr{G}(x;\xi)$，所得二式相减，再积分，并代入边界条件 (7.38b) 与 (7.39b)，就能证得

$$\mathscr{G}(\xi';\xi)=\mathscr{G}^\dagger(\xi;\xi'), \qquad \text{亦即} \qquad \mathscr{G}(x;\xi)=\mathscr{G}^\dagger(\xi;x). \tag{7.40}$$

根据 (7.40) 式，还能进一步得到 $\boldsymbol{M}_\xi\,\mathscr{G}(x;\xi)=\boldsymbol{M}_\xi\,\mathscr{G}^\dagger(\xi;x)$，因此

$$\boldsymbol{M}_\xi\, \mathscr{G}(x;\xi) = \delta(x-\xi). \tag{7.41a}$$

同时将 (7.40) 与 (7.39b) 式结合起来，又有

$$\mathscr{G}(x;a) = 0, \qquad \mathscr{G}(x;b) = 0. \tag{7.41b}$$

与此同时，将边值问题 (7.36) 中的自变量改换为 ξ，而后将此方程及 (7.41a) 式分别乘以 $\mathscr{G}(x;\xi)$ 与 $y(\xi)$，所得二式相减，再积分：

$$\int_a^b \Big[\mathscr{G}(x;\xi)\,\boldsymbol{M}_\xi\, y(\xi) - y(\xi)\,\boldsymbol{L}_\xi\, \mathscr{G}(x;\xi)\Big]\mathrm{d}\xi = \int_a^b \Big[\mathscr{G}(x;\xi)f(\xi) - y(\xi)\delta(x-\xi)\Big]\mathrm{d}\xi,$$

即得

$$y(x) = \int_a^b \mathscr{G}(x;\xi)f(\xi)\mathrm{d}\xi - \left\{\alpha(\xi)\left[\mathscr{G}(x;\xi)\frac{\mathrm{d}y(\xi)}{\mathrm{d}\xi} - y(\xi)\frac{\mathrm{d}\,\mathscr{G}(x;\xi)}{\mathrm{d}\xi}\right]\right\}_{\xi=a}^{\xi=b} - \left\{\Big[\beta(\xi)-\alpha'(\xi)\Big]y(\xi)\,\mathscr{G}(x;\xi)\right\}_{\xi=a}^{\xi=b}.$$

代入边界条件 (7.36b) 及 (7.41b)，就得到边值问题 (7.36) 的解

$$y(x) = \int_a^b \mathscr{G}(x;\xi)f(\xi)\mathrm{d}\xi + \left[B\alpha(b)\frac{\mathrm{d}\,\mathscr{G}(x;\xi)}{\mathrm{d}\xi}\bigg|_{\xi=b} - A\alpha(a)\frac{\mathrm{d}\,\mathscr{G}(x;\xi)}{\mathrm{d}\xi}\bigg|_{\xi=a}\right]. \tag{7.42}$$

☞ **评述**

1. 当 $\alpha'(x) = \beta(x)$ 时，$\boldsymbol{L}_x = \boldsymbol{M}_x$，就退化为 Sturm-Liouville 常微分方程的情形. 因此 $\mathscr{G}^\dagger(x;\xi) = \mathscr{G}(x;\xi)$，(7.40) 式也就变为 (7.34) 式.

2. 当 $\alpha'(x) \neq \beta(x)$ 时，(7.40) 式只对第一类边界条件成立.

3. 直接比较边值问题 (7.38) 与 (7.33)，还能导出它们的解之间的关系

$$\mathscr{G}(x;\xi) = \rho(\xi)g(x;\xi), \tag{7.43a}$$

再考虑到关系式 (7.40)，又能得出

$$\mathscr{G}^\dagger(\xi;x) = \rho(x)g(x;\xi). \tag{7.43b}$$

例 7.6 求解

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}g(x;\xi)}{\mathrm{d}x}\right] + \nu(\nu+1)g(x;\xi) = \delta(x-\xi),$$
$$g(x;\xi)\big|_{x=\pm1}\ \text{有界},$$

其中 ν 不为整数.

解　考虑到这是一个特殊的非齐次方程边值问题：方程的非齐次项只出现在 $x=\xi$ 一点，故可以先在 $x\neq\xi$ 处求出满足齐次常微分方程及边界条件的解

$$g(x;\xi)=\begin{cases}A\mathrm{P}_\nu(-x), & -1<x<\xi,\\ B\mathrm{P}_\nu(x), & \xi<x<1,\end{cases}$$

再根据连接条件

$$g(x;\xi)\Big|_{x=\xi-}^{x=\xi+}=0,\qquad \frac{\mathrm{d}g(x;\xi)}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=\xi-}^{x=\xi+}=\frac{1}{1-\xi^2},$$

即可定出系数 A, B. 显然，

$$B\mathrm{P}_\nu(\xi)-A\mathrm{P}_\nu(-\xi)=0,\qquad B\frac{\mathrm{dP}_\nu(\xi)}{\mathrm{d}\xi}-A\frac{\mathrm{dP}_\nu(-\xi)}{\mathrm{d}\xi}=\frac{1}{1-\xi^2}.$$

因为 (见第九章 (9.4) 式)

$$\begin{vmatrix}\mathrm{P}_\nu(x) & -\mathrm{P}_\nu(-x)\\ \dfrac{\mathrm{dP}_\nu(x)}{\mathrm{d}x} & -\dfrac{\mathrm{dP}_\nu(-x)}{\mathrm{d}x}\end{vmatrix}=\frac{2}{\pi}\frac{\sin\nu\pi}{1-x^2},$$

所以

$$B=\frac{\pi}{2}\frac{1-\xi^2}{\sin\nu\pi}\begin{vmatrix}0 & -\mathrm{P}_\nu(-\xi)\\ \dfrac{1}{1-\xi^2} & -\dfrac{\mathrm{dP}_\nu(-\xi)}{\mathrm{d}\xi}\end{vmatrix}=\frac{\pi}{2}\frac{1}{\sin\nu\pi}\mathrm{P}_\nu(-\xi),$$

$$A=\frac{\pi}{2}\frac{1-\xi^2}{\sin\nu\pi}\begin{vmatrix}\mathrm{P}_\nu(\xi) & 0\\ \dfrac{\mathrm{dP}_\nu(\xi)}{\mathrm{d}\xi} & \dfrac{1}{1-\xi^2}\end{vmatrix}=\frac{\pi}{2}\frac{1}{\sin\nu\pi}\mathrm{P}_\nu(\xi).$$

最后就得到

$$g(x;\xi)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{\sin\nu\pi}\mathrm{P}_\nu(\xi)\mathrm{P}_\nu(-x), & -1<x<\xi,\\ \dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{\sin\nu\pi}\mathrm{P}_\nu(-\xi)\mathrm{P}_\nu(x), & \xi<x<1.\end{cases}$$

由此结果也可看出，当 ν 是整数时，此问题无解.

还可以用本征函数展开法求 Green 函数 $g(x;\xi)$. 为此令

$$g(x;\xi)=\sum_{l=0}^{\infty}g_l(\xi)\mathrm{P}_l(x).$$

它一定满足边界条件 $g(x;\xi)\big|_{x=\pm1}$ 有界，因此只需代入微分方程定出 $g_l(\xi)$ 即可. 将 $\delta(x-\xi)$ 也按 $\mathrm{P}_l(x)$ 展开，得

$$\sum_{l=0}^{\infty}\big[\nu(\nu+1)-l(l+1)\big]g_l(\xi)\mathrm{P}_l(x)=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{2l+1}{2}\mathrm{P}_l(\xi)\,\mathrm{P}_l(x),$$

比较系数，就能求出

$$g_l(\xi)=\frac{2l+1}{2}\,\frac{1}{\nu(\nu+1)-l(l+1)}\,\mathrm{P}_l(\xi).$$

因此

$$g(x;\xi)=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{2l+1}{2}\,\frac{1}{\nu(\nu+1)-l(l+1)}\,\mathrm{P}_l(\xi)\,\mathrm{P}_l(x).$$

例 7.7 求解

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}g(x;\xi)}{\mathrm{d}x}\right]+\nu(\nu+1)g(x;\xi)=\delta(x-\xi),$$

$$g(x;\xi)\big|_{x=0}=0,\qquad g(x;\xi)\big|_{x=1}\text{有界},$$

其中 ν 不为整数.

解 本例题与例 7.6 大同小异：微分方程相同，差别只在于求解的区间不同，边界条件因而也有所不同. 但同样可以先在 $x\neq\xi$ 处求出满足齐次常微分方程及边界条件的解

$$g(x;\xi)=\begin{cases}A\big[\mathrm{P}_\nu(x)-\mathrm{P}_\nu(-x)\big], & 0<x<\xi,\\ B\mathrm{P}_\nu(x), & \xi<x<1,\end{cases}$$

再由连接条件

$$g(x;\xi)\Big|_{x=\xi-}^{x=\xi+}=0,\qquad \frac{\mathrm{d}g(x;\xi)}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=\xi-}^{x=\xi+}=\frac{1}{1-\xi^2}$$

导出系数 A, B 之间应当满足的关系

$$A\big[\mathrm{P}_\nu(\xi)-\mathrm{P}_\nu(-\xi)\big]-B\mathrm{P}_\nu(\xi)=0,$$

$$A\left[\frac{\mathrm{dP}_\nu(\xi)}{\mathrm{d}x}-\frac{\mathrm{dP}_\nu(-\xi)}{\mathrm{d}x}\right]-B\frac{\mathrm{dP}_\nu(\xi)}{\mathrm{d}x}=-\frac{1}{1-\xi^2},$$

从而可以求得

$$A=-\frac{\pi}{2\sin\nu\pi}\mathrm{P}_\nu(\xi),\qquad B=-\frac{\pi}{2\sin\nu\pi}\big[\mathrm{P}_\nu(\xi)-\mathrm{P}_\nu(-\xi)\big],$$

因此

$$g(x;\xi)=\begin{cases}-\dfrac{\pi}{2\sin\nu\pi}\mathrm{P}_\nu(\xi)\big[\mathrm{P}_\nu(x)-\mathrm{P}_\nu(-x)\big], & 0<x<\xi,\\ -\dfrac{\pi}{2\sin\nu\pi}\big[\mathrm{P}_\nu(\xi)-\mathrm{P}_\nu(-\xi)\big]\mathrm{P}_\nu(x), & \xi<x<1.\end{cases}$$

和例 7.6 一样，也可以用本征函数展开法求解本题的 Green 函数. 只是需要注意，由于本征值问题

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right]+\lambda y(x)=0,$$
$$y(0)=0,\qquad y(1)\,\text{有界}$$

的解为

$$\begin{aligned}\lambda_l&=(2l+1)(2l+2),\\ y_l(x)&=\mathrm{P}_{2l+1}(x),\end{aligned}\qquad l=0,1,2,\cdots,$$

本征函数组 $\{\mathrm{P}_{2l+1}(x)\}$ 在 $[0,1]$ 上是正交完备的:

$$\int_0^1 \mathrm{P}_{2l+1}(x)\,\mathrm{P}_{2k+1}(x)=\frac{1}{4l+3}\,\delta_{kl}.$$

采用与例 7.6 类似的步骤，就能求得

$$g(x;\xi)=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{4l+3}{\nu(\nu+1)-(2l+1)(2l+2)}\,\mathrm{P}_{2l+1}(\xi)\,\mathrm{P}_{2l+1}(x).$$

§7.4 Green 函数的本征函数展开

7.4.1 关于本征值问题的约定

设有常微分方程的本征值问题

$$-(pu')'+qu-\lambda\rho u=0,\qquad a<x<b,\tag{7.44a}$$

$$\boldsymbol{B}_a u=\boldsymbol{B}_b u=0.\tag{7.44b}$$

这里为了书写的简便，已经将 (非混合型的) 边界条件简写成算符形式，其定义为

$$\boldsymbol{B}_a u\equiv\cos\alpha\,u(a)-\sin\alpha\,u'(a)=0,\tag{7.45a}$$

$$\boldsymbol{B}_b u\equiv\cos\beta\,u(b)+\sin\beta\,u'(b)=0,\tag{7.45b}$$

其中 α 和 β 为给定的实数，$0\leqslant\alpha<\pi$, $0\leqslant\beta<\pi$. 通常假设本征值问题 (7.44) 中的系数 p,q,ρ 是 $a<x<b$ 上的实值函数；p,p',q,ρ 在 $a<x<b$ 上连续；p 和 ρ 在

$a<x<b$ 上为正. 如果区间是有限的，还要求上述所有假设均在闭区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上成立. 这样的本征值问题称为正则的；否则称为奇异的. 这里只讨论正则的本征值问题.

把本征值问题 (7.44) 写成

$$\boldsymbol{L}\,u-\lambda u=0, \tag{7.46}$$

其中算符 $\boldsymbol{L}$ 为

$$\boldsymbol{L}\,u=\frac{1}{\rho}\left[-(pu')'+qu\right]. \tag{7.47}$$

(7.46) 式是标准的本征值问题的形式，由于 $\boldsymbol{L}$ 中因子 $1/\rho$ 的存在，故应当定义内积为

$$\langle v,u\rangle_\rho=\int_a^b v^*u\rho\,\mathrm{d}x.$$

因为在 $a<x<b$ 内 $\rho(x)>0$，所以对于 $u\neq 0$，$\langle u,u\rangle_\rho$ 为正，因而能用于定义范数

$$\|u\|_\rho=\langle u,u\rangle_\rho^{1/2}=\left(\int_a^b|u|^2\rho\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}.$$

我们只讨论 $\displaystyle\int_a^b|u|^2\rho\,\mathrm{d}x$ 有限的函数 u，它们组成 Hilbert 空间 $\mathscr{H}_\rho$，其正交性为

$$\langle v,u\rangle_\rho=0,\qquad \text{即}\qquad \int_a^b v^*u\rho\,\mathrm{d}x=0.$$

令 $\{e_n\}$ 是 $\mathscr{H}_\rho$ 的正交归一基，则对于 $\mathscr{H}_\rho$ 内的每个 f，有

$$f=\sum_n\langle e_n,f\rangle_\rho\,e_n=\sum_n\left[\int_a^b e_n^*(\xi)f(\xi)\rho(\xi)\mathrm{d}\xi\right]e_n(x). \tag{7.48}$$

如果 f 属于 $\mathscr{L}_2(a,b)$，则 f/ρ 属于 $\mathscr{H}_\rho$，因此

$$\frac{f}{\rho}=\sum_n\left\langle e_n,\frac{f}{\rho}\right\rangle_\rho e_n=\sum_n\langle e_n,f\rangle e_n=\sum_n\left[\int_a^b e_n^*(\xi)f(\xi)\mathrm{d}\xi\right]e_n(x). \tag{7.49}$$

容易证明 $\boldsymbol{L}$ 及边界算符 $\boldsymbol{B}_a$, $\boldsymbol{B}_b$ 的下列性质：令 u 和 v 是任意二次可微函数，则

$$\boldsymbol{L}u^*=(\boldsymbol{L}u)^*,\qquad \boldsymbol{B}_au^*=(\boldsymbol{B}_au)^*,\qquad \boldsymbol{B}_bu^*=(\boldsymbol{B}_bu)^*, \tag{7.50}$$

$$v^*\boldsymbol{L}u-u\boldsymbol{L}v^*=\frac{1}{\rho}\left[p\left(u(v^*)'-u'v^*\right)\right]'=\frac{1}{\rho}\left[p(x)\,W[u,v^*;x]\right]', \tag{7.51}$$

$$\langle v,\boldsymbol{L}u\rangle_\rho-\langle\boldsymbol{L}v,u\rangle_\rho=p(b)\,W[u,v^*;b]-p(a)\,W[u,v^*;a], \tag{7.52}$$

其中 $W[u,v^*;x]=uv^{*\prime}-u'v^*$ 是 $u(x)$ 和 $v^*(x)$ 的 Wroński 行列式. 如果 u 和 v 均满足边界条件 (7.45)，则 $W[u,v^*;b]=W[u,v^*;a]=0$，所以有

$$\langle v, \boldsymbol{L}u\rangle_\rho = \langle \boldsymbol{L}v, u\rangle_\rho. \tag{7.53}$$

这样，如果算符 $\boldsymbol{L}$ 的定义域 $\mathscr{D}_{\boldsymbol{L}}$ 为具有连续二阶导数且满足 (7.48) 式的函数，则 $\boldsymbol{L}$ 是 Hermite 的；而如果通过放松光滑性条件 (包括进一阶导数绝对连续[①]、二阶导数属于 $\mathscr{H}_\rho$ 的函数) 以稍稍扩大 $\mathscr{D}_{\boldsymbol{L}}$，则 $\boldsymbol{L}$ 在新定义域上实际上是自伴的.

7.4.2 Green 函数与本征函数的关系

现在研究

$$-(pg')'+qg-\lambda\rho g=\delta(x-\xi),\quad a<x,\ \xi<b, \tag{7.54a}$$

$$\boldsymbol{B}_a g=\boldsymbol{B}_b g=0 \tag{7.54b}$$

的 Green 函数 $g(x;\xi|\lambda)$ 与本征值问题 (7.44) 的本征函数 u_n 之间的关系. 将 $g(x;\xi|\lambda)$ 按本征函数 $u_n(x)$ 作展开：

$$g(x;\xi|\lambda)=\sum_n g_n(\xi,\lambda)u_n(x).$$

为了求出 g_n，用 $u_n^*(x)$ 乘方程 (7.54a)，由 a 到 b 积分，并应用 (7.53) 式，即可得到

$$\langle u_n, \boldsymbol{L}g\rangle_\rho-\lambda\langle u_n,g\rangle_\rho=\langle u_n,g\rangle_\rho(\lambda_n-\lambda)=u_n^*(\xi).$$

所以

$$g_n(\xi,\lambda)=\langle u_n,g\rangle_\rho=\frac{u_n^*(\xi)}{\lambda_n-\lambda}, \tag{7.55a}$$

从而就能求得

$$g(x;\xi|\lambda)=\sum_n\frac{u_n^*(\xi)u_n(x)}{\lambda_n-\lambda}. \tag{7.55b}$$

这是 g 的双线性级数. 我们看到，$g(x;\xi|\lambda)$ 作为 λ 的函数，在 $\lambda=\lambda_n$ 处有奇点. 如果 $\{u_n\}$ 和 $\{\lambda_n\}$ 已知，则可以直接由 (7.55b) 式构造出 g. 与此同时，我们还能求出非齐次方程

$$\begin{aligned}&-(pw')'+qw-\lambda\rho w=f,\quad a<x,\ \xi<b,\\&\boldsymbol{B}_a w=\boldsymbol{B}_b w=0\end{aligned} \tag{7.56}$$

① 如果函数 $v(x)$ 满足

$$u(x)=\int_0^x v(x)\mathrm{d}x+u(0),$$

则称为绝对连续函数. 若 $v(x)$ 连续，则 $u(x)$ 可微；但即使 $v(x)$ 可积，此式仍成立，此时 $u'(x)$ 几乎处处存在，且几乎处处 $u'(x)=v(x)$.

的解 $w(x,\lambda)$. 模仿 (7.55b) 式的推导步骤，可得

$$w(x,\lambda)=\int_a^b g(x;\xi|\lambda)f(\xi)\mathrm{d}\xi=\sum_n\frac{u_n(x)}{\lambda_n-\lambda}\int_a^b u_n^*(\xi)f(\xi)\mathrm{d}\xi=\sum_n\frac{\langle u_n,f\rangle}{\lambda_n-\lambda}u_n. \quad (7.57)$$

现在问一个反问题：根据 $g(x;\xi|\lambda)$ 的已知表达式，是否能确定本征值问题 (7.44) 的本征函数 $\{u_n\}$ 及本征值 $\{\lambda_n\}$? (7.55b) 式表明，作为复参数 λ 的函数，$g(x;\xi|\lambda)$ 在实数 λ_n 处有一阶极点，留数为 $-u_n^*(\xi)u_n(x)$. 这样我们所要做的全部工作就是要在 λ 的复平面上考察 $g(x;\xi|\lambda)$，挑出奇点 (就是本征值) 及在这些奇点处的留数 (与本征函数有关). 在 λ 的复平面上作无穷大圆 C_∞，它就包含了 $g(x;\xi|\lambda)$ 的全部奇点. 于是，沿 C_∞ (逆时针) 计算围道积分，就有

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{C_\infty}g(x;\xi|\lambda)\mathrm{d}\lambda=-\sum_n u_n^*(\xi)u_n(x). \quad (7.58)$$

此式中的级数公认在通常意义下并不收敛，但在广义函数下有意义. 事实上，在 (7.49) 式中令 $f=\delta(x-\xi)$, $e_n=u_n$，我们有

$$\frac{\delta(x-\xi)}{\rho(x)}=\sum_n u_n^*(\xi)u_n(x). \quad (7.59)$$

我们可以用 (7.59) 式去导出本征函数，甚至在连续谱的情形下，也可以用 (7.59) 式，只是要用对连续参量的积分代替求和，而 Green 函数有枝点而非极点.

应用 (7.59) 式的第一步是构造 $g(x;\xi|\lambda)$，从而使得我们能研究它对于 λ 的依赖性. 对于正则问题 (7.54)，当 $x<\xi$ 时，g 是齐次方程的解，满足 $\boldsymbol{B}_a g=0$. 不妨假设此解为 $v(x,\lambda)$，满足

$$v(x,\lambda)\big|_{x=a}=\sin\alpha,\qquad \frac{\mathrm{d}v(x,\lambda)}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=a}=\cos\alpha.$$

这样做的好处是 v 在整个 λ 平面上解析 (因为 v 所满足的方程中 λ 是解析地出现的，而边界条件与 λ 无关). 类似地，令 $w(x,\lambda)$ 是满足齐次方程及初始条件

$$w(x,\lambda)\big|_{x=b}=\sin\beta,\qquad \frac{\mathrm{d}w(x,\lambda)}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=b}=-\cos\beta$$

的解，再令 $x_<=\min(x,\xi)$, $x_>=\max(x,\xi)$，我们就有

$$g(x;\xi|\lambda)=Av(x_<,\lambda)w(x_>,\lambda)=\begin{cases}Av(x,\lambda)w(\xi,\lambda), & a<x<\xi,\\ Av(\xi,\lambda)w(x,\lambda), & \xi<x<b.\end{cases}$$

$\mathrm{d}g/\mathrm{d}x$ 在 $x=\xi$ 点不连续：

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=\xi+}-\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=\xi-}=-\frac{1}{p(\xi)},$$

即

$$A\left[v(\xi,\lambda)w'(\xi,\lambda)-v'(\xi,\lambda)w(\xi,\lambda)\right]=-\frac{1}{p(\xi)}.$$

上式方括号内的表达式正好是 v 和 w 的 Wroński 行列式，它应当等于 $C/p(\xi)$，其中 C 是与 ξ 无关但与 λ 有关的常数. 因此

$$g(x;\xi|\lambda)=-\frac{v(x_<,\lambda)w(x_>,\lambda)}{C(\lambda)}, \tag{7.60}$$

其中的 $C(\lambda)$ 由

$$W[v(x,\lambda),w(x,\lambda);x]=vw'-v'w=\frac{C(\lambda)}{p(x)} \tag{7.61}$$

确定. 因为 v 和 w 都是 x 的整函数，故 v', w' 和 $W[v,w]$ 亦然. 令 $\lambda=\mu$ 是 C 的零点，即 $C(\mu)=0$，于是 $W[v(x,\mu),w(x,\mu);x]=0$，即 $v(x,\mu)$ 与 $w(x,\mu)$ 线性相关. 由于 $v(x,\mu)$ 或/和 $w(x,\mu)$ 不可能恒等于 0，因此 $v(x,\mu)$ 只能是 $w(x,\mu)$ 的非零常数倍 (称为倍乘解)，并且都满足 $x=a,b$ 两端的齐次边界条件. 这说明 μ 是本征值，(未归一化的) 本征函数为 $v(x,\mu)$. 反之，由 (7.55b) 式可见，每个本征值都必定是 g 的奇点，因此 C 必为 0. 这样我们就能得出结论：C 的零点一定与 (7.44) 的本征值重合. 将这些零点 (本征值) 编号：$\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_n<\cdots$, $\lambda_n\to\infty$，于是

$$v(x,\lambda_n)=k_nw(x,\lambda_n), \tag{7.62}$$

其中 k_n 是非零实常数. 由 (7.55b) 式我们也看到 g 只有一阶极点，因此 C 的零点也同样只能是一阶的. 为了使符号简化，我们令

$$v_n(x)\triangleq v(x,\lambda_n),\qquad w_n(x)\triangleq w(x,\lambda_n).$$

这样 $v_n(x)$ (或 $w_n(x)$) 就是对应于 (非简并) 本征值 λ_n 的实本征函数：$v_n(x)=k_nw_n(x)$. $v_n(x)$ 和 $w_n(x)$ 都不是归一化的.

g 在 $\lambda=\lambda_n$ 处的留数为

$$-\frac{v_n(x_<)w_n(x_>)}{C'(\lambda_n)}=-k_n\frac{w_n(x_<)w_n(x_>)}{C'(\lambda_n)}=-\frac{v_n(x_<)v_n(x_>)}{k_nC'(\lambda_n)}.$$

无论 $x<\xi$ 或 $x>\xi$，$w_n(x_<)w_n(x_>)$ 总等于 $w_n(x)w_n(\xi)$，因此 g 在 $\lambda=\lambda_n$ 的留数为

$$-k_n\frac{w_n(x)w_n(\xi)}{C'(\lambda_n)}=-\frac{v_n(x)v_n(\xi)}{k_nC'(\lambda_n)}=-u_n(x)u_n^*(\xi).$$

由此我们就能确认，归一化的实本征函数 $u_n(x)$ 由下式给出：

$$u_n(x)=\pm\frac{v_n(x)}{\sqrt{k_nC'(\lambda_n)}}=\pm\sqrt{\frac{k_n}{C'(\lambda_n)}}w_n(x). \tag{7.63}$$

例 7.8 固定边界的环形薄膜径向振动固有模式 u 及相应的固有频率 λ 满足

$$-(xu')' = \lambda xu, \qquad 0 < a < x < b, \tag{7.64a}$$

$$u(a) = u(b) = 0, \tag{7.64b}$$

其中 x 是到环心的距离.

Green 函数 $g(x;\xi|\lambda)$ 是

$$-(xg')' - \lambda xg = \delta(x-\xi), \qquad 0 < a < x,\ \xi < b, \tag{7.65a}$$

$$g\big|_{x=a} = g\big|_{x=b} = 0 \tag{7.65b}$$

的解. 齐次方程的独立解为 $\mathrm{J}_0(\sqrt{\lambda}x)$, $\mathrm{N}_0(\sqrt{\lambda}x)$. 函数

$$v(x,\lambda) = \mathrm{J}_0(\sqrt{\lambda}a)\mathrm{N}_0(\sqrt{\lambda}x) - \mathrm{J}_0(\sqrt{\lambda}x)\mathrm{N}_0(\sqrt{\lambda}a), \tag{7.66a}$$

$$w(x,\lambda) = \mathrm{J}_0(\sqrt{\lambda}b)\mathrm{N}_0(\sqrt{\lambda}x) - \mathrm{J}_0(\sqrt{\lambda}x)\mathrm{N}_0(\sqrt{\lambda}b) \tag{7.66b}$$

满足齐次方程及各自的初始条件

$$v(a,\lambda) = 0, \qquad v'(a,\lambda) = \sqrt{\lambda}\,W[\mathrm{J}_0,\mathrm{N}_0;\sqrt{\lambda}a] = \frac{2}{\pi a},$$

$$w(b,\lambda) = 0, \qquad w'(b,\lambda) = \sqrt{\lambda}\,W[\mathrm{J}_0,\mathrm{N}_0;\sqrt{\lambda}b] = \frac{2}{\pi b},$$

其中用到了 Wroński 行列式

$$W[\mathrm{J}_0,\mathrm{N}_0;x] = \frac{2}{\pi x}. \tag{7.67}$$

显然 $v(x,\lambda)$ 和 $w(x,\lambda)$ 都是整函数，且

$$g(x;\xi|\lambda) = Av(x_<,\lambda)w(x_>,\lambda).$$

$\dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$ 的间断条件是 $\dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\Big|_{\xi-}^{\xi+} = -\dfrac{1}{\xi}$，因此 $AW[v,w;\xi] = -\dfrac{1}{\xi}$. 由 (7.66) 和 (7.67) 式，有

$$W[v,w;x] = \frac{2}{\pi x}\left[\mathrm{J}_0(\sqrt{\lambda}a)\mathrm{N}_0(\sqrt{\lambda}b) - \mathrm{J}_0(\sqrt{\lambda}b)\mathrm{N}_0(\sqrt{\lambda}a)\right],$$

所以

$$g = -\frac{\pi}{2}\frac{v(x_<,\lambda)w(x_>,\lambda)}{\mathrm{J}_0(\sqrt{\lambda}a)\mathrm{N}_0(\sqrt{\lambda}b) - \mathrm{J}_0(\sqrt{\lambda}b)\mathrm{N}_0(\sqrt{\lambda}a)}. \tag{7.68}$$

问题 (7.64) 的本征值是 (7.68) 式中分母

$$D(\lambda) \triangleq \mathrm{J}_0(\sqrt{\lambda}a)\mathrm{N}_0(\sqrt{\lambda}b) - \mathrm{J}_0(\sqrt{\lambda}b)\mathrm{N}_0(\sqrt{\lambda}a)$$

的零点. 由 (7.64) 式可以证明它们都是正数. 置 $\lambda = r^2$, 则本征值 $\lambda_n = r_n^2$ 即由超越方程

$$D(r^2) = \mathrm{J}_0(ra)\mathrm{N}_0(rb) - \mathrm{J}_0(rb)\mathrm{N}_0(ra) = 0 \quad \text{或} \quad \frac{\mathrm{J}_0(ra)}{\mathrm{J}_0(rb)} = \frac{\mathrm{N}_0(ra)}{\mathrm{N}_0(rb)} \tag{7.69}$$

确定. 由方程 7.69 可以求得一系列正 (一阶) 零点 $r_1 < r_2 < \cdots$. 令

$$R_n = \frac{\mathrm{J}_0(r_n a)}{\mathrm{J}_0(r_n b)} = \frac{\mathrm{N}_0(r_n a)}{\mathrm{N}_0(r_n b)}, \tag{7.70}$$

我们则得到

$$\begin{aligned} v_n &\triangleq v(x, r_n^2) = \mathrm{J}_0(r_n a)\mathrm{N}_0(r_n x) - \mathrm{J}_0(r_n x)\mathrm{N}_0(r_n a) \\ &= R_n \mathrm{J}_0(r_n b)\mathrm{N}_0(r_n x) - B_n \mathrm{J}_0(r_n x)\mathrm{N}_0(r_n b) = R_n w(x, r_n^2) \\ &\triangleq R_n w_n(x). \end{aligned}$$

g 在 $\lambda = \lambda_n = r_n^2$ 处的留数为

$$-\frac{\pi}{2}\frac{v_n(x_<)w_n(x_>)}{D'(\lambda_n)} = -\frac{\pi}{2}\left(\frac{2r_n}{R_n}\right)\frac{v_n(x)v_n(\xi)}{[\mathrm{d}D(r^2)/\mathrm{d}r]_{r=r_n}},$$

由 (7.69) 和 (7.70) 式, 我们得到

$$\left.\frac{\mathrm{d}D(r^2)}{\mathrm{d}r}\right|_{r=r_n} = -\frac{a}{R_n}\frac{2}{\pi r_n a} + bR_n\frac{2}{\pi r_n b} = \frac{2}{\pi r_n}\left(\frac{R_n^2 - 1}{R_n}\right).$$

因此归一化的本征函数就是

$$u_n(x) = \frac{\pi r_n}{\sqrt{2(R_n^2 - 1)}}\left[\mathrm{J}_0(r_n a)\mathrm{N}_0(r_n x) - \mathrm{J}_0(r_n x)\mathrm{N}_0(r_n a)\right], \tag{7.71}$$

其中 r_n 和 R_n 分别由 (7.69) 和 (7.70) 二式决定.

第八章　偏微分方程的 Green 函数

§8.1　稳定问题的 Green 函数

例 8.1　求半圆形区域 (见图 8.1) 内 Laplace 方程的 Green 函数，设边值为 0.

解　变换到平面极坐标系，这时求解区域的边界上需挖去圆心，如图 8.2 所示. 相应地，定解问题为

$$\nabla^2 G(r,\phi;r',\phi') = -\frac{1}{r}\delta(r-r')\delta(\phi-\phi'), \tag{8.1a}$$

$$G(r,\phi;r',\phi')\big|_{r=0}\text{有界}, \tag{8.1b}$$

$$G(r,\phi;r',\phi')\big|_{r=a} = 0, \tag{8.1c}$$

$$G(r,\phi;r',\phi')\big|_{\phi=0} = 0, \tag{8.1d}$$

$$G(r,\phi;r',\phi')\big|_{\phi=\pi} = 0. \tag{8.1e}$$

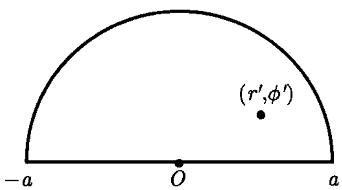


图 8.1　半圆形区域

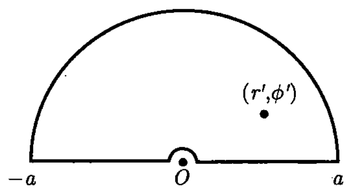


图 8.2　挖去圆心的半圆形区域

将 $G(r,\phi;r',\phi')$ 按相应齐次问题的本征函数展开，得

$$G(r,\phi;r',\phi') = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(r;r',\phi')\sin n\phi, \tag{8.2}$$

此时 $G(r,\phi;r',\phi')$ 已满足 $G(r,\phi;r',\phi')\big|_{\phi=0,\pi}=0$ 的要求. 与此同时，也将 $\delta(\phi-\phi')$ 按同一组本征函数展开:

$$\delta(\phi-\phi') = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\sin n\phi\sin n\phi'. \tag{8.3}$$

将 (8.2) 及 (8.3) 式代入方程 (8.1a)，得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}g_n}{\mathrm{d}r}\right)-\frac{n^2}{r^2}g_n\right]\sin n\phi = -\frac{2}{\pi r}\delta(r-r')\sum_{n=1}^{\infty}\sin n\phi\sin n\phi'.$$

比较系数，即得

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}g_n}{\mathrm{d}r}\right)-\frac{n^2}{r^2}g_n=-\frac{2}{\pi r}\delta(r-r')\sin n\phi'. \tag{8.4a}$$

当 $r\neq r'$ 时此方程为齐次方程，考虑到边界条件

$$g_n(r;r',\phi')\big|_{r=0}\,\text{有界},\qquad g_n(r;r',\phi')\big|_{r=a}=0 \tag{8.4b}$$

的要求，故可取解为

$$g_n(r;r',\phi')=\begin{cases}A_n\left(\dfrac{r}{a}\right)^n, & r<r',\\ B_n\left[\left(\dfrac{r}{a}\right)^n-\left(\dfrac{a}{r}\right)^n\right], & r>r'.\end{cases}$$

再由方程 (8.4a) 可以导出 $g_n(r;r',\phi')$ 在 $r=r'$ 点的连接条件

$$\begin{aligned}g_n(r;r',\phi')\Big|_{r'-0}^{r'+0}&=0,\\ \frac{\mathrm{d}g_n(r;r',\phi')}{\mathrm{d}r}\Big|_{r'-0}^{r'+0}&=-\frac{2}{\pi r'}\sin n\phi',\end{aligned}$$

从而定出

$$\begin{aligned}A_n&=-\frac{2}{n\pi}\left[\left(\frac{r'}{a}\right)^n-\left(\frac{a}{r'}\right)^n\right]\sin n\phi',\\ B_n&=-\frac{2}{n\pi}\left(\frac{r'}{a}\right)^n\sin n\phi'.\end{aligned}$$

因此求得 Green 函数

$$G(r,\phi;r',\phi')=\begin{cases}-\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[\left(\frac{rr'}{a^2}\right)^n-\left(\frac{r}{r'}\right)^n\right]\sin n\phi\sin n\phi', & r<r',\\ -\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[\left(\frac{rr'}{a^2}\right)^n-\left(\frac{r'}{r}\right)^n\right]\sin n\phi\sin n\phi', & r>r'.\end{cases} \tag{8.5}$$

最后，利用

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\rho^n\sin n\phi\sin n\phi'&=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\rho^n\left[\cos n(\phi-\phi')-\cos n(\phi+\phi')\right]\\ &=-\frac{1}{4}\Big\{\ln\left[1-2\rho\cos(\phi-\phi')+\rho^2\right]\\ &\qquad-\ln\left[1-2\rho\cos(\phi+\phi')+\rho^2\right]\Big\},\end{aligned}$$

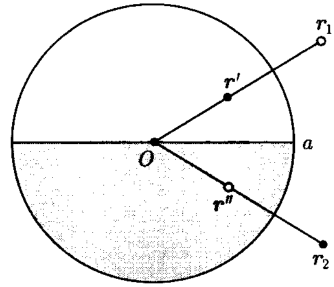


图 8.3 半圆形区域：点电荷与像电荷

可以求得 $G(r,\phi;r',\phi')$ 的有限形式：

$$\begin{aligned}G(r,\phi;r',\phi') &= \frac{1}{2\pi}\bigg\{\ln\left[\left(\frac{a^2}{r'}\right)^2-2\frac{a^2}{r'}r\cos(\phi-\phi')+r^2\right] \\ &\quad-\ln\left[\left(\frac{a^2}{r'}\right)^2-2\frac{a^2}{r'}r\cos(\phi+\phi')+r^2\right]-\ln\left[r'^2-2r'r\cos(\phi-\phi')+r^2\right] \\ &\quad+\ln\left[r'^2-2r'r\cos(\phi+\phi')+r^2\right]\bigg\} \qquad (8.6a) \\ &= \frac{1}{2\pi}\Big(\ln|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}|^2-\ln|\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}|^2-\ln|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}|^2+\ln|\boldsymbol{r}''-\boldsymbol{r}|^2\Big), \qquad (8.6b)\end{aligned}$$

其中

$$\boldsymbol{r}=(r,\phi), \quad \boldsymbol{r}'=(r',\phi'), \quad \boldsymbol{r}''=(r',-\phi'), \quad \boldsymbol{r}_1=\left(\frac{a^2}{r'},\phi'\right), \quad \boldsymbol{r}_2=\left(\frac{a^2}{r'},-\phi'\right).$$

用静电学的语言来说，$G(r,\phi;r',\phi')$ 等价于 $\boldsymbol{r}'$ 处的点电荷 (电荷量为 $+1$) 与 $\boldsymbol{r}''$，$\boldsymbol{r}_1$，$\boldsymbol{r}_2$ 三处的像电荷 (电荷量分别为 $-1,+1,-1$，见图 8.3) 所联合产生的电势.

例 8.2 设将圆形区域沿某一半径割开，从而得到得到玦形区域 (见图 8.4). 试求此区域内 Laplace 方程的 Green 函数 $G(r,\phi;r',\phi')$.

解 此定解问题为

$$\nabla^2 G(r,\phi;r',\phi') = -\frac{1}{r}\delta(r-r')\delta(\phi-\phi'), \qquad (8.7a)$$

$$G(r,\phi;r',\phi')\big|_{r=0}\text{有界}, \qquad (8.7b)$$

$$G(r,\phi;r',\phi')\big|_{r=a}=0, \qquad (8.7c)$$

$$G(r,\phi;r',\phi')\big|_{\phi=0}=0, \qquad (8.7d)$$

$$G(r,\phi;r',\phi')\big|_{\phi=2\pi}=0, \qquad (8.7e)$$

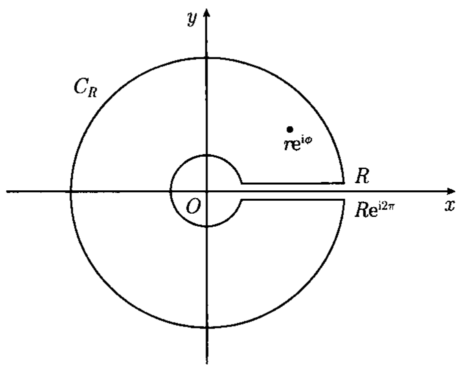


图 8.4　块形区域内的点源

其解可根据例 8.1 经过简单的变换而得到.

采用复变函数的记号. 令 $z = x + \mathrm{i}y$，作变换 $\zeta = \sqrt{z}$，$\zeta = \xi + \mathrm{i}\eta = \rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}$，则 z 平面上的块形区域即变为 ζ 平面上类似于图 8.2 的半圆形区域，只是半圆的半径变为 $\sqrt{a}$. 在此变换下 Green 函数 $G(r,\phi;r',\phi')$ 变为 $G(\rho^2, 2\psi; \rho'^2, 2\psi') \equiv g(\rho,\psi;\rho',\psi')$，点电荷所在的位置变为 $(\rho',\psi')=(\sqrt{r},\phi/2)$，而总电荷量不变. 于是，定解问题即为

$$\nabla^2_{\rho,\psi} g(\rho,\psi;\rho',\psi') = -\frac{1}{\rho}\delta(\rho-\rho')\delta(\psi-\psi'), \tag{8.8a}$$

$$g(\rho,\psi;\rho',\psi')\big|_{\rho=0} \text{有界}, \qquad g(\rho,\psi;\rho',\psi')\big|_{\rho=\sqrt{a}} = 0, \tag{8.8b}$$

$$g(\rho,\psi;\rho',\psi')\big|_{\psi=0} = 0, \qquad g(\rho,\psi;\rho',\psi')\big|_{\psi=\pi} = 0. \tag{8.8c}$$

根据 (8.5) 式，有

$$g(\rho,\psi;\rho',\psi') = \begin{cases} -\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[\left(\frac{\rho\rho'}{a}\right)^n - \left(\frac{\rho}{\rho'}\right)^n\right]\sin n\psi \sin n\psi', & \rho<\rho', \\ -\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[\left(\frac{\rho\rho'}{a}\right)^n - \left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^n\right]\sin n\psi \sin n\psi', & \rho'<\rho<\sqrt{a}. \end{cases} \tag{8.9}$$

因此

$$G(r,\phi;r',\phi') = \begin{cases} -\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[\left(\frac{rr'}{a^2}\right)^{n/2} - \left(\frac{r}{r'}\right)^{n/2}\right]\sin\frac{n\phi}{2}\sin\frac{n\phi'}{2}, & r<r', \\ -\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[\left(\frac{rr'}{a^2}\right)^{n/2} - \left(\frac{r'}{r}\right)^{n/2}\right]\sin\frac{n\phi}{2}\sin\frac{n\phi'}{2}, & r'<r<a. \end{cases} \tag{8.10}$$

应用例 8.1 中同样的求和公式，也能求出上面和式的和函数，从而将 Green 函数 $G(r,\phi;r',\phi')$ 写成有限的形式：

$$G(r,\phi;r',\phi')=\frac{1}{2\pi}\left[\ln\left(\frac{a^2}{r'}-2a\sqrt{\frac{r}{r'}}\cos\frac{\phi-\phi'}{2}+r\right)-\ln\left(\frac{a^2}{r'}-2a\sqrt{\frac{r}{r'}}\cos\frac{\phi+\phi'}{2}+r\right)\right.$$
$$\left.-\ln\left(r'-2\sqrt{r'r}\cos\frac{\phi-\phi'}{2}+r\right)+\ln\left(r'-2\sqrt{r'r}\cos\frac{\phi+\phi'}{2}+r\right)\right]. \tag{8.11}$$

例 8.3 设有半无界带形区域如图 8.5 所示，试求此区域内 Laplace 方程的 Green 函数 $G(x,y;x',y')$，其定解问题为

$$\nabla^2G(x,y;x',y')=-\delta(x-x')\delta(y-y'), \tag{8.12a}$$

$$G(x,y;x',y')\big|_{x\to-\infty}\to 0, \tag{8.12b}$$

$$G(x,y;x',y')\big|_{x=a}=0, \tag{8.12c}$$

$$G(x,y;x',y')\big|_{y=0}=0, \tag{8.12d}$$

$$G(x,y;x',y')\big|_{y=b}=0, \tag{8.12e}$$

其中单位点电荷位于 (x',y') 处.

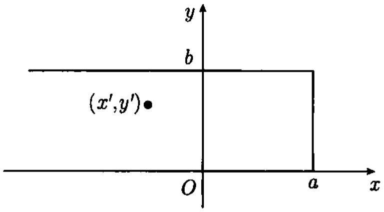


图 8.5　半无界带形区域

解 采用按相应齐次问题本征函数展开的方法解此非齐次方程的定解问题. 设

$$G(x,y;x',y')=\sum_{n=1}^{\infty}g_n(x;x',y')\sin\frac{n\pi}{b}y, \tag{8.13}$$

同时，

$$\delta(y-y')=\frac{2}{b}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{b}y\sin\frac{n\pi}{b}y', \tag{8.14}$$

代入方程 (8.12a) 及边界条件 (8.12b) 和 (8.12c)，从而导出展开系数 $g_n(x;x',y')$ 所满足的常微分方程边值问题

$$\frac{\mathrm{d}^2 g_n(x;x',y')}{\mathrm{d}x^2}-\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 g_n(x;x',y')=-\frac{2}{b}\sin\frac{n\pi}{b}y'\,\delta(x-x'), \tag{8.15a}$$

$$g_n(x;x',y')\big|_{x\to-\infty}\to 0,\qquad g_n(x;x',y')\big|_{x=a}=0. \tag{8.15b}$$

于是

$$g_n(x;x',y')=\begin{cases}A_n\,\mathrm{e}^{n\pi(x-a)/b}\sinh\dfrac{n\pi}{b}(x'-a), & x<x',\\[2mm] A_n\,\mathrm{e}^{n\pi(x'-a)/b}\sinh\dfrac{n\pi}{b}(x-a), & x>x'.\end{cases}$$

写出此式时已考虑到 $g_n(x;x',y')$ 应当在 $x=x'$ 点连续. 再由 $\mathrm{d}g_n(x;x',y')/\mathrm{d}x$ 在 $x=x'$ 点不连续:

$$\left.\frac{\mathrm{d}g_n(x;x',y')}{\mathrm{d}x}\right|_{x'-}^{x'+}=-\frac{2}{b}\sin\frac{n\pi}{b}y',$$

即可定出系数 A_n:

$$A_n=-\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{b}y'.$$

最后就得到 Green 函数

$$G(x,y;x',y')=\begin{cases}-\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\,\mathrm{e}^{n\pi(x-a)/b}\sinh\frac{n\pi}{b}(x'-a)\sin\frac{n\pi}{b}y\sin\frac{n\pi}{b}y', & x<x',\\[2mm] -\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\,\mathrm{e}^{n\pi(x'-a)/b}\sinh\frac{n\pi}{b}(x-a)\sin\frac{n\pi}{b}y\sin\frac{n\pi}{b}y', & x>x'.\end{cases} \tag{8.16}$$

利用

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\mathrm{e}^{-nx}\cos nt=-\frac{1}{2}\ln(1-2\mathrm{e}^{-x}\cos t+\mathrm{e}^{-2x}),\qquad x>0$$

还可以将上述级数解求和. 当 $x<x'$ 时,

$$\begin{aligned}G(x,y;x',y')&=-\frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\Big\{\left[\mathrm{e}^{n\pi(x+x'-2a)/b}-\mathrm{e}^{n\pi(x-x')/b}\right]\\&\qquad\times\left[\cos\frac{n\pi(y-y')}{b}-\cos\frac{n\pi(y+y')}{b}\right]\Big\}\\&=\frac{1}{2\pi}\Big\{\ln\left[1-2\,\mathrm{e}^{\pi(x+x'-2a)/b}\cos\frac{\pi(y-y')}{b}+\mathrm{e}^{2\pi(x+x'-2a)/b}\right]\\&\qquad-\ln\left[1-2\,\mathrm{e}^{\pi(x+x'-2a)/b}\cos\frac{\pi(y+y')}{b}+\mathrm{e}^{2\pi(x+x'-2a)/b}\right]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\ln\left[1-2\,\mathrm{e}^{\pi(x-x')/b}\cos\frac{\pi(y-y')}{b}+\mathrm{e}^{2\pi(x-x')/b}\right]\\
&+\ln\left[1-2\,\mathrm{e}^{\pi(x-x')/b}\cos\frac{\pi(y+y')}{b}+\mathrm{e}^{2\pi(x-x')/b}\right]\Bigg\}\\
=\frac{1}{2\pi}\Bigg\{&\ln\left[\mathrm{e}^{2\pi x/b}-2\,\mathrm{e}^{\pi(2a-x'+x)/b}\cos\frac{\pi(y-y')}{b}+\mathrm{e}^{2\pi(2a-x')/b}\right]\\
&-\ln\left[\mathrm{e}^{2\pi x/b}-2\,\mathrm{e}^{\pi(2a-x'+x)/b}\cos\frac{\pi(y+y')}{b}+\mathrm{e}^{2\pi(2a-x')/b}\right]\\
&-\ln\left[\mathrm{e}^{2\pi x/b}-2\,\mathrm{e}^{\pi(x+x')/b}\cos\frac{\pi(y-y')}{b}+\mathrm{e}^{2\pi x'/b}\right]\\
&+\ln\left[\mathrm{e}^{2\pi x/b}-2\,\mathrm{e}^{\pi(x+x')/b}\cos\frac{\pi(y+y')}{b}+\mathrm{e}^{2\pi x'/b}\right]\Bigg\},
\end{aligned}
\tag{8.17}
$$

而且当 $x>x'$ 时也有同样的表达式.

对于本例题的 Green 函数问题，还可以采用电像法求解. 这时有无穷多个像电荷 (见图 8.6)：在 $(x',2nb+y')$ 与 $(-x',2nb-y')$ 点有电荷 $+1$ (用圆点表示)，在 $(x',2nb+y')$ 与 $(-x',2nb-y')$ 点有电荷 -1 (用圆圈表示). 因此 Green 函数为

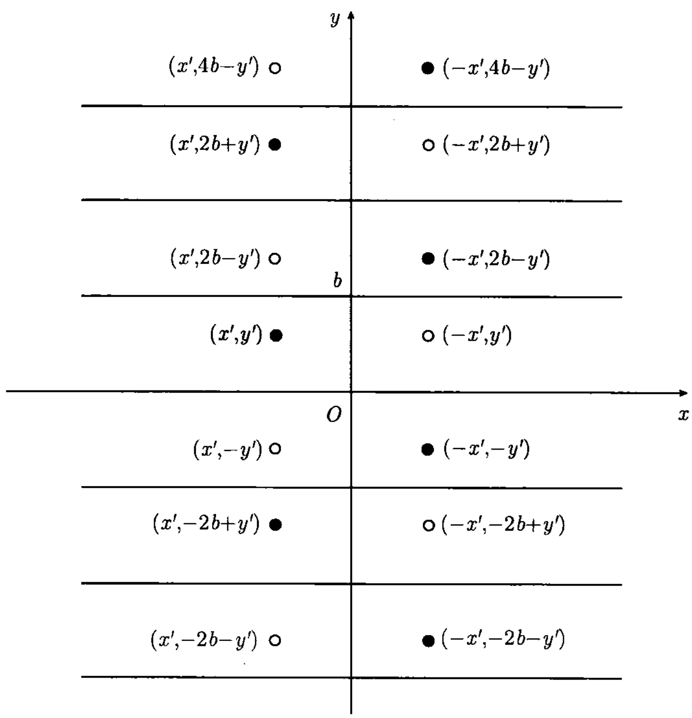


图 8.6 带形区域内的 Green 函数：电像法

$$G(x,y;x',y') = \frac{1}{2\pi}\left\{ \ln\frac{(x-x')^2+(y+y')^2}{(x-x')^2+(y-y')^2} + \ln\frac{(x+x')^2+(y-y')^2}{(x+x')^2+(y+y')^2} \right.$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\ln\frac{(x-x')^2+(y+y'-2nb)^2}{(x-x')^2+(y-y'-2nb)^2} + \ln\frac{(x-x')^2+(y+y'+2nb)^2}{(x-x')^2+(y-y'+2nb)^2}\right.$$
$$\left.\left. +\ln\frac{(x+x')^2+(y-y'-2nb)^2}{(x+x')^2+(y+y'-2nb)^2} + \ln\frac{(x+x')^2+(y-y'+2nb)^2}{(x+x')^2+(y+y'+2nb)^2}\right]\right\}. \tag{8.18}$$

为了简便起见，这里已经取 $a=0$. 它当然应当与 $a=0$ 时的 (8.17) 式 完全一致，即应有

$$G(x,y;x',y') = \frac{1}{2\pi}\left\{ \ln\left[1-2\,\mathrm{e}^{\pi(x+x')/b}\cos\frac{\pi(y-y')}{b} + \mathrm{e}^{2\pi(x+x')/b}\right]\right.$$
$$-\ln\left[1-2\,\mathrm{e}^{\pi(x+x')/b}\cos\frac{\pi(y+y')}{b} + \mathrm{e}^{2\pi(x+x')/b}\right]$$
$$-\ln\left[1-2\,\mathrm{e}^{\pi(x-x')/b}\cos\frac{\pi(y-y')}{b} + \mathrm{e}^{2\pi(x-x')/b}\right]$$
$$\left.+\ln\left[1-2\,\mathrm{e}^{\pi(x-x')/b}\cos\frac{\pi(y+y')}{b} + \mathrm{e}^{2\pi(x-x')/b}\right]\right\}. \tag{8.17'}$$

为了证明这一点，需要用到 $\sin z$ 的无穷乘积展开

$$\frac{\sin z}{z} = \prod_{n=1}^{\infty}\left[1-\left(\frac{z}{n\pi}\right)^2\right]. \tag{8.19}$$

在此基础上能够导出

$$1-\mathrm{e}^{z+\mathrm{i}\alpha} = -(z+\mathrm{i}\alpha)\,\mathrm{e}^{(z+\mathrm{i}\alpha)/2}\prod_{n=1}^{\infty}\left[1+\left(\frac{z+\mathrm{i}\alpha}{2n\pi}\right)^2\right]$$
$$= -(z+\mathrm{i}\alpha)\,\mathrm{e}^{(z+\mathrm{i}\alpha)/2}\prod_{n=1}^{\infty}\left[\frac{z+\mathrm{i}(\alpha+2n\pi)}{2n\pi}\,\frac{z+\mathrm{i}(\alpha-2n\pi)}{2n\pi}\right], \tag{8.20a}$$

因此

$$1-2\mathrm{e}^z\cos\alpha+\mathrm{e}^{2z} \equiv \left(1-\mathrm{e}^{z+\mathrm{i}\alpha}\right)\left(1-\mathrm{e}^{z+\mathrm{i}\alpha}\right)$$
$$= (z^2+\alpha^2)\,\mathrm{e}^z\prod_{n=1}^{\infty}\frac{z^2+(\alpha+2n\pi)^2}{(2n\pi)^2}\,\frac{z^2+(\alpha-2n\pi)^2}{(2n\pi)^2}, \tag{8.20b}$$

$$\ln\left(1-2\mathrm{e}^z\cos\alpha+\mathrm{e}^{2z}\right) = \ln(z^2+\alpha^2)+z$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\ln\frac{z^2+(\alpha+2n\pi)^2}{(2n\pi)^2} + \ln\frac{z^2+(\alpha-2n\pi)^2}{(2n\pi)^2}\right]. \tag{8.20c}$$

于是就能将 (8.17′) 式改写为

$$G(x,y;x',y')=\frac{1}{2\pi}\left\{\ln\left[\frac{(x+x')^2+(y-y')^2}{(x+x')^2+(y+y')^2}\,\frac{(x-x')^2+(y+y')^2}{(x-x')^2+(y-y')^2}\right]\right.$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left[\frac{(x+x')^2+(y-y'+2n\pi)^2}{(x+x')^2+(y+y'+2n\pi)^2}\,\frac{(x+x')^2+(y-y'-2n\pi)^2}{(x+x')^2+(y+y'-2n\pi)^2}\right]$$
$$\left.+\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left[\frac{(x-x')^2+(y+y'+2n\pi)^2}{(x-x')^2+(y-y'+2n\pi)^2}\,\frac{(x-x')^2+(y+y'-2n\pi)^2}{(x-x')^2+(y-y'-2n\pi)^2}\right]\right\}.$$

我们看到，它正是 (8.18) 式.

电像法的结果 (8.18) 有助于我们理解带形区域内 Laplace 方程 Green 函数的物理内涵，有助于了解相应 Green 函数的图像，例如像电荷的分布状况.

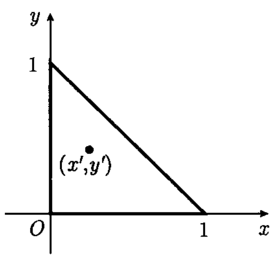


图 8.7　等腰直角三角形区域

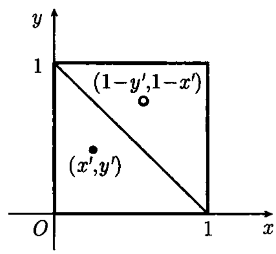


图 8.8　延拓后的正方形区域

例 8.4　设有等腰直角三角形区域，如图 8.7 所示. 试求该区域内 Laplace 方程的 Green 函数 $G(x,y;x',y')$，其定解问题为

$$\nabla^2 G(x,y;x',y')=-\delta(x-x')\delta(y-y'),\tag{8.21a}$$

$$G(x,y;x',y')\big|_{x=0}=0,\tag{8.21b}$$

$$G(x,y;x',y')\big|_{y=0}=0,\tag{8.21c}$$

$$G(x,y;x',y')\big|_{x+y=1}=0.\tag{8.21d}$$

解　这样的等腰直角三角形区域无法直接应用分离变量法求解，需要延拓为正方形区域，如图 8.8 所示. 为保证 G 在对角线 $x+y=1$ 上的数值为 0，像电荷 (电荷量为 -1) 需放置在 $(1-y',1-x')$ 处，它与原来的电荷对称地处于对角线的两侧. 因此，定解问题变为

$$\nabla^2 G(x,y;x',y') = -\delta(x-x')\delta(y-y') + \delta(x-1+y')\delta(y-1+x'), \tag{8.22a}$$

$$G(x,y;x',y')\big|_{x=0} = 0, \qquad G(x,y;x',y')\big|_{x=1} = 0, \tag{8.22b}$$

$$G(x,y;x',y')\big|_{y=0} = 0, \qquad G(x,y;x',y')\big|_{y=1} = 0. \tag{8.22c}$$

此处 Green 函数，仍沿用原来的记号 $G(x,y;x',y')$. 显然只是在原来的等腰直角三角形区域内，它才与原问题等价.

为了在正方形区域内求解 Green 函数，又需要进一步作分解 $G = G_1 + G_2$. 其中 G_1 与 G_2 分别是

$$\nabla^2 G_1(x,y;x',y') = -\delta(x-x')\delta(y-y'), \tag{8.23a}$$

$$G_1(x,y;x',y')\big|_{x=0} = 0, \quad G_1(x,y;x',y')\big|_{x=1} = 0, \tag{8.23b}$$

$$G_1(x,y;x',y')\big|_{y=0} = 0, \quad G_1(x,y;x',y')\big|_{y=1} = 0 \tag{8.23c}$$

与

$$\nabla^2 G_2(x,y;x',y') = \delta(x-1+y')\delta(y-1+x'), \tag{8.24a}$$

$$G_2(x,y;x',y')\big|_{x=0} = 0, \quad G_2(x,y;x',y')\big|_{x=1} = 0, \tag{8.24b}$$

$$G_2(x,y;x',y')\big|_{y=0} = 0, \quad G_2(x,y;x',y')\big|_{y=1} = 0 \tag{8.24c}$$

的解.

对于 G_1，可按本征函数 $\{\sin n\pi x,\ n=1,2,3,\cdots\}$ 展开，即

$$G_1(x,y;x',y') = \sum_{n=1}^{\infty} g_{n1}(y;x',y')\sin n\pi x.$$

代入方程 (8.23a)，并利用本征函数的正交性，即可导出展开系数 g_{n1} 所满足的微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 g_{n1}}{\mathrm{d}y^2} - (n\pi)^2 g_{n1} = -2\sin n\pi x'\delta(y-y'),$$

同时，它还需要满足边界条件

$$g_{n1}\big|_{y=0} = 0, \qquad g_{n1}\big|_{y=1} = 0.$$

解之即得

$$g_{n1} = \begin{cases} \dfrac{2}{n\pi}\dfrac{\sin n\pi x'}{\sinh n\pi}\sinh n\pi(1-y')\sinh n\pi y, & 0<y<y', \\ \dfrac{2}{n\pi}\dfrac{\sin n\pi x'}{\sinh n\pi}\sinh n\pi y'\sinh n\pi(1-y), & y'<y<1. \end{cases}$$

因此

$$G_1=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{\sin n\pi x'}{\sinh n\pi}\sinh n\pi(1-y')\sinh n\pi y\sin n\pi x, & 0<y<y',\\[2ex] \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{\sin n\pi x'}{\sinh n\pi}\sinh n\pi y'\sinh n\pi(1-y)\sin n\pi x, & y'<y<1.\end{cases}$$

类似地，亦可求得

$$G_2=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\frac{\sin n\pi x'}{\sinh n\pi}\sinh n\pi y'\sinh n\pi x\sin n\pi y, & 0<x<1-y',\\[2ex] \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\frac{\sin n\pi x'}{\sinh n\pi}\sinh n\pi(1-y')\sinh n\pi(1-x)\sin n\pi y, & 1-y'<x<1.\end{cases}$$

请读者补足以下两项计算:

(1) 写出所求的 (在等腰直角三角形区域内的) Green 函数 $G(x,y;x',y')$;

(2) 验证: 在对角线 $x+y=1$ 上，$G_1+G_2=0$.

例 8.5 求无穷长圆柱内 Laplace 方程的 Green 函数，其定解问题为

$$\nabla^2 G(r,\phi,z;r',\phi',z')=-\frac{1}{r}\delta(r-r')\delta(\phi-\phi')\delta(z-z'), \tag{8.25a}$$

$$G(r,\phi,z;r',\phi',z')\big|_{r=0}\text{有界}, \tag{8.25b}$$

$$G(r,\phi,z;r',\phi',z')\big|_{r=a}=0, \tag{8.25c}$$

$$G(r,\phi,z;r',\phi',z')\big|_{\phi=0}=G(r,\phi,z;r',\phi',z')\big|_{\phi=2\pi}, \tag{8.25d}$$

$$\frac{\partial G(r,\phi,z;r',\phi',z')}{\partial\phi}\bigg|_{\phi=0}=\frac{\partial G(r,\phi,z;r',\phi',z')}{\partial\phi}\bigg|_{\phi=2\pi}, \tag{8.25e}$$

$$G(r,\phi,z;r',\phi',z')\big|_{z\to\pm\infty}\to 0. \tag{8.25f}$$

解 因为相应齐次问题的本征函数为

$$\begin{aligned}&\cos m\phi, && m=0,1,2,\cdots,\\ &\sin m\phi, && m=1,2,3,\cdots,\\ &\mathrm{J}_m\Big(\frac{\mu_{mi}}{a}r\Big), && i=1,2,3,\cdots,\end{aligned}$$

其中 μ_{mi} 是 $\mathrm{J}_m(x)$ 的第 i 个正零点，$0<\mu_{m1}<\mu_{m2}<\mu_{m3}<\cdots$，故可将 Green

函数 $G(r,\phi,z;r',\phi',z')$ 及 δ 函数依这些本征函数展开[①]:

$$G(r,\phi,z;r',\phi',z') = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} g_{mi1}(z;r',\phi',z')\mathrm{J}_m\left(\frac{\mu_{mi}}{a}r\right)\cos m\phi + \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} g_{mi2}(z;r',\phi',z')\mathrm{J}_m\left(\frac{\mu_{mi}}{a}r\right)\sin m\phi, \tag{8.26a}$$

$$\frac{1}{r}\delta(r-r') = \frac{2}{a^2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{[\mathrm{J}'_m(\mu_{mi})]^2}\mathrm{J}_m\left(\frac{\mu_{mi}}{a}r\right)\mathrm{J}_m\left(\frac{\mu_{mi}}{a}r'\right), \tag{8.26b}$$

$$\delta(\phi-\phi') = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\cos m(\phi-\phi'). \tag{8.26c}$$

注意 $G(r,\phi,z;r',\phi',z')$ 的展开形式已经满足边界条件 (8.25b) — (8.25e),所以下面就要通过方程 (8.25a) 及无穷远条件 (8.25f) 定出展开系数 (函数) g_{mi1} 与 g_{mi2}.

将 (8.26a) — (8.26c) 式代入方程 (8.25a),有

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\left[\frac{\mathrm{d}^2 g_{mi1}}{\mathrm{d}z^2} - \left(\frac{\mu_{mi}}{a}\right)^2 g_{mi1}\right]\mathrm{J}_m\left(\frac{\mu_{mi}}{a}r\right)\cos m\phi \\
&\qquad + \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{\mathrm{d}^2 g_{mi2}}{\mathrm{d}z^2} - \left(\frac{\mu_{mi}}{a}\right)^2 g_{mi2}\right]\mathrm{J}_m\left(\frac{\mu_{mi}}{a}r\right)\sin m\phi \\
&\quad = -\frac{1}{\pi a^2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{[\mathrm{J}'_0(\mu_{0i})]^2}\mathrm{J}_0\left(\frac{\mu_{0i}}{a}r'\right)\mathrm{J}_0\left(\frac{\mu_{0i}}{a}r\right)\delta(z-z') \\
&\qquad - \frac{2}{\pi a^2}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{[\mathrm{J}'_m(\mu_{mi})]^2}\mathrm{J}_m\left(\frac{\mu_{mi}}{a}r'\right)\mathrm{J}_m\left(\frac{\mu_{mi}}{a}r\right)\cos m\phi\cos m\phi'\delta(z-z') \\
&\qquad - \frac{2}{\pi a^2}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{[\mathrm{J}'_m(\mu_{mi})]^2}\mathrm{J}_m\left(\frac{\mu_{mi}}{a}r'\right)\mathrm{J}_m\left(\frac{\mu_{mi}}{a}r\right)\sin m\phi\sin m\phi'\delta(z-z'),
\end{aligned}$$

比较系数,就可以得到 g_{mi1} 与 g_{mi2} 满足的常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 g_{0i1}}{\mathrm{d}z^2} - \left(\frac{\mu_{mi}}{a}\right)^2 g_{0i1} = -\frac{1}{\pi a^2}\frac{1}{[\mathrm{J}'_0(\mu_{0i})]^2}\mathrm{J}_0\left(\frac{\mu_{0i}}{a}r'\right)\delta(z-z'), \tag{8.27a}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 g_{mi1}}{\mathrm{d}z^2} - \left(\frac{\mu_{mi}}{a}\right)^2 g_{mi1} = -\frac{2}{\pi a^2}\frac{1}{[\mathrm{J}'_m(\mu_{mi})]^2}\mathrm{J}_m\left(\frac{\mu_{mi}}{a}r'\right)\cos m\phi'\delta(z-z'), \tag{8.27b}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 g_{mi2}}{\mathrm{d}z^2} - \left(\frac{\mu_{mi}}{a}\right)^2 g_{mi2} = -\frac{2}{\pi a^2}\frac{1}{[\mathrm{J}'_m(\mu_{mi})]^2}\mathrm{J}_m\left(\frac{\mu_{mi}}{a}r'\right)\sin m\phi'\delta(z-z'); \tag{8.28a}$$

---

① 更简单的办法是取 Green 函数 $G(r,\phi,z;r',\phi',z')$ 为

$$G(r,\phi,z;r',\phi',z') = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} g_{mi}(z;r',\phi',z')\mathrm{J}_m\left(\frac{\mu_{mi}}{a}r\right)\cos m(\phi-\phi'),$$

这时在形式上只有一组展开系数 (函数).

同样，由无穷远条件 (8.25f) 也能导出

$$\lim_{z\to\pm\infty} g_{mi1}=0, \tag{8.27c}$$

$$\lim_{z\to\pm\infty} g_{mi2}=0. \tag{8.28b}$$

采用与例 8.1 中解 $g_n(r;r',\phi')$ 相同的办法，由 (8.27a) 与 (8.27c) 可以求得

$$g_{0i1}(z;r',\phi',z')=\frac{1}{\pi a}\frac{1}{\mu_{0i}}\frac{1}{[\mathrm{J}_0'(\mu_{0i})]^2}\mathrm{J}_0\left(\frac{\mu_{0i}}{a}r'\right)\mathrm{e}^{-\mu_{0i}|z-z'|/a}. \tag{8.29a}$$

同样，由 (8.27b) 与 (8.27c) 式，亦可得到

$$g_{mi1}(z;r',\phi',z')=\frac{2}{\pi a}\frac{1}{\mu_{mi}}\frac{1}{[\mathrm{J}_m'(\mu_{mi})]^2}\mathrm{J}_m\left(\frac{\mu_{mi}}{a}r'\right)\cos m\phi'\mathrm{e}^{-\mu_{mi}|z-z'|/a}. \tag{8.29b}$$

由 (8.28a) 与 (8.28b) 式，也能解得

$$g_{mi2}(z;r',\phi',z')=\frac{2}{\pi a}\frac{1}{\mu_{mi}}\frac{1}{[\mathrm{J}_m'(\mu_{mi})]^2}\mathrm{J}_m\left(\frac{\mu_{mi}}{a}r'\right)\sin m\phi'\mathrm{e}^{-\mu_{mi}|z-z'|/a}. \tag{8.29c}$$

将这些结果代回到 (8.26a) 式中，就得到 $G(r,\phi,z;r',\phi',z')$ 的最终表达式：

$$\begin{aligned}
&G(r,\phi,z;r',\phi',z')\\
&=\frac{2}{\pi a}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{1+\delta_{m0}}\frac{1}{\mu_{mi}}\frac{1}{[\mathrm{J}_m'(\mu_{mi})]^2}\\
&\quad\times\left[\mathrm{J}_m\left(\frac{\mu_{mi}}{a}r'\right)\mathrm{J}_m\left(\frac{\mu_{mi}}{a}r\right)\cos m(\phi-\phi')\,\mathrm{e}^{-\mu_{mi}|z-z'|/a}\right] &(8.30\text{a})\\
&=\frac{2}{\pi a}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{1+\delta_{m0}}\frac{1}{\mu_{mi}}\frac{1}{\mathrm{J}_{m+1}^2(\mu_{mi})}\\
&\quad\times\left[\mathrm{J}_m\left(\frac{\mu_{mi}}{a}r'\right)\mathrm{J}_m\left(\frac{\mu_{mi}}{a}r\right)\cos m(\phi-\phi')\,\mathrm{e}^{-\mu_{mi}|z-z'|/a}\right]. &(8.30\text{b})
\end{aligned}$$

最后一步用到了 Bessel 函数的递推关系

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^{-\nu}\mathrm{J}_\nu(z)\right]=-z^{-\nu}\mathrm{J}_{\nu+1}(z)$$

及 $\mathrm{J}_m(\mu_{mi})=0$.

对于有限高度的圆柱体，假设 Green 函数满足

$$\nabla^2G(r,\phi,z;r',\phi',z')=-\frac{1}{r}\delta(r-r')\delta(\phi-\phi')\delta(z-z'), \tag{8.31a}$$

$$G(r,\phi,z;r',\phi',z')\big|_{r=0}\text{有界}, \tag{8.31b}$$

$$G(r,\phi,z;r',\phi',z')\big|_{r=a}=0, \tag{8.31c}$$

$$G(r,\phi,z;r',\phi',z')\big|_{\phi=0}=G(r,\phi,z;r',\phi',z')\big|_{\phi=2\pi}, \tag{8.31d}$$

$$\frac{\partial G(r,\phi,z;r',\phi',z')}{\partial\phi}\bigg|_{\phi=0}=\frac{\partial G(r,\phi,z;r',\phi',z')}{\partial\phi}\bigg|_{\phi=2\pi}, \tag{8.31e}$$

$$G(r,\phi,z;r',\phi',z')\big|_{z=0,b}=0, \tag{8.31f}$$

也可仿照上述步骤求得

$$\begin{aligned}&G(r,\phi,z;r',\phi',z')\\&=\frac{2}{\pi a}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{1+\delta_{m0}}\frac{1}{\mu_{mi}}\frac{1}{\mathrm{J}_{m+1}^2(\mu_{mi})}\mathrm{J}_m\left(\frac{\mu_{mi}}{a}r'\right)\mathrm{J}_m\left(\frac{\mu_{mi}}{a}r\right)\cos m(\phi-\phi')\\&\quad\times\begin{cases}\dfrac{\sinh[\mu_{mi}(b-z')/a]}{\sinh(\mu_{mi}b/a)}\sinh\dfrac{\mu_{mi}}{a}z, & 0<z<z',\\[2ex]\dfrac{\sinh(\mu_{mi}z'/a)}{\sinh(\mu_{mi}b/a)}\sinh\dfrac{\mu_{mi}}{a}(z-z'), & 0<z<z'.\end{cases}\end{aligned} \tag{8.32}$$

圆柱面或上、下底上也可加上第二类齐次边界条件，例如将 (8.31f) 式替换为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}G(r,\phi,z;r',\phi',z')\bigg|_{z=0,b}=0, \tag{8.31f$'$}$$

则 Green 函数变为

$$\begin{aligned}&G(r,\phi,z;r',\phi',z')\\&=\frac{2}{\pi a}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{1+\delta_{m0}}\frac{1}{\mu_{mi}}\frac{1}{\mathrm{J}_{m+1}^2(\mu_{mi})}\mathrm{J}_m\left(\frac{\mu_{mi}}{a}r'\right)\mathrm{J}_m\left(\frac{\mu_{mi}}{a}r\right)\cos m(\phi-\phi')\\&\quad\times\begin{cases}\dfrac{\cosh[\mu_{mi}(b-z')/a]}{\sinh(\mu_{mi}b/a)}\cosh\dfrac{\mu_{mi}}{a}z, & 0<z<z',\\[2ex]\dfrac{\cosh(\mu_{mi}z'/a)}{\sinh(\mu_{mi}b/a)}\cosh\dfrac{\mu_{mi}}{a}(z-z'), & 0<z<z'.\end{cases}\end{aligned} \tag{8.33}$$

§8.2 热传导问题的 Green 函数

例 8.6 求解定解问题

$$\frac{\partial^2\mathscr{G}}{\partial x^2}-\frac{1}{\kappa}\frac{\partial\mathscr{G}}{\partial t}-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\mathscr{G}}{\partial t^2}=-\delta(x-x')\delta(t-t'),\quad t,t'>0,\ -\infty<x,x'<\infty, \tag{8.34a}$$

$$\mathscr{G}\big|_{x\to\pm\infty}\to 0,\qquad t,t'>0, \tag{8.34b}$$

$$\mathscr{G}\big|_{t=0}=0,\quad \frac{\partial\mathscr{G}}{\partial t}\bigg|_{t=0}=0,\qquad -\infty<x,x'<\infty. \tag{8.34c}$$

解　先作变换

$$\mathscr{G}(x,t;x',t')=\mathrm{e}^{\lambda(t-t')}g(x,t;x',t')$$

以化去一阶偏导数项. 因为

$$\frac{\partial\mathscr{G}}{\partial t}=\lambda\mathrm{e}^{\lambda(t-t')}g+\mathrm{e}^{\lambda(t-t')}\frac{\partial g}{\partial t},$$
$$\frac{\partial^2\mathscr{G}}{\partial t^2}=\lambda^2\mathrm{e}^{\lambda(t-t')}g+2\lambda\mathrm{e}^{\lambda(t-t')}\frac{\partial g}{\partial t}+\mathrm{e}^{\lambda(t-t')}\frac{\partial^2 g}{\partial t^2},$$

代入方程 (8.34a)，就有

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}-\left(\frac{1}{\kappa}+\frac{2\lambda}{a^2}\right)\frac{\partial g}{\partial t}-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}-\left(\frac{\lambda}{\kappa}+\frac{\lambda^2}{a^2}\right)g=-\delta(x-x')\delta(t-t').$$

因此取 $\lambda=-a^2/2\kappa$，即

$$\mathscr{G}(x,t;x',t')=\mathrm{e}^{-a^2(t-t')/2\kappa}g(x,t;x',t'),$$

则定解问题化为

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}+\frac{a^2}{4\kappa^2}g=-\delta(x-x')\delta(t-t'),\quad t,t'>0,-\infty<x,x'<\infty,\tag{8.35a}$$
$$g\big|_{x\to\pm\infty}\to 0,\qquad t,t'>0,\tag{8.35b}$$
$$g\big|_{t=0}=0,\quad \left.\frac{\partial g}{\partial t}\right|_{t=0}=0,\qquad -\infty<x,x'<\infty.\tag{8.35c}$$

解法一　作 Laplace 变换. 设

$$g(x,t;x',t')\risingdotseq G(x,p;x',t')=\int_0^\infty g(x,t;x',t')\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t,$$

则定解问题化为

$$\frac{\mathrm{d}^2 G}{\mathrm{d}x^2}-\frac{p^2}{a^2}G+\frac{a^2}{4\kappa^2}G=-\mathrm{e}^{-pt'}\delta(x-x'),\tag{8.36a}$$
$$G\big|_{x\to\infty}\to 0.\tag{8.36b}$$

当 $x\neq x'$ 时，微分方程齐次，故有满足边界条件且在 $x=x'$ 点连续的解

$$G=A\exp\left\{-\sqrt{\frac{p^2}{a^2}-\frac{a^2}{4\kappa^2}}\,|x-x'|\right\},\tag{8.37}$$

其中 $\mathrm{Re}\,p>a^2/2\kappa$，并且规定

$$\sqrt{\frac{p^2}{a^2}-\frac{a^2}{4\kappa^2}}=\frac{p}{a}\sqrt{1-\frac{a^2}{4\kappa^2p^2}}\quad 且\quad \lim_{p\to\infty}\sqrt{1-\frac{a^2}{4\kappa^2p^2}}=1.$$

因为 $\mathrm{d}G/\mathrm{d}x$ 在 $x=x'$ 点不连续：

$$\left.\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}x}\right|_{x'-}^{x'+}=-\mathrm{e}^{-pt'},$$

即可定出

$$A=\frac{1}{2}\left(\frac{p^2}{a^2}-\frac{a^2}{4\kappa^2}\right)^{-1/2}\mathrm{e}^{-pt'},$$

因此

$$G(x,p;x',t')=\frac{a}{2}\frac{1}{\sqrt{p^2-\alpha^2}}\mathrm{e}^{-\sqrt{p^2-\alpha^2}\xi/a}\mathrm{e}^{-pt'}, \tag{8.38}$$

其中

$$\frac{a^2}{2\kappa}=\alpha, \qquad |x-x'|=\xi. \tag{8.39a}$$

代入普遍反演公式，就有

$$g(x,t;x',t')=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\frac{a}{2}\int_L\frac{1}{\sqrt{p^2-\alpha^2}}\mathrm{e}^{-\sqrt{p^2-\alpha^2}\xi/a}\mathrm{e}^{p\tau}\mathrm{d}p, \tag{8.40}$$

其中

$$t-t'=\tau, \tag{8.39b}$$

积分路径 L 为平行于虚轴且 $\mathrm{Re}\,p>\alpha$ 的直线.

可以用复变函数的办法计算上面的积分. 因为按照前面的约定有

$$\sqrt{p^2-\alpha^2}\frac{\xi}{a}=\frac{\xi}{a}p-\frac{1}{2}\frac{\xi}{a\alpha^2}\frac{1}{p}-\cdots,$$

故根据 Jordan 引理，可以得到

$$g(x,t;x',t')=0, \qquad \tau-\xi/a<0. \tag{8.41}$$

当 $\tau-\xi/a>0$，即 $|x-x'|<a(t-t')$ 时，则可采用如图 8.9 所示的围道. 因为在围道内无奇点，又根据 Jordan 引理及小圆弧引理，可以判断

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{1}{\sqrt{p^2-\alpha^2}}\mathrm{e}^{-\sqrt{p^2-\alpha^2}\xi/a}\mathrm{e}^{p\tau}\mathrm{d}p=0,$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{p^2-\alpha^2}}\mathrm{e}^{-\sqrt{p^2-\alpha^2}\xi/a}\mathrm{e}^{p\tau}\mathrm{d}p=0,$$

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{C_\delta}\frac{1}{\sqrt{p^2-\alpha^2}}\mathrm{e}^{-\sqrt{p^2-\alpha^2}\xi/a}\mathrm{e}^{p\tau}\mathrm{d}p=0,$$

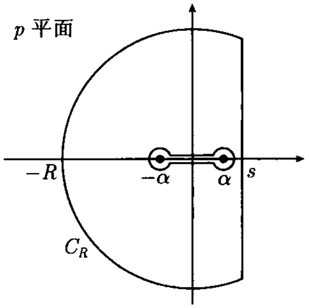


图 8.9 $\tau-\xi/a>0$ 时的积分围道

所以，取极限 $R\to\infty$, $\varepsilon\to 0$, $\delta\to 0$，就得到

$$\begin{aligned}
&g(x,t;x',t')\\
&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\frac{a}{2}\left[\int_{\alpha}^{-\alpha}\frac{\mathrm{e}^{p\tau}}{(-\mathrm{i})\sqrt{\alpha^2-p^2}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{\alpha^2-p^2}\xi/a}\mathrm{d}p+\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{\mathrm{e}^{p\tau}}{\mathrm{i}\sqrt{\alpha^2-p^2}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{\alpha^2-p^2}\xi/a}\mathrm{d}p\right]\\
&=\frac{a}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{\mathrm{e}^{p\tau}}{\sqrt{\alpha^2-p^2}}\cos\left(\frac{\xi}{a}\sqrt{\alpha^2-p^2}\right)\mathrm{d}p. \qquad (8.42\text{a})
\end{aligned}$$

在得到这个结果时，用到了相关的单值分枝的规定，即规定

在 $p>\alpha$ 的正实轴上： $\arg(p-\alpha)=0,\quad \arg(p+\alpha)=0,$

因此，

在割线上岸： $\arg(p-\alpha)=\pi,\quad \arg(p+\alpha)=0,$

在割线下岸： $\arg(p-\alpha)=\pi,\quad \arg(p+\alpha)=2\pi.$

作变换 $p=\alpha\sigma$，将 (8.42a) 式改写为

$$g(x,t;x',t')=\frac{a}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{e}^{\alpha\sigma\tau}}{\sqrt{1-\sigma^2}}\cos\left(\frac{\alpha\xi}{a}\sqrt{1-\sigma^2}\right)\mathrm{d}\sigma. \qquad (8.42\text{b})$$

再将被积函数作 Taylor 展开，并逐项积分，即得

$$\begin{aligned}
g(x,t;x',t')&=\frac{a}{2\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m)!}\left(\frac{\alpha\xi}{a}\right)^{2m}\frac{(\alpha\tau)^n}{n!}\int_{-1}^{1}(1-\sigma^2)^{m-1/2}\sigma^n\mathrm{d}\sigma\\
&=\frac{a}{2\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m)!}\left(\frac{\alpha\xi}{a}\right)^{2m}\frac{(\alpha\tau)^{2n}}{(2n)!}\int_{-1}^{1}(1-\sigma^2)^{m-1/2}\sigma^{2n}\mathrm{d}\sigma
\end{aligned}$$

$$= \frac{a}{2\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m)!}\left(\frac{\alpha\xi}{a}\right)^{2m}\frac{(\alpha\tau)^{2n}}{(2n)!}\int_0^1(1-\zeta)^{m-1/2}\zeta^{n-1/2}\mathrm{d}\sigma$$

$$= \frac{a}{2\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m)!}\left(\frac{\alpha\xi}{a}\right)^{2m}\frac{(\alpha\tau)^{2n}}{(2n)!}\frac{\Gamma(m+1/2)\,\Gamma(n+1/2)}{\Gamma(m+n+1)}.$$

再利用 Γ 函数的倍乘公式化简为

$$g(x,t;x',t') = \frac{a}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\,n!}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m+2n}\frac{1}{(m+n)!}\left(\frac{\alpha\xi}{a}\right)^{2m}(\alpha\tau)^{2n}.$$

引进新的求和指标 $k=m+n$，则

$$\begin{aligned} g(x,t;x',t') &= \frac{a}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{k}\frac{(-1)^m}{m!(k-m)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}\frac{1}{k!}\left(\frac{\alpha\xi}{a}\right)^{2m}(\alpha\tau)^{2(k-m)} \\ &= \frac{a}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}\left\{\sum_{m=0}^{k}\frac{1}{m!(k-m)!}\left[\left(\frac{\alpha\xi}{a}\right)^2\right]^m\left[-(\alpha\tau)^2\right]^{k-m}\right\} \\ &= \frac{a}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,k!}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}\left[\left(\frac{\alpha\xi}{a}\right)^2-(\alpha\tau)^2\right]^k \\ &= \frac{a}{2}\mathrm{J}_0\left(\frac{\alpha}{a}\sqrt{\xi^2-(a\tau)^2}\right). \end{aligned} \tag{8.42c}$$

最后就得到

$$\mathscr{G}(x,t;x',t') = \frac{a}{2}\mathrm{J}_0\left(\frac{a}{2\kappa}\sqrt{(x-x')^2-a^2(t-t')^2}\right)\mathrm{e}^{-a^2(t-t')/2\kappa}\eta\left(t-t'-\frac{|x-x'|}{a}\right). \tag{8.43}$$

解法二 原则上也可以采用 Fourier 变换求解定解问题 (8.35). 为此设

$$G(k,t;x',t') \equiv \mathscr{F}[g(x,t;x',t')] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}g(x,t;x',t')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x,$$

则定解问题 (8.35) 化为

$$\frac{1}{a^2}\frac{\mathrm{d}^2G}{\mathrm{d}t^2}+\left(k^2a^2-\frac{a^4}{4\kappa^2}\right)G = \frac{a^2}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx'}\delta(t-t'), \tag{8.44a}$$

$$G\Big|_{t<t'}=0, \qquad \frac{\partial G}{\partial t}\Big|_{t<t'}=0. \tag{8.44b}$$

解之即得

$$G(k,t;x',t') = \frac{a^2}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sin\sqrt{k^2a^2-\alpha^2}\tau}{\sqrt{k^2a^2-\alpha^2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx'}\eta(\tau), \tag{8.45}$$

其中的 α 和 τ 仍见 (8.39) 式，同时还约定

$$\sqrt{k^2a^2-\alpha^2}\Big|_{\alpha=0}=ka.$$

再将 $G(k,t;x',t')$ 求反演，就有

$$\begin{aligned}g(x,t;x',t')&=\mathscr{F}^{-1}[G(k,t;x',t')]\\&=\frac{a^2}{2\pi}\eta(\tau)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\sqrt{k^2a^2-\alpha^2}\tau}{\sqrt{k^2a^2-\alpha^2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\xi}\mathrm{d}k,\end{aligned}\tag{8.46}$$

值得提醒，这里的

$$\xi=x-x',$$

不同于 (8.39a) 式. 为了计算出 (8.46) 式中的积分，需要注意 $g(x,t;x',t')$ 应该满足的边界条件 (8.35b)，因此 (8.46) 式应理解为

$$g(x,t;x',t')=\lim_{\mathrm{Im}\,k\to0\pm}\left[\frac{a^2}{2\pi}\eta(\tau)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\sqrt{k^2a^2-\alpha^2}\tau}{\sqrt{k^2a^2-\alpha^2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\xi}\mathrm{d}k\right],\tag{8.46$'$}$$

其中当 $\xi>0$ 时取 + 号，$\xi<0$ 时取 − 号.

下面就分别讨论这两种情形. 由于 (8.46) 或 (8.46′) 式已经表明

$$g(x,t;x',t')=0,\qquad \tau<0.$$

故以下只考虑 $\tau>0$ 的情形.

当 $\xi>0$ 时，因为一定有 $\xi+a\tau>0$，采用图 8.10 中的围道，由留数定理就可以证明

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{k^2a^2-\alpha^2}\tau}}{\sqrt{k^2a^2-\alpha^2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\xi}\mathrm{d}k=0,$$

因此

$$g(x,t;x',t')=\lim_{\mathrm{Im}\,k\to0+}\left[-\frac{a^2}{4\pi\mathrm{i}}\eta(\tau)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{k^2a^2-\alpha^2}\tau}}{\sqrt{k^2a^2-\alpha^2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\xi}\mathrm{d}k\right],\quad \xi>0.\tag{8.47}$$

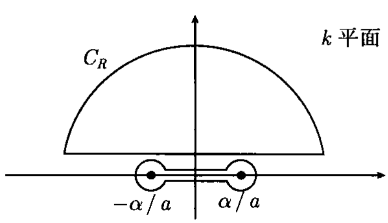


图 8.10 $\xi>0$ 且 $\xi\pm a\tau>0$ 时的积分围道

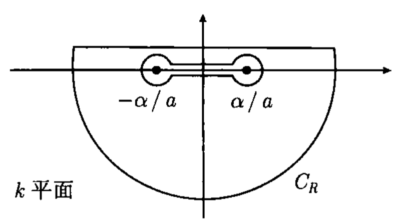


图 8.11 $\xi>0$ 且 $\xi-a\tau<0$ 时的积分围道

现在又要区分 $\xi - a\tau > 0$ 与 $\xi - a\tau < 0$ 这两种情形. 当 $\xi - a\tau > 0$ 时，仍然采用图 8.10 中的围道. 应用留数定理也可以证明积分为 0. 当 $\xi - a\tau < 0$ 时，则应采用图 8.11 中的围道. 因此，根据留数定理，有

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{k^2a^2-\alpha^2}\tau}}{\sqrt{k^2a^2-\alpha^2}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\xi}\mathrm{d}k \\
&= \int_{-\alpha/a}^{\alpha/a} \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{\alpha^2-k^2a^2}\tau}}{\mathrm{i}\sqrt{\alpha^2-k^2a^2}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\xi}\mathrm{d}k + \int_{\alpha/a}^{-\alpha/a} \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{\alpha^2-k^2a^2}\tau}}{-\mathrm{i}\sqrt{\alpha^2-k^2a^2}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\xi}\mathrm{d}k \\
&= \frac{2}{\mathrm{i}}\int_{-\alpha/a}^{\alpha/a} \frac{\cosh\sqrt{\alpha^2-k^2a^2}\tau}{\sqrt{\alpha^2-k^2a^2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\xi}\mathrm{d}k.
\end{aligned} \tag{8.48}$$

在得到这个结果时，也需要用到相关单值分枝的规定，即

在 $ka > \alpha$ 的正实轴上：　$\arg(ka-\alpha) = 0,\quad \arg(ka+\alpha) = 0,$

因此

在割线上岸：　$\arg(ka-\alpha) = \pi,\quad \arg(ka+\alpha) = 0,$

在割线下岸：　$\arg(ka-\alpha) = \pi,\quad \arg(ka+\alpha) = 2\pi.$

进一步计算 (8.48) 式右端的积分. 为此，将被积函数作 Taylor 展开，并逐项积分，即可求得

$$\begin{aligned}
&\int_{-\alpha/a}^{\alpha/a} \frac{\cosh\sqrt{\alpha^2-k^2a^2}\tau}{\sqrt{\alpha^2-k^2a^2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\xi}\mathrm{d}k \\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tau^{2m}}{(2m)!}\frac{(\mathrm{i}\xi)^n}{n!}\int_{-\alpha/a}^{\alpha/a}(\alpha^2-k^2a^2)^{m-1/2}k^n\,\mathrm{d}k \\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tau^{2m}}{(2m)!}\frac{(\mathrm{i}\xi)^{2n}}{(2n)!}\int_{-\alpha}^{\alpha/a}(\alpha^2-k^2a^2)^{m-1/2}k^{2n}\,\mathrm{d}k \\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tau^{2m}}{(2m)!}\frac{(\mathrm{i}\xi)^{2n}}{(2n)!}\alpha^{2m+2n}a^{-(2n+1)}\int_{-1}^{1}(1-\zeta^2)^{m-1/2}\zeta^{2n}\,\mathrm{d}\zeta \\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tau^{2m}}{(2m)!}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\xi^{2n}\alpha^{2m+2n}a^{-(2n+1)}\frac{\Gamma(m+1/2)\,\Gamma(n+1/2)}{\Gamma(m+n+1)} \\
&= \pi\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{m!}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{(m+n)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m+2n}\tau^{2m}\xi^{2n}\alpha^{2m+2n}a^{-(2n+1)} \\
&= \frac{\pi}{a}\mathrm{J}_0\left(\frac{\alpha}{a}\sqrt{\xi^2-a^2\tau^2}\right).
\end{aligned} \tag{8.49}$$

最后的求和步骤与解法一中相同. 将这个结果代入 (8.47) 式，就得到

$$g(x,t;x',t') = \frac{a}{2}\mathrm{J}_0\left(\frac{\alpha}{a}\sqrt{\xi^2 - a^2\tau^2}\right)\eta(\xi)\,\eta(a\tau - \xi). \tag{8.50}$$

当 $\xi < 0$ 时，一定也有 $\xi - a\tau < 0$，所以，采用图 8.12 中的围道，应用留数定理就可以证明

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{k^2a^2-\alpha^2}\tau}}{\sqrt{k^2a^2 - \alpha^2}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\xi}\mathrm{d}k = 0.$$

这样就得到

$$g(x,t;x',t') = \lim_{\mathrm{Im}\,k\to 0-}\left[\frac{a^2}{4\pi\mathrm{i}}\eta(\tau)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{k^2a^2-\alpha^2}\tau}}{\sqrt{k^2a^2-\alpha^2}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\xi}\mathrm{d}k\right], \qquad \xi < 0. \tag{8.51}$$

为了计算上式中的积分，又需要区别 $\xi + a\tau < 0$ 与 $\xi + a\tau > 0$ 的两种情形. 当 $\xi + a\tau < 0$ 时，仍然可以采用图 8.12 中的围道，从而求得

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{k^2a^2-\alpha^2}\tau}}{\sqrt{k^2a^2 - \alpha^2}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\xi}\mathrm{d}k = 0;$$

而当 $\xi + a\tau > 0$ 时，则应当改用图 8.13 中的围道，应用留数定理，也能导出

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{k^2a^2-\alpha^2}\tau}}{\sqrt{k^2a^2 - \alpha^2}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\xi}\mathrm{d}k \\
&\quad = \int_{-\alpha/a}^{\alpha/a} \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{\alpha^2-k^2a^2}}}{-\mathrm{i}\sqrt{\alpha^2-k^2a^2\tau}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\xi}\mathrm{d}k + \int_{\alpha/a}^{-\alpha/a} \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{\alpha^2-k^2a^2}}}{\mathrm{i}\sqrt{\alpha^2-k^2a^2\tau}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\xi}\mathrm{d}k \\
&\quad = -\frac{2}{\mathrm{i}}\int_{-\alpha/a}^{\alpha/a} \frac{\cosh\sqrt{\alpha^2-k^2a^2}\tau}{\sqrt{\alpha^2-k^2a^2}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\xi}\mathrm{d}k.
\end{aligned}$$

此积分已在 (8.49) 式中算出，因此

$$g(x,t;x',t') = \frac{a}{2}\mathrm{J}_0\left(\frac{\alpha}{a}\sqrt{\xi^2 - a^2\tau^2}\right)\eta(-\xi)\,\eta(a\tau + \xi). \tag{8.52}$$

综合 (8.50) 与 (8.52) 式，并代入 (8.34) 式，同样也得出 (8.43) 式.

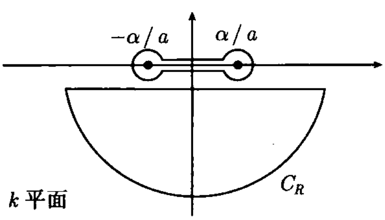


图 8.12 $\xi < 0$ 且 $\xi \pm a\tau < 0$ 时的积分围道

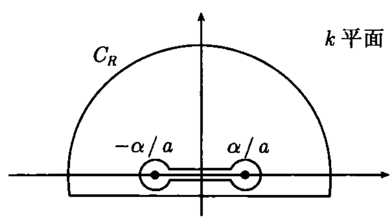


图 8.13 $\xi < 0$ 且 $\xi + a\tau > 0$ 时的积分围道

☞ **讨论**

1. 就本题而言，采用 Laplace 变换法求解比较直接. 采用 Fourier 变换法，关键在于边界条件 (体现在求反演时) 的使用，亦即反演时积分路径的正确认定. 此后计算中遇到的数学演算，与 Laplace 变换时相同，但因为要区分 $\xi > 0$ 与 $\xi < 0$，每一种情形下还要作进一步的划分，所以计算过程也要略长一些.

2. 本题还涉及多值函数的计算，需要正确地规定单值分枝. 无论是 Laplace 变换或 Fourier 变换，反演时单值分枝规定的原则是：正实轴上足够远处相关宗量 (例如上面的 $p \pm \alpha$ 或 $ka \pm \alpha$) 的辐角均为 0.

§8.3 用 Fourier 变换方法计算 Green 函数

8.3.1 Helmholtz 方程

首先考虑 Helmholtz 方程的 Green 函数. 对于全空间 (即在有限区域内没有边界条件) 的情形，Green 函数 $G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$ 是相对坐标 $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'$ 的函数，满足

$$\nabla^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') + \lambda^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'). \tag{8.53}$$

作 Fourier 变换：

$$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \iiint \widetilde{G}(\boldsymbol{k}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')} \mathrm{d}^3 k, \tag{8.54}$$

$$\widetilde{G}(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \iiint G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')} \mathrm{d}^3 x, \tag{8.55}$$

并且应用 δ 函数的 Fourier 积分表示

$$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')} \mathrm{d}^3 k, \tag{8.56}$$

我们求得

$$\left(\lambda^2 - k^2\right) \widetilde{G}(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}. \tag{8.57}$$

这个方程的通解是

$$\widetilde{G}(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left[\frac{1}{\lambda^2 - k^2} + C\delta(\lambda^2 - k^2)\right], \tag{8.58}$$

正如我们从 $x\delta(x) = 0$ 的普遍结果看到的那样，其中的 $C(\boldsymbol{k})$ 任意. 在 $\delta(\lambda^2 - k^2)$ 前的系数待定等价于没有指定如何围绕极点 $k = \pm\lambda$ 的围道. 事实上，将 (8.58) 式代入 (8.54) 式，并令 $\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{0}$，我们得

$$G(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint \left[\frac{1}{\lambda^2 - k^2} + C\delta(\lambda^2 - k^2)\right] \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \mathrm{d}^3 k. \tag{8.59}$$

下面的计算表明，C 值的不同选取就体现在积分

$$G(\boldsymbol{r})=\frac{1}{(2\pi)^3}\iiint\frac{1}{\lambda^2-k^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{d}^3k \tag{8.59$'$}$$

中围绕极点的不同围道.

在决定围道之前，可先算出 (8.59′) 式中积分的角度部分. 选取 $\boldsymbol{k}$ 空间中的 z 轴沿 $\boldsymbol{r}$ 方向，我们得

$$\begin{aligned}G(\boldsymbol{r})&=\frac{2\pi}{(2\pi)^3}\int_0^\infty\frac{k^2\,\mathrm{d}k}{\lambda^2-k^2}\int_{-1}^1\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr\cos\theta}\mathrm{d}(\cos\theta)\\&=\frac{1}{(2\pi)^2\mathrm{i}r}\int_0^\infty\frac{k}{\lambda^2-k^2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr}\right)\mathrm{d}k\\&=\frac{1}{(2\pi)^2\mathrm{i}r}\int_{-\infty}^\infty\frac{k}{\lambda^2-k^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}\mathrm{d}k\\&=\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\int_{-\infty}^\infty\frac{1}{k^2-\lambda^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}\mathrm{d}k.\end{aligned}\tag{8.60}$$

现在选取围道以计算 (8.60) 式中最后的对 k 的积分. 记住 $r>0$，所以我们应当取上半平面的围道 C_1 (见图 8.14)，这样就求得出射波的 Green 函数

$$\begin{aligned}G_{\text{out}}(\boldsymbol{r})&=\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\oint_{C_1}\frac{1}{k^2-\lambda^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}\mathrm{d}k\\&=\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{2\pi\mathrm{i}}{2\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda r}\right)=-\frac{1}{4\pi}\frac{1}{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda r}.\end{aligned}\tag{8.61}$$

作为上面选取围道 C_1 的等价办法，我们可让围道仍沿着实 k 轴而让极点稍作移动：

$$\begin{cases}\lambda\to\lambda+\mathrm{i}\varepsilon,\\-\lambda\to-\lambda-\mathrm{i}\varepsilon,\\\lambda^2\to(\lambda+\mathrm{i}\varepsilon)^2=\lambda^2+\mathrm{i}\varepsilon',\end{cases}\tag{8.62}$$

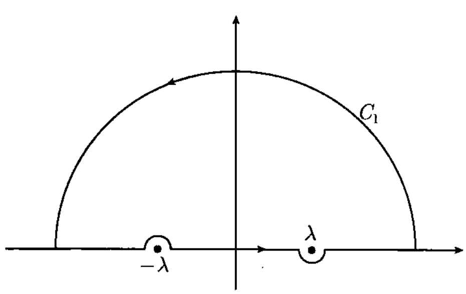


图 8.14　积分围道 C_1：出射波的 Green 函数

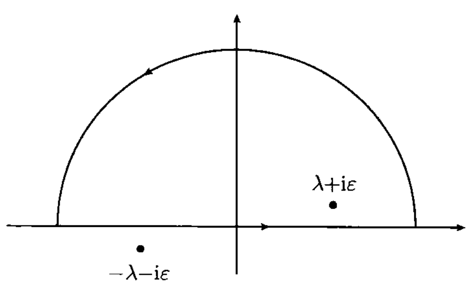


图 8.15　积分围道 C_1的等价路径

其中 ε 与 ε' 均为正的无穷小量 (见图 8.15). 这样出射波的 Green 函数的 Fourier 变换就是

$$\begin{aligned}\widetilde{G}_{\text{out}}(\boldsymbol{k}) &= \lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{\lambda^2+\mathrm{i}\varepsilon'-k^2}\\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\left[\text{v.p.}\frac{1}{\lambda^2-k^2}-\mathrm{i}\pi\delta(\lambda^2-k^2)\right].\end{aligned} \tag{8.63}$$

这相当于 (8.58) 式中 $C=-\mathrm{i}\pi$. 在得到得到这个结果时用到了 (6.37b) 式

$$\frac{1}{x+\mathrm{i}0}=\text{v.p.}\frac{1}{x}-\mathrm{i}\pi\delta(x).$$

也可以有另外一种选择. 取围道 C_2 (见图 8.16), 我们得到的是入射波的 Green 函数

$$G_{\text{in}}(\boldsymbol{r})=\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\oint_{C_2}\frac{1}{k^2-\lambda^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}\mathrm{d}k=-\frac{1}{4\pi}\frac{1}{r}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda r}. \tag{8.64}$$

入射波 Green 函数的 Fourier 变换是

$$\begin{aligned}\widetilde{G}_{\text{in}}(\boldsymbol{k}) &= \lim_{\varepsilon\to0+}\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{\lambda^2-\mathrm{i}\varepsilon-k^2}\\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\left[\text{v.p.}\frac{1}{\lambda^2-k^2}+\mathrm{i}\pi\delta(\lambda^2-k^2)\right].\end{aligned} \tag{8.65}$$

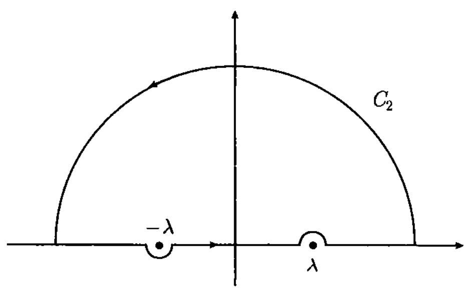


图 8.16 积分围道 C_2: 入射波的 Green 函数

8.3.2 波动方程

能够用同样的方法得到波动方程的四维 Green 函数. 全空间的 Green 函数是 $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}', t-t'$ 的函数, 且满足

$$\left(\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)G(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}';t-t')=\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\delta(t-t'). \tag{8.66}$$

作 Fourier 变换:

$$G(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}';t-t') = \frac{1}{(2\pi)^2}\iiint \mathrm{d}^3k \int \widetilde{G}(\boldsymbol{k};\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')-\mathrm{i}\omega(t-t')}\mathrm{d}\omega, \tag{8.67}$$

$$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\delta(t-t') = \frac{1}{(2\pi)^4}\iiint \mathrm{d}^3k \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')-\mathrm{i}\omega(t-t')}\mathrm{d}\omega, \tag{8.68}$$

我们得到

$$\left(-k^2+\frac{\omega^2}{c^2}\right)\widetilde{G}(\boldsymbol{k};\omega) = \frac{1}{(2\pi)^2}, \tag{8.69}$$

所以

$$\widetilde{G}(\boldsymbol{k};\omega) = \frac{1}{(2\pi)^2}\left[\frac{1}{(\omega^2/c^2)-k^2} + D\delta\left(\frac{\omega^2}{c^2}-k^2\right)\right]. \tag{8.70}$$

$\delta((\omega/c)^2-k^2)$ 前的待定系数等价于 Fourier 积分

$$G(\boldsymbol{r};t) = \frac{1}{(2\pi)^2}\iiint \mathrm{d}^3k \int \frac{1}{(\omega/c)^2-k^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega \tag{8.71}$$

中围绕极点的不同走法. 所谓的推迟 Green 函数 $G_{\mathrm{ret}}(\boldsymbol{r};t)$ 满足条件

$$G_{\mathrm{ret}}(\boldsymbol{r};t) = 0, \qquad t<0. \tag{8.72}$$

为了得到这个结果, 应当在 ω 平面上取从上方绕过极点的路径 (见图 8.17).

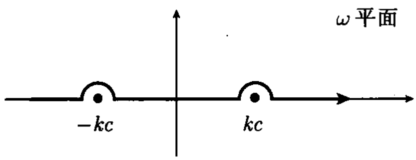


图 8.17 导出推迟 Green 函数 $G_{\mathrm{ret}}(\boldsymbol{r};t)$ 的积分路径

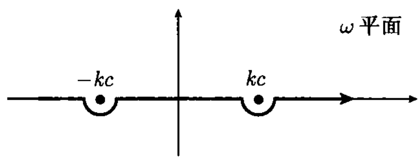


图 8.18 导出超前 Green 函数 $G_{\mathrm{adv}}(\boldsymbol{r};t)$ 的积分路径

对于 $t<0$, 必须在上半平面构成闭合围道. 因为围道内无奇点, 就得到 (8.72) 式. 对于 $t>0$, 在下半平面完成闭合围道, 由两个极点 $\omega=\pm kc$ 的贡献得到

$$\begin{aligned} G_{\mathrm{ret}}(\boldsymbol{r};t) &= -\frac{2\pi\mathrm{i}}{(2\pi)^4}\iiint \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\left(\frac{c}{2k}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kct}-\frac{c}{2k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kct}\right)\mathrm{d}^3k \\ &= -\frac{1}{4\pi r}\delta\left(\frac{r}{c}-t\right), \qquad t>0. \end{aligned} \tag{8.73}$$

类似地, 在 ω 平面上选取积分路径在极点之下 (见图 8.18), 则得到超前的 Green 函数

$$G_{\mathrm{adv}}(\boldsymbol{r};t) = \begin{cases} -\dfrac{1}{4\pi r}\delta\left(\dfrac{r}{c}+t\right), & t<0, \\ 0, & t>0. \end{cases} \tag{8.74}$$

上述求解过程也可以简化为只对 t 作 Fourier 变换，而后直接引用上一节关于 Helmholtz 方程 Green 函数的结果. 这时，首先令

$$g(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}';\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}G(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}';t-t')\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(t-t')}\mathrm{d}t, \tag{8.75}$$

则方程 (8.66) 化为

$$\left[\nabla^2+\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\right]g(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}';\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'). \tag{8.76}$$

因此，如果采用 (8.61) 式给出的出射波 Green 函数，则可得到

$$g(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}';\omega)=-\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega/c)|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}. \tag{8.77}$$

再求反演，有

$$G_{\text{ret}}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}';t-t')=-\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega/c)|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t-t')}\mathrm{d}\omega,$$

就可以得到 (8.73) 式的结果.

而如果将方程 (8.76) 的解取为入射波的 Green 函数 (见 (8.64) 式)，则得到超前 Green 函数 $G_{\text{adv}}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}';t-t')$.

8.3.3 Klein-Gordon 方程

可以把量子场论中的 Klein-Gordon 方程

$$\left(\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\psi(\boldsymbol{r},t)=0 \tag{8.78}$$

看成波动方程的推广. 用 Fourier 变换也能够求得它的 Green 函数，就像波动方程那样. 为简单起见，取 $\hbar=c=1$，则 Green 函数的微分方程就是

$$\left(\nabla^2-\frac{\partial^2}{\partial t^2}-m^2\right)G(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}';t-t')=\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\delta(t-t'). \tag{8.79}$$

为书写方便，以下令 $\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'$, $\tau=t-t'$. 和波动方程类似，但是只对变量 t 作 Fourier 变换，即令

$$g(\boldsymbol{\rho};\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}G(\boldsymbol{\rho};\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}\tau, \tag{8.80}$$

则 $g(\boldsymbol{\rho};\omega)$ 满足方程

$$(\nabla^2+\omega^2-m^2)g(\boldsymbol{\rho};\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\delta(\boldsymbol{\rho}). \tag{8.81}$$

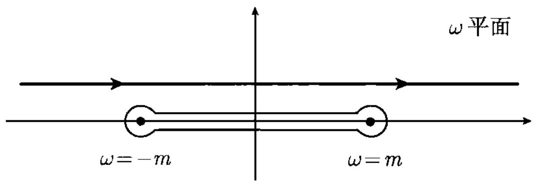


图 8.19 导出 Klein-Gordon 方程推迟 Green 函数的积分路径

这是三维无界空间中 Helmholtz 方程的 Green 函数问题[①]，其解为

$$g(\boldsymbol{\rho};\omega) = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{\rho}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{\omega^2-m^2}\rho}. \tag{8.82}$$

因此

$$G(\boldsymbol{\rho};\tau) = -\frac{1}{8\pi^2}\frac{1}{\rho}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{\omega^2-m^2}\rho}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}\omega. \tag{8.83}$$

这里需要对出现的多值函数做出明确的规定．考虑到当 $m\to 0$ 时 Klein-Gordon 方程应当过渡为平常的波动方程，因此，应当直接连接枝点 $\pm\sqrt{\omega^2-m^2}$ 而作割线，同时规定在割线上岸，

$$\sqrt{\omega^2-m^2}\Big|_{m=0} = \omega.$$

如果在 ω 平面上选择类似于图 8.17 的积分路径，从枝点上方绕过 (见图 8.19)，就得到推迟的 Green 函数，它满足条件

$$G_{\text{ret}}(\boldsymbol{\rho};t) = 0, \qquad t<0. \tag{8.84}$$

为了计算 (8.83) 式中的积分，最简便的办法是将它改写成

$$G_{\text{ret}}(\boldsymbol{\rho};\tau) = -\frac{1}{8\pi^2\mathrm{i}}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{\omega^2-m^2}\rho-\mathrm{i}\omega\tau}}{\sqrt{\omega^2-m^2}}\,\mathrm{d}\omega, \tag{8.85}$$

积分路径仍如图 8.19 所示．我们注意，(8.47) — (8.49) 式正好计算过上面的积分，因此，直接引用那里的结果，就能写出

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{\omega^2-m^2}\rho-\mathrm{i}\omega\tau}}{\sqrt{\omega^2-m^2}}\,\mathrm{d}\omega = -2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{J}_0\left(m\sqrt{\tau^2-\rho^2}\right)\eta(\tau-\rho). \tag{8.86}$$

代入 (8.85) 式，就求得

① 例如，参阅：吴崇试．数学物理方法．第二版．北京：北京大学出版社，2003：§20.3.

$$\begin{aligned} G_{\text{ret}}(\boldsymbol{\rho};\tau) &= \frac{1}{4\pi\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\mathrm{J}_0(m\sqrt{\tau^2-\rho^2})\,\eta(\tau-\rho)\right] \\ &= -\frac{\delta(\tau-\rho)}{4\pi\rho}+\frac{m}{4\pi\sqrt{\tau^2-\rho^2}}\mathrm{J}_1(m\sqrt{\tau^2-\rho^2})\,\eta(\tau-\rho). \end{aligned} \tag{8.87}$$

这里用到了

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\eta(\tau-\rho)=-\delta(\tau-\rho) \tag{8.88}$$

及

$$\mathrm{J}_0(0)=1,\qquad \mathrm{J}_0'(x)=-\mathrm{J}_1(x). \tag{8.89}$$

模仿上面的求解过程，也能求得 $G_{\text{adv}}(\boldsymbol{\rho},\tau)$.

☞ **讨论** 下面介绍有关 (8.85) 式的另一种计算方法：令

$$F(\rho,\tau)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{\omega^2-m^2}\rho-\mathrm{i}\omega\tau}}{\sqrt{\omega^2-m^2}}\mathrm{d}\omega. \tag{8.90}$$

对于 $\tau<\rho$，此积分可以通过在上半平面加上半径为无穷大的半圆而完成. 因为积分路径从割线的上方通过，而被积函数在上半平面无奇点，我们就得到

$$F(\rho,\tau)=0,\quad \tau<\rho. \tag{8.91}$$

对于 $\tau>\rho$，可应用 Cauchy 定理而将积分路径变形为如图 8.20 所示；再通过变换

$$\omega=m\cosh z,$$

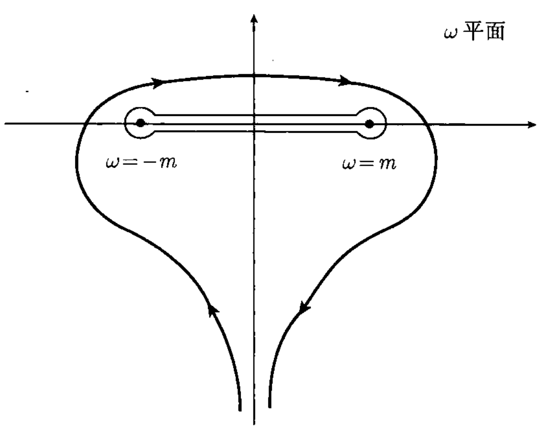


图 8.20 图 8.18 中的积分路径的变形

从 ω 平面变换到 z 平面. 如果进一步令

$$\tau = \rho \coth\theta,$$

则

$$\sqrt{\omega^2 - m^2}\rho - \omega\tau = -m\sqrt{\tau^2 - \rho^2}\cosh(z-\theta),$$

于是 (8.90) 式就化为

$$F(\rho,\tau) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\infty+3\pi\mathrm{i}/2}^{\infty-\pi\mathrm{i}/2} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\sqrt{\tau^2-\rho^2}\cosh(z-\theta)}\mathrm{d}z, \tag{8.92}$$

积分路径见图 8.21. 再作变换 $z-\theta = \mathrm{i}\zeta$, 相应地, $\cosh(z-\theta) = \cos\zeta$, (8.92) 式变为

$$F(\rho,\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\mathrm{i}\infty+3\pi/2}^{-\mathrm{i}\infty-\pi/2} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\sqrt{\tau^2-\rho^2}\cos\zeta}\mathrm{d}\zeta.$$

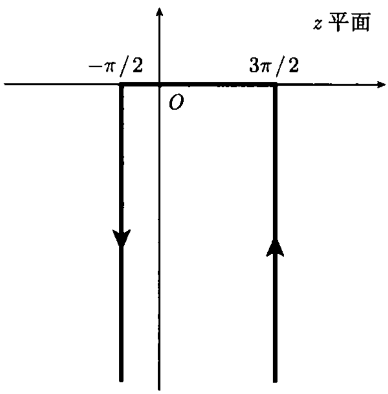


图 8.21 z 平面上的积分路径

考虑到被积函数的周期性, 上述积分中沿半无穷直线的两部分互相抵消, 于是可以将 (8.92) 式进一步化为

$$F(\rho,\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{3\pi/2}^{-\pi/2} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\sqrt{\tau^2-\rho^2}\cos\zeta}\mathrm{d}\zeta = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\sqrt{\tau^2-\rho^2}\cos\zeta}\mathrm{d}\zeta. \tag{8.93}$$

这正是 Bessel 函数 $\mathrm{J}_0(x)$ 的积分表示式, 所以

$$F(\rho,\tau) = -\mathrm{J}_0(m\sqrt{\tau^2-\rho^2}), \qquad \tau > \rho. \tag{8.94}$$

综合 (8.91) 与 (8.94) 两式, 就得到与 (8.86) 式一致的结果.

第九章　球　函　数

§9.1　Legendre 函数的 Wroński 行列式

9.1.1　预备性结果：$\mathrm{P}_\nu(0)$ 与 $\mathrm{P}'_\nu(0)$ 值

已知 $\mathrm{P}_\nu(x)=\mathrm{F}(-\nu,1+\nu;1;(1-x)/2)$，下面根据超几何函数的变换性质来计算 $\mathrm{P}_\nu(0)=\mathrm{F}(-\nu,1+\nu;1;1/2)$.

$\mathrm{F}(-\nu,1+\nu;1;x)$ 满足微分方程

$$x(1-x)\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2}+(1-2x)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}+\nu(\nu+1)w=0. \tag{9.1a}$$

作变换 $t=4x(1-x)$，则

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}=4(1-2x)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t},\qquad \frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2}=16(1-2x)^2\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}t^2}-8\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t},$$

所以方程化为

$$x(1-x)\left[16(1-2x)^2\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}t^2}-8\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}\right]+4(1-2x)^2\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}+\nu(\nu+1)w=0,$$

即

$$t(1-t)\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}t^2}+\left(1-\frac{3t}{2}\right)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}+\frac{\nu(\nu+1)}{4}w=0. \tag{9.1b}$$

考虑到方程 (9.1a) 与 (9.1b) 的第二解均含有对数项，故它们的第一解一定满足

$$\mathrm{F}(-\nu,1+\nu;1;x)=C\,\mathrm{F}(-\nu/2,(1+\nu)/2;1;4x(1-x)).$$

两端代入 $x=0$，即可定出常数 $C=1$. 再令 $x=1/2$，即得

$$\mathrm{F}(-\nu,1+\nu;1;1/2)=\mathrm{F}(-\nu/2,(1+\nu)/2;1;1).$$

根据超几何函数的特殊值

$$\mathrm{F}(\alpha,\beta;\gamma;1)=\frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\,\Gamma(\gamma-\beta)},\qquad \mathrm{Re}(\gamma-\alpha-\beta)>0,$$

最后就能求出

$$\mathrm{P}_\nu(0)=\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(1+\nu/2)\,\Gamma((1-\nu)/2)}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma((1+\nu)/2)}{\Gamma(1+\nu/2)}\cos\frac{\nu\pi}{2}. \tag{9.2}$$

至于 $\mathrm{P}_\nu'(0)$ 值，则可通过递推关系

$$(x^2-1)\frac{\mathrm{dP}_\nu(x)}{\mathrm{d}x}=(\nu+1)\left[\mathrm{P}_{\nu+1}(x)-x\mathrm{P}_\nu(x)\right]$$

求出．在上式中代入 $x=0$，即得

$$\begin{aligned}\mathrm{P}_\nu'(0)&=-(\nu+1)\mathrm{P}_{\nu+1}(0)=-\frac{\nu+1}{\Gamma((3+\nu)/2)}\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(-\nu/2)}\\&=-\frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma((1+\nu)/2)\,\Gamma(-\nu/2)}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(1+\nu/2)}{\Gamma((1+\nu)/2)}\sin\frac{\nu\pi}{2}.\end{aligned}\tag{9.3}$$

9.1.2 Wroński 行列式 $W[\mathrm{P}_\nu(x),\mathrm{P}_\nu(-x)]$ 及 $W[\mathrm{P}_\nu(x),\mathrm{Q}_\nu(x)]$

Wroński 行列式的定义为

$$W[\mathrm{P}_\nu(x),\mathrm{P}_\nu(-x)]=\begin{vmatrix}\mathrm{P}_\nu(x) & \mathrm{P}_\nu(-x)\\ \dfrac{\mathrm{dP}_\nu(x)}{\mathrm{d}x} & \dfrac{\mathrm{dP}_\nu(-x)}{\mathrm{d}x}\end{vmatrix}.$$

直接由 Legendre 方程可以导出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{(1-x^2)\left[\mathrm{P}_\nu(x)\frac{\mathrm{dP}_\nu(-x)}{\mathrm{d}x}-\mathrm{P}_\nu(-x)\frac{\mathrm{dP}_\nu(x)}{\mathrm{d}x}\right]\right\}=0,$$

即

$$(1-x^2)\left[\mathrm{P}_\nu(x)\frac{\mathrm{dP}_\nu(-x)}{\mathrm{d}x}-\mathrm{P}_\nu(-x)\frac{\mathrm{dP}_\nu(x)}{\mathrm{d}x}\right]=C.$$

为了求出常数 C，可令 $x=0$：

$$\begin{aligned}C&=\lim_{x\to0}(1-x^2)\left[\mathrm{P}_\nu(x)\frac{\mathrm{dP}_\nu(-x)}{\mathrm{d}x}-\mathrm{P}_\nu(-x)\frac{\mathrm{dP}_\nu(x)}{\mathrm{d}x}\right]=-2\mathrm{P}_\nu(x)\frac{\mathrm{dP}_\nu(x)}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=0}\\&=-2\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma((1+\nu)/2)}{\Gamma(1+\nu/2)}\cos\frac{\nu\pi}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(1+\nu/2)}{\Gamma((1+\nu)/2)}\sin\frac{\nu\pi}{2}=-\frac{2}{\pi}\sin\nu\pi.\end{aligned}$$

因此

$$W[\mathrm{P}_\nu(x),\mathrm{P}_\nu(-x)]=-\frac{2}{\pi}\frac{\sin\nu\pi}{1-x^2}.\tag{9.4}$$

这个结果表明，当 ν 不为整数时，$\mathrm{P}_\nu(-x)$ 与 $\mathrm{P}_\nu(x)$ 线性无关，它们都是同一个 Legendre 方程的解；但当 ν 等于整数 n 时，$\mathrm{P}_n(-x)$ 与 $\mathrm{P}_n(x)$ 线性相关．事实上，我们知道

$$\mathrm{P}_n(-x)=(-1)^n\mathrm{P}_n(x).$$

因此，为了构造与 $\mathrm{P}_\nu(x)$ 线性无关的第二解，不妨定义

$$\mathrm{Q}_\nu(x)=A\mathrm{P}_\nu(x)+B\mathrm{P}_\nu(-x).$$

因为

$$W[\mathrm{P}_\nu(x),\ \mathrm{Q}_\nu(x)] = B\cdot W[\mathrm{P}_\nu(x),\ \mathrm{P}_\nu(-x)] = -\frac{2B}{\pi}\frac{\sin\nu\pi}{1-x^2},$$

因此，只要取 $B = -\dfrac{\pi}{2\sin\nu\pi}$，则

$$\mathrm{Q}_\nu(x) = A\mathrm{P}_\nu(x)+B\mathrm{P}_\nu(-x) = \frac{\pi}{2}\frac{A'\mathrm{P}_\nu(x)-\mathrm{P}_\nu(-x)}{\sin\nu\pi}$$

就一定与 $\mathrm{P}_\nu(x)$ 线性无关. 但为了保证此式有意义 (当 ν 为整数 n 时，分母中的 $\sin\nu\pi=0$)，不妨取 $A'=\cos\nu\pi$ (使 ν 为整数 n 时，分子也为 0)，这样就定义了第二类 Legendre 函数

$$\mathrm{Q}_\nu(x) = \frac{\pi}{2}\frac{\cos\nu\pi\cdot\mathrm{P}_\nu(x)-\mathrm{P}_\nu(-x)}{\sin\nu\pi}. \tag{9.5}$$

显然，

$$W[\mathrm{P}_\nu(x),\ \mathrm{Q}_\nu(x)] = \frac{1}{1-x^2}. \tag{9.6}$$

9.1.3 Wroński 行列式 $W[\mathrm{P}_\nu^\mu(x),\ \mathrm{Q}_\nu^\mu(x)]$

当 $-1<x<1$ 时，$\mathrm{P}_\nu^\mu(x)$ 与 $\mathrm{Q}_\nu^\mu(x)$ 的定义分别为

$$\mathrm{P}_\nu^\mu(x) = \frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu\pi/2}\mathrm{P}_\nu^\mu(x+\mathrm{i}0)+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu\pi/2}\mathrm{P}_\nu^\mu(x-\mathrm{i}0)\right], \tag{9.7}$$

$$\mathrm{Q}_\nu^\mu(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu\pi}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu\pi/2}\mathrm{Q}_\nu^\mu(x+\mathrm{i}0)+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu\pi/2}\mathrm{Q}_\nu^\mu(x-\mathrm{i}0)\right], \tag{9.8}$$

它们都满足连带 Legendre 方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}\mathrm{P}_\nu^\mu(x)}{\mathrm{d}x}\right]+\left[\nu(\nu+1)-\frac{\mu^2}{1-x^2}\right]\mathrm{P}_\nu^\mu(x)=0,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}\mathrm{Q}_\nu^\mu(x)}{\mathrm{d}x}\right]+\left[\nu(\nu+1)-\frac{\mu^2}{1-x^2}\right]\mathrm{Q}_\nu^\mu(x)]=0.$$

将此二方程分别乘以 $\mathrm{Q}_\nu^\mu(x)$与 $\mathrm{P}_\nu^\mu(x)$，相减即得

$$\mathrm{Q}_\nu^\mu(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}\mathrm{P}_\nu^\mu(x)}{\mathrm{d}x}\right]-\mathrm{P}_\nu^\mu(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}\mathrm{Q}_\nu^\mu(x)}{\mathrm{d}x}\right]=0,$$

亦即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{(1-x^2)\left[\mathrm{Q}_\nu^\mu(x)\frac{\mathrm{d}\mathrm{P}_\nu^\mu(x)}{\mathrm{d}x}-\mathrm{P}_\nu^\mu(x)\frac{\mathrm{d}\mathrm{Q}_\nu^\mu(x)}{\mathrm{d}x}\right]\right\}=0.$$

因此

$$\mathrm{P}_\nu^\mu(x)\frac{\mathrm{d}\mathrm{Q}_\nu^\mu(x)}{\mathrm{d}x}-\mathrm{Q}_\nu^\mu(x)\frac{\mathrm{d}\mathrm{P}_\nu^\mu(x)}{\mathrm{d}x}=\frac{C}{1-x^2}.$$

为了求出常数 C，不妨在上式中代入 $x=0$，于是即得

$$C=\left[\mathrm{P}_\nu^\mu(x)\frac{\mathrm{d}\mathrm{Q}_\nu^\mu(x)}{\mathrm{d}x}-\mathrm{Q}_\nu^\mu(x)\frac{\mathrm{d}\mathrm{P}_\nu^\mu(x)}{\mathrm{d}x}\right]_{x=0}$$

将连带 Legendre 方程作变换 $\xi=x^2$，从而可以建立起连带 Legendre 函数与超几何函数之间的联系：

$$\begin{aligned}\frac{(1-x^2)^{\mu/2}}{2^\mu\pi^{1/2}}\mathrm{P}_\nu^\mu(x)=&\frac{1}{\Gamma\left(\dfrac{1-\nu-\mu}{2}\right)\Gamma\left(1+\dfrac{\nu-\mu}{2}\right)}\mathrm{F}\left(-\frac{\nu+\mu}{2},\frac{\nu-\mu+1}{2};\frac{1}{2};x^2\right)\\&-\frac{2}{\Gamma\left(\dfrac{1+\nu-\mu}{2}\right)\Gamma\left(-\dfrac{\nu+\mu}{2}\right)}x\,\mathrm{F}\left(\frac{1-\nu-\mu}{2},\frac{\nu-\mu}{2}+1;\frac{3}{2};x^2\right),\end{aligned}\tag{9.9a}$$

$$\begin{aligned}\frac{(1-x^2)^{\mu/2}}{2^\mu\pi^{3/2}}\mathrm{Q}_\nu^\mu(x)=&\frac{\cot\dfrac{\nu+\mu}{2}\pi}{\Gamma\left(\dfrac{1+\nu-\mu}{2}\right)\Gamma\left(-\dfrac{\nu+\mu}{2}\right)}x\,\mathrm{F}\left(\frac{1-\nu-\mu}{2},\frac{\nu-\mu}{2}+1;\frac{3}{2};x^2\right)\\&-\frac{1}{2}\frac{\tan\dfrac{\nu+\mu}{2}\pi}{\Gamma\left(\dfrac{\nu-\mu}{2}+1\right)\Gamma\left(\dfrac{1-\nu-\mu}{2}\right)}\mathrm{F}\left(-\frac{\nu+\mu}{2},\frac{\nu-\mu+1}{2};\frac{1}{2};x^2\right),\end{aligned}\tag{9.9b}$$

进而就能求得

$$\mathrm{P}_\nu^\mu(0)=\frac{2^\mu}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma\left(\dfrac{\nu+\mu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{\nu-\mu}{2}+1\right)}\cos\frac{\nu+\mu}{2}\pi,\tag{9.10a}$$

$$\mathrm{Q}_\nu^\mu(0)=-2^{\mu-1}\sqrt{\pi}\frac{\Gamma\left(\dfrac{\nu+\mu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{\nu-\mu}{2}+1\right)}\sin\frac{\nu+\mu}{2}\pi,\tag{9.10b}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}\mathrm{P}_\nu^\mu(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=\frac{2^{\mu+1}}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma\left(\dfrac{\nu+\mu}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\dfrac{\nu-\mu+1}{2}\right)}\sin\frac{\nu+\mu}{2}\pi,\tag{9.10c}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}\mathrm{Q}_\nu^\mu(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=2^\mu\sqrt{\pi}\frac{\Gamma\left(\dfrac{\nu+\mu}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\dfrac{\nu-\mu+1}{2}\right)}\cos\frac{\nu+\mu}{2}\pi,\tag{9.10d}$$

因而定出

$$C=\frac{\Gamma\left(\dfrac{\nu+\mu+1}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{\nu+\mu}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\dfrac{\nu-\mu+1}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{\nu-\mu}{2}+1\right)}=\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu-\mu+1)}.$$

最后就得到 $\mathrm{P}_\nu^\mu(x)$ 与 $\mathrm{Q}_\nu^\mu(x)$ 之间的 Wroński 行列式

$$\begin{aligned}W[\mathrm{P}_\nu^\mu(x),\ \mathrm{Q}_\nu^\mu(x)]&\equiv\mathrm{P}_\nu^\mu(x)\frac{\mathrm{d}\mathrm{Q}_\nu^\mu(x)}{\mathrm{d}x}-\mathrm{Q}_\nu^\mu(x)\frac{\mathrm{d}\mathrm{P}_\nu^\mu(x)}{\mathrm{d}x}\\&=\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu-\mu+1)}\frac{1}{1-x^2}.\end{aligned}\tag{9.11}$$

请读者注意 $\mathrm{P}_\nu^\mu(x)$, $\mathrm{Q}_\nu^\mu(x)$ 与 $\mathrm{P}_\nu^\mu(z)$, $\mathrm{Q}_\nu^\mu(z)$ 定义上的差异，切不可误以为将 (9.17) 式中的 x 改写成 z 即可得到 $W[\mathrm{P}_\nu^\mu(z),\mathrm{Q}_\nu^\mu(z)]$. 对于后者，正确的结果是

$$\begin{aligned}W[\mathrm{P}_\nu^\mu(z),\ \mathrm{Q}_\nu^\mu(z)]&\equiv\mathrm{P}_\nu^\mu(z)\frac{\mathrm{d}\mathrm{Q}_\nu^\mu(z)}{\mathrm{d}z}-\mathrm{Q}_\nu^\mu(z)\frac{\mathrm{d}\mathrm{P}_\nu^\mu(z)}{\mathrm{d}z}\\&=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu\pi}\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu-\mu+1)}\frac{1}{1-z^2}.\end{aligned}\tag{9.12}$$

9.1.4 $\left.\dfrac{\partial\mathrm{P}_\nu(x)}{\partial\nu}\right|_{\nu=0}$ 的计算

根据定义

$$\mathrm{P}_\nu(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\,k!}\frac{\Gamma(\nu+k+1)}{\Gamma(\nu-k+1)}\left(\frac{x-1}{2}\right)^k,\tag{9.13}$$

所以

$$\frac{\partial\mathrm{P}_\nu(x)}{\partial\nu}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!\,k!}\frac{\Gamma(\nu+k+1)}{\Gamma(\nu-k+1)}\left[\psi(\nu+k+1)-\psi(\nu-k+1)\right]\left(\frac{x-1}{2}\right)^k,$$

$$\left.\frac{\partial\mathrm{P}_\nu(x)}{\partial\nu}\right|_{\nu=0}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\left.\frac{\psi(\nu+k+1)-\psi(\nu-k+1)}{\Gamma(\nu-k+1)}\right|_{\nu=0}\left(\frac{x-1}{2}\right)^k.$$

下面就来计算 $\left.\dfrac{\psi(\nu+k+1)-\psi(\nu-k+1)}{\Gamma(\nu-k+1)}\right|_{\nu=0}$ 的值. 注意 $\psi(\nu+k+1)$ 在 $\nu=0$ 处解析，而 $\psi(\nu-k+1)$ 与 $\Gamma(\nu-k+1)$ 均以 $\nu=0$ 为一阶极点，留数分别为 -1 与 $\dfrac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}$:

$$\psi(\nu+k+1)=\psi(k+1)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\psi^{(n)}(k+1)\nu^n,$$

$$\psi(\nu-k+1)=-\frac{1}{\nu}+\psi(k)-\sum_{n=1}^{\infty}\zeta(n+1,k)\nu^n+2\sum_{n=1}^{\infty}\zeta(2n)\nu^{2n-1},$$

$$\Gamma(\nu-k+1)=\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}\left\{\frac{1}{\nu}+\psi(k)+\left[\frac{\psi^2(n)-\psi'(n)}{2}+\zeta(2)\right]\nu+\cdots\right\}$$

(以上结果均可见笔者编著的《数学物理方法专题 —— 复变函数与积分变换》(北京大学出版社) 一书的第十章)，所以

$$\left.\frac{\psi(\nu+k+1)-\psi(\nu-k+1)}{\Gamma(\nu-k+1)}\right|_{\nu=0}=(-1)^{k-1}(k-1)!.$$

由此即得

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial \mathrm{P}_\nu(x)}{\partial\nu}\right|_{\nu=0}&=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{k!}\left(\frac{x-1}{2}\right)^k=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\left(\frac{x-1}{2}\right)^k\\&=\ln\left(1+\frac{x-1}{2}\right)=\ln\frac{x+1}{2}\end{aligned}\tag{9.14a}$$

或

$$\left.\frac{\partial \mathrm{P}_\nu(\cos\theta)}{\partial\nu}\right|_{\nu=0}=2\ln\cos\frac{\theta}{2}.\tag{9.14b}$$

类似地还能得到

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial \mathrm{P}_\nu(x)}{\partial\nu}\right|_{\nu=1}&=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!\,k!}\left\{\frac{\Gamma(\nu+k+1)}{\Gamma(\nu-k+1)}\left[\psi(\nu+k+1)-\psi(\nu-k+1)\right]\right\}_{\nu=1}\left(\frac{x-1}{2}\right)^k\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k+1}{k!}\left.\frac{\psi(\nu+k+1)-\psi(\nu-k+1)}{\Gamma(\nu-k+1)}\right|_{\nu=1}\left(\frac{x-1}{2}\right)^k\\&=2\cdot\frac{\psi(3)-\psi(1)}{\Gamma(1)}\cdot\frac{x-1}{2}\\&\quad+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k+1}{k!}\left.\frac{\psi(\nu+k+1)-\psi(\nu-k+1)}{\Gamma(\nu-k+1)}\right|_{\nu=1}\left(\frac{x-1}{2}\right)^k.\end{aligned}$$

在此级数中，$\nu=1$ 仍然是系数分子和分母的一阶极点，于是

$$\left.\frac{\psi(\nu+k+1)-\psi(\nu-k+1)}{\Gamma(\nu-k+1)}\right|_{\nu=1}=(-1)^{k-2}(k-2)!,$$

所以

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial \mathrm{P}_\nu(x)}{\partial\nu}\right|_{\nu=1}&=\frac{3(x-1)}{2}+\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\frac{k+1}{k(k-1)}\left(\frac{x-1}{2}\right)^k\\&=\frac{3(x-1)}{2}+\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{2}{k-1}-\frac{1}{k}\right)\left(\frac{x-1}{2}\right)^k\\&=\frac{3(x-1)}{2}+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\left(\frac{x-1}{2}\right)^{k+1}+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\left(\frac{x-1}{2}\right)^k\end{aligned}$$

$$= \frac{3(x-1)}{2} + (x-1)\ln\frac{x+1}{2} + \left(\ln\frac{x+1}{2} - \frac{x-1}{2}\right)$$
$$= x - 1 + x\ln\frac{1+x}{2}, \tag{9.15a}$$

或者写成

$$\left.\frac{\partial \mathrm{P}_\nu(\cos\theta)}{\partial\nu}\right|_{\nu=1} = 2\cos\theta\ln\cos\frac{\theta}{2} - 2\sin^2\frac{\theta}{2}. \tag{9.15b}$$

事实上，此结果还可以直接由递推关系

$$(1-x^2)\frac{\partial \mathrm{P}_\nu(x)}{\partial x} = (\nu+1)\left[x\,\mathrm{P}_\nu(x) - \mathrm{P}_{\nu+1}(x)\right]$$

对 ν 求导而得到：

$$(1-x^2)\frac{\partial^2 \mathrm{P}_\nu(x)}{\partial\nu\partial x} = \left[x\,\mathrm{P}_\nu(x) - \mathrm{P}_{\nu+1}(x)\right] + (\nu+1)\left[x\frac{\partial \mathrm{P}_\nu(x)}{\partial\nu} - \frac{\partial \mathrm{P}_{\nu+1}(x)}{\partial\nu}\right],$$

代入 $\nu=0$ 就有

$$(1-x^2)\left.\frac{\partial^2 \mathrm{P}_\nu(x)}{\partial\nu\partial x}\right|_{\nu=0} = x\left.\frac{\partial \mathrm{P}_\nu(x)}{\partial\nu}\right|_{\nu=0} - \left.\frac{\partial \mathrm{P}_{\nu+1}(x)}{\partial\nu}\right|_{\nu=0},$$

因此

$$\left.\frac{\partial \mathrm{P}_\nu(x)}{\partial\nu}\right|_{\nu=1} = \left.\frac{\partial \mathrm{P}_{\nu+1}(x)}{\partial\nu}\right|_{\nu=0} = x\left.\frac{\partial \mathrm{P}_\nu(x)}{\partial\nu}\right|_{\nu=0} - (1-x^2)\left.\frac{\partial^2 \mathrm{P}_\nu(x)}{\partial\nu\partial x}\right|_{\nu=0}$$
$$= x\left.\frac{\partial \mathrm{P}_\nu(x)}{\partial\nu}\right|_{\nu=0} - (1-x^2)\frac{\partial}{\partial x}\left.\frac{\partial \mathrm{P}_\nu(x)}{\partial\nu}\right|_{\nu=0},$$

再将 (9.14a) 式的结果代入即可.

§9.2 由 Wroński 行列式导出的恒等式

上面给出了两类 Legendre 函数或连带 Legendre 函数之间的 Wroński 行列式. 由此出发，结合 Legendre 函数或连带 Legendre 函数的递推关系，可以进一步导出许多恒等式. 例如，在 (9.6) 式中代入递推关系

$$(\nu+1)\mathrm{P}_\nu(x) = \mathrm{P}'_{\nu+1}(x) - x\mathrm{P}'_\nu(x), \tag{9.16a}$$
$$(\nu+1)\mathrm{Q}_\nu(x) = \mathrm{Q}'_{\nu+1}(x) - x\mathrm{Q}'_\nu(x), \tag{9.16b}$$

就能得到

$$\frac{1}{\nu+1}\left\{\left[\mathrm{P}'_{\nu+1}(x) - x\mathrm{P}'_\nu(x)\right]\mathrm{Q}'_\nu(x) - \mathrm{P}'_\nu(x)\left[\mathrm{Q}'_{\nu+1}(x) - x\mathrm{Q}'_\nu(x)\right]\right\} = \frac{1}{1-x^2},$$

亦即

$$\mathrm{P}'_{\nu+1}(x)\mathrm{Q}'_{\nu}(x)-\mathrm{P}'_{\nu}(x)\mathrm{Q}'_{\nu+1}(x)=\frac{\nu+1}{1-x^2}. \tag{9.17}$$

如果在 (9.6) 式中代入

$$(1-x^2)\mathrm{P}'_{\nu}(x)=\nu\big[x\mathrm{P}_{\nu}(x)-\mathrm{P}_{\nu-1}(x)\big], \tag{9.18a}$$

$$(1-x^2)\mathrm{Q}'_{\nu}(x)=\nu\big[x\mathrm{Q}_{\nu}(x)-\mathrm{Q}_{\nu-1}(x)\big], \tag{9.18b}$$

则又能得到

$$\frac{\nu}{1-x^2}\Big\{\mathrm{P}_{\nu}(x)\big[x\mathrm{Q}_{\nu}(x)-\mathrm{Q}_{\nu-1}(x)\big]-\big[x\mathrm{P}_{\nu}(x)-\mathrm{P}_{\nu-1}(x)\big]\mathrm{Q}_{\nu}(x)\Big\}=\frac{1}{1-x^2},$$

所以

$$\mathrm{P}_{\nu+1}(x)\mathrm{Q}_{\nu}(x)-\mathrm{P}_{\nu}(x)\mathrm{Q}_{\nu+1}(x)=\frac{1}{\nu+1}. \tag{9.19}$$

再进一步，利用递推关系

$$(2\nu+1)x\mathrm{P}_{\nu}(x)=(\nu+1)\mathrm{P}_{\nu+1}(x)+\nu\mathrm{P}_{\nu-1}(x), \tag{9.20a}$$

$$(2\nu+1)x\mathrm{Q}_{\nu}(x)=(\nu+1)\mathrm{Q}_{\nu+1}(x)+\nu\mathrm{Q}_{\nu-1}(x), \tag{9.20b}$$

消去 (9.19) 式中的 $\mathrm{P}_{\nu}(x)$ 及 $\mathrm{Q}_{\nu}(x)$，则能导出

$$\mathrm{P}_{\nu+1}(x)\mathrm{Q}_{\nu-1}(x)-\mathrm{P}_{\nu-1}(x)\mathrm{Q}_{\nu+1}(x)=\frac{2\nu+1}{\nu(\nu+1)}x. \tag{9.21}$$

又，将 (9.19) 式与 (9.5) 式联立，消去第二类 Legendre 函数，则可得到

$$\mathrm{P}_{\nu}(x)\mathrm{P}_{\nu+1}(-x)+\mathrm{P}_{\nu}(-x)\mathrm{P}_{\nu+1}(x)=-\frac{2}{\pi}\,\frac{\sin\nu\pi}{\nu+1}. \tag{9.22}$$

再利用 $\mathrm{P}_{\nu}(x)$ 与 $\mathrm{P}_{\nu\pm1}(x)$ 之间的递推关系，又可进一步化为

$$\mathrm{P}_{\nu+1}(x)\mathrm{P}_{\nu-1}(-x)-\mathrm{P}_{\nu+1}(-x)\mathrm{P}_{\nu-1}(x)=\frac{2x}{\pi}\,\frac{2\nu+1}{\nu(\nu+1)}\sin\nu\pi. \tag{9.23}$$

反过来，如果将 (9.19) 式与

$$-\frac{\pi}{2}\sin\nu\pi\,\mathrm{P}_{\nu}(x)=\cos\nu\pi\,\mathrm{Q}_{\nu}(x)+\mathrm{Q}_{\nu}(-x) \tag{9.24}$$

联立，消去第一类 Legendre 函数，则可得到

$$\mathrm{Q}_{\nu}(x)\mathrm{Q}_{\nu+1}(-x)+\mathrm{Q}_{\nu}(-x)\mathrm{Q}_{\nu+1}(x)=\frac{\pi}{2}\,\frac{\sin\nu\pi}{\nu+1}. \tag{9.25}$$

再利用 $\mathrm{Q}_{\nu}(x)$ 与 $\mathrm{Q}_{\nu\pm1}(x)$ 之间的递推关系，又可进一步化为

$$Q_{\nu+1}(x)Q_{\nu-1}(-x) - Q_{\nu+1}(-x)Q_{\nu-1}(x) = -\frac{\pi x}{2}\frac{2\nu+1}{\nu(\nu+1)}\sin\nu\pi. \tag{9.26}$$

同样，从连带 Legendre 函数的 Wroński 行列式 (9.11) 出发，再利用递推关系

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{dP}_\nu^\mu(x)}{\mathrm{d}x} = -\nu x \mathrm{P}_\nu^\mu(x) + (\nu+\mu)\mathrm{P}_{\nu-1}^\mu(x) \tag{9.27a}$$

$$= -\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{P}_\nu^{\mu+1}(x) - \mu x \mathrm{P}_\nu^\mu(x), \tag{9.27b}$$

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{dQ}_\nu^\mu(x)}{\mathrm{d}x} = -\nu x \mathrm{Q}_\nu^\mu(x) + (\nu+\mu)\mathrm{Q}_{\nu-1}^\mu(x) \tag{9.28a}$$

$$= -\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{Q}_\nu^{\mu+1}(x) - \mu x \mathrm{Q}_\nu^\mu(x), \tag{9.28b}$$

还可以得到另外两个恒等式

$$\mathrm{P}_\nu^\mu(x)\,\mathrm{Q}_{\nu-1}^\mu(x) - \mathrm{P}_{\nu-1}^\mu(x)\,\mathrm{Q}_\nu^\mu(x) = \frac{\Gamma(\nu+\mu)}{\Gamma(\nu-\mu+1)}, \tag{9.29}$$

$$\mathrm{P}_\nu^\mu(x)\,\mathrm{Q}_\nu^{\mu+1}(x) - \mathrm{P}_\nu^{\mu+1}(x)\,\mathrm{Q}_\nu^\mu(x) = -\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu-\mu+1)}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{9.30}$$

从 (9.29) 或 (9.30) 式出发，代入关于 $\mathrm{P}_\nu^\mu(x)$ 与 $\mathrm{Q}_\nu^\mu(x)$ 的各个递推关系式，可以进一步推出下列恒等式：

$$\mathrm{P}_\nu^{\mu+1}(x)\,\mathrm{Q}_\nu^{\mu-1}(x) - \mathrm{P}_\nu^{\mu-1}(x)\,\mathrm{Q}_\nu^{\mu+1}(x) = -\frac{\Gamma(\nu+\mu)}{\Gamma(\nu-\mu+2)}\frac{2\mu x}{1-x^2}, \tag{9.31}$$

$$\mathrm{P}_\nu^{\mu+1}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu-1}^\mu(x) - \mathrm{P}_{\nu-1}^\mu(x)\,\mathrm{Q}_\nu^{\mu+1}(x) = \frac{\Gamma(\nu+\mu)}{\Gamma(\nu-\mu)}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \tag{9.32}$$

$$\mathrm{P}_{\nu+1}^\mu(x)\,\mathrm{Q}_{\nu-1}^\mu(x) - \mathrm{P}_{\nu-1}^\mu(x)\,\mathrm{Q}_{\nu+1}^\mu(x) = \frac{(2\nu+1)\Gamma(\nu+\mu)}{\Gamma(\nu-\mu+2)}x, \tag{9.33}$$

$$\mathrm{P}_\nu^{\mu-1}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu-1}^\mu(x) - \mathrm{P}_{\nu-1}^\mu(x)\,\mathrm{Q}_\nu^{\mu-1}(x) = -\frac{\Gamma(\nu+\mu)}{\Gamma(\nu-\mu+2)}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \tag{9.34}$$

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}_{\nu-1}^{\mu+1}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu+1}^\mu(x) - \mathrm{P}_{\nu+1}^\mu(x)\,\mathrm{Q}_{\nu-1}^{\mu+1}(x)\\ &\quad= -\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu-\mu+2)}\left[(2\nu+1)\sqrt{1-x^2} - \frac{\nu+\mu+1}{\sqrt{1-x^2}}\right],\end{aligned} \tag{9.35}$$

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}_{\nu-1}^\mu(x)\,\mathrm{Q}_{\nu+1}^{\mu+1}(x) - \mathrm{P}_{\nu+1}^{\mu+1}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu-1}^\mu(x)\\ &\quad= \frac{\Gamma(\nu+\mu)}{\Gamma(\nu-\mu+1)}\left[(2\nu+1)\sqrt{1-x^2} - \frac{\nu-\mu}{\sqrt{1-x^2}}\right],\end{aligned} \tag{9.36}$$

$$\mathrm{P}_\nu^{\mu-1}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu+1}^{\mu+1}(x) - \mathrm{P}_{\nu+1}^{\mu+1}(x)\,\mathrm{Q}_\nu^{\mu-1}(x) = \frac{\Gamma(\nu+\mu)}{\Gamma(\nu-\mu+2)}\left[(\nu-\mu+1) + \frac{2\mu}{1-x^2}\right], \tag{9.37}$$

$$\mathrm{P}_\nu^{\mu-1}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu-1}^{\mu+1}(x) - \mathrm{P}_{\nu-1}^{\mu+1}(x)\,\mathrm{Q}_\nu^{\mu-1}(x) = -\frac{\Gamma(\nu+\mu)}{\Gamma(\nu-\mu+2)}\left[(\nu+\mu) - \frac{2\mu}{1-x^2}\right]. \tag{9.38}$$

如果利用 $\mathrm{Q}_\nu^\mu(x)$与 $\mathrm{P}_\nu^\mu(\pm x)$ 之间的关系式

$$\frac{2}{\pi}\sin(\nu+\mu)\pi\cdot \mathrm{Q}_\nu^\mu(x)=\cos(\nu+\mu)\pi\cdot \mathrm{P}_\nu^\mu(x)-\mathrm{P}_\nu^\mu(-x) \tag{9.39}$$

化去 (9.29) 与 (9.30) 式中的第二类连带 Legendre 函数，我们又能得到

$$\mathrm{P}_\nu^\mu(x)\,\mathrm{P}_{\nu-1}^\mu(-x)+\mathrm{P}_\nu^\mu(-x)\,\mathrm{P}_{\nu-1}^\mu(x)=\frac{2}{\pi}\frac{(2\nu+1)\Gamma(\nu+\mu)}{\Gamma(\nu-\mu+1)}\sin(\nu+\mu)\pi, \tag{9.40}$$

$$\mathrm{P}_\nu^\mu(x)\,\mathrm{P}_\nu^{\mu+1}(-x)+\mathrm{P}_\nu^\mu(-x)\,\mathrm{P}_\nu^{\mu+1}(x)=-\frac{2}{\pi}\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu-\mu+1)}\frac{\sin(\nu+\mu)\pi}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{9.41}$$

从此二式出发，代入关于 $\mathrm{P}_\nu^\mu(x)$ 的各个递推关系式，可以推出下列等式：

$$\mathrm{P}_{\nu+1}^\mu(x)\,\mathrm{P}_{\nu-1}^\mu(-x)-\mathrm{P}_{\nu-1}^\mu(x)\,\mathrm{P}_{\nu+1}^\mu(-x)=\frac{2x}{\pi}\frac{(2\nu+1)\Gamma(\nu+\mu)}{\Gamma(\nu-\mu+2)}\sin(\nu+\mu)\pi, \tag{9.42}$$

$$\mathrm{P}_\nu^{\mu-1}(x)\,\mathrm{P}_\nu^{\mu+1}(-x)-\mathrm{P}_\nu^{\mu+1}(x)\,\mathrm{P}_\nu^{\mu-1}(-x)=\frac{4\mu}{\pi}\frac{\Gamma(\nu+\mu)}{\Gamma(\nu-\mu+2)}\frac{x}{1-x^2}\sin(\nu+\mu)\pi, \tag{9.43}$$

$$\mathrm{P}_\nu^{\mu-1}(x)\,\mathrm{P}_{\nu-1}^\mu(-x)-\mathrm{P}_{\nu-1}^\mu(x)\,\mathrm{P}_\nu^{\mu-1}(-x)=-\frac{2}{\pi}\frac{\Gamma(\nu+\mu)}{\Gamma(\nu-\mu+2)}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\sin(\nu+\mu)\pi, \tag{9.44}$$

$$\mathrm{P}_\nu^{\mu+1}(x)\,\mathrm{P}_{\nu-1}^\mu(-x)-\mathrm{P}_{\nu-1}^\mu(x)\,\mathrm{P}_\nu^{\mu+1}(-x)=\frac{2}{\pi}\frac{\Gamma(\nu+\mu)}{\Gamma(\nu-\mu)}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\sin(\nu+\mu)\pi, \tag{9.45}$$

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}_{\nu+1}^\mu(x)\,\mathrm{P}_{\nu-1}^{\mu+1}(-x)+\mathrm{P}_{\nu-1}^{\mu+1}(x)\,\mathrm{P}_{\nu+1}^\mu(-x)\\&\quad=-\frac{2}{\pi}\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu-\mu+2)}\sin(\nu+\mu)\pi\left[(2\nu+1)\sqrt{1-x^2}-\frac{\nu+\mu+1}{\sqrt{1-x^2}}\right],\end{aligned} \tag{9.46}$$

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}_{\nu+1}^{\mu+1}(x)\,\mathrm{P}_{\nu-1}^\mu(-x)+\mathrm{P}_{\nu-1}^\mu(x)\,\mathrm{P}_{\nu+1}^{\mu+1}(-x)\\&\quad=-\frac{2}{\pi}\frac{\Gamma(\nu+\mu)}{\Gamma(\nu-\mu+1)}\sin(\nu+\mu)\pi\left[(2\nu+1)\sqrt{1-x^2}-\frac{\nu-\mu}{\sqrt{1-x^2}}\right],\end{aligned} \tag{9.47}$$

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}_\nu^{\mu-1}(x)\,\mathrm{P}_{\nu+1}^{\mu+1}(-x)+\mathrm{P}_{\nu+1}^{\mu+1}(x)\,\mathrm{P}_\nu^{\mu-1}(-x)\\&\quad=-\frac{2}{\pi}\frac{\Gamma(\nu+\mu)}{\Gamma(\nu-\mu+2)}\sin(\nu+\mu)\pi\left[(\nu-\mu+1)+\frac{2\mu}{1-x^2}\right],\end{aligned} \tag{9.48}$$

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}_\nu^{\mu-1}(x)\,\mathrm{P}_{\nu-1}^{\mu+1}(-x)+\mathrm{P}_{\nu-1}^{\mu+1}(x)\,\mathrm{P}_\nu^{\mu-1}(-x)\\&\quad=\frac{2}{\pi}\frac{\Gamma(\nu+\mu)}{\Gamma(\nu-\mu+2)}\sin(\nu+\mu)\pi\left[(\nu+\mu)-\frac{2\mu}{1-x^2}\right].\end{aligned} \tag{9.49}$$

同样，如果利用

$$\frac{\pi}{2}\sin(\nu+\mu)\pi\,\mathrm{P}_\nu^\mu(x)=-\cos(\nu+\mu)\pi\,\mathrm{Q}_\nu^\mu(x)-\mathrm{Q}_\nu^\mu(-x) \tag{9.50}$$

化去 (9.29) 与 (9.30) 式中的第一类连带 Legendre 函数，则能得到

$$\mathrm{Q}_{\nu-1}^\mu(x)\mathrm{Q}_\nu^\mu(-x)+\mathrm{Q}_{\nu-1}^\mu(-x)\mathrm{Q}_\nu^\mu(x)=-\frac{\pi}{2}\frac{\Gamma(\nu+\mu)}{\Gamma(\nu-\mu+1)}\sin(\nu+\mu)\pi, \tag{9.51}$$

$$Q_\nu^\mu(x)Q_\nu^{\mu+1}(-x)+Q_\nu^\mu(-x)Q_\nu^{\mu+1}(x)=\frac{\pi}{2}\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu-\mu+1)}\frac{\sin(\nu+\mu)\pi}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{9.52}$$

再从此二式出发，代入关于 $Q_\nu^\mu(x)$ 的各个递推关系式，又可以推出下列恒等式：

$$Q_{\nu-1}^\mu(x)Q_{\nu+1}^\mu(-x)-Q_{\nu-1}^\mu(-x)Q_{\nu+1}^\mu(x)=\frac{\pi x}{2}\frac{(2\nu+1)\Gamma(\nu+\mu)}{\Gamma(\nu-\mu+2)}\sin(\nu+\mu)\pi, \tag{9.53}$$

$$Q_\nu^{\mu-1}(x)Q_\nu^{\mu+1}(-x)-Q_\nu^{\mu-1}(-x)Q_\nu^{\mu+1}(x)=-\mu\pi\frac{\Gamma(\nu+\mu)}{\Gamma(\nu-\mu+2)}\frac{x}{1-x^2}\sin(\nu+\mu)\pi, \tag{9.54}$$

$$Q_\nu^{\mu-1}(x)Q_{\nu-1}^\mu(-x)-Q_{\nu-1}^\mu(x)Q_\nu^{\mu-1}(-x)=\frac{\pi}{2}\frac{\Gamma(\nu+\mu)}{\Gamma(\nu-\mu+2)}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\sin(\nu+\mu)\pi, \tag{9.55}$$

$$Q_\nu^{\mu+1}(x)Q_{\nu-1}^\mu(-x)-Q_{\nu-1}^\mu(x)Q_\nu^{\mu+1}(-x)=-\frac{\pi}{2}\frac{\Gamma(\nu+\mu)}{\Gamma(\nu-\mu)}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\sin(\nu+\mu)\pi, \tag{9.56}$$

$$\begin{aligned}&Q_{\nu+1}^\mu(x)Q_{\nu-1}^{\mu+1}(-x)+Q_{\nu-1}^{\mu+1}(x)Q_{\nu+1}^\mu(-x)\\&\quad=\frac{\pi}{2}\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu-\mu+2)}\sin(\nu+\mu)\pi\left[(2\nu+1)\sqrt{1-x^2}-\frac{\nu+\mu+1}{\sqrt{1-x^2}}\right],\end{aligned} \tag{9.57}$$

$$\begin{aligned}&Q_{\nu+1}^{\mu+1}(x)Q_{\nu-1}^\mu(-x)+Q_{\nu-1}^\mu(x)Q_{\nu+1}^{\mu+1}(-x)\\&\quad=\frac{\pi}{2}\frac{\Gamma(\nu+\mu)}{\Gamma(\nu-\mu+1)}\sin(\nu+\mu)\pi\left[(2\nu+1)\sqrt{1-x^2}-\frac{\nu-\mu}{\sqrt{1-x^2}}\right],\end{aligned} \tag{9.58}$$

$$\begin{aligned}&Q_\nu^{\mu-1}(x)Q_{\nu+1}^{\mu+1}(-x)+Q_{\nu+1}^{\mu+1}(x)Q_\nu^{\mu-1}(-x)\\&\quad=\frac{\pi}{2}\frac{\Gamma(\nu+\mu)}{\Gamma(\nu-\mu+1)}\sin(\nu+\mu)\pi\left[(\nu-\mu+1)+\frac{2\mu}{1-x^2}\right],\end{aligned} \tag{9.59}$$

$$\begin{aligned}&Q_\nu^{\mu-1}(x)Q_{\nu-1}^{\mu+1}(-x)+Q_{\nu-1}^{\mu+1}(x)Q_\nu^{\mu-1}(-x)\\&\quad=-\frac{\pi}{2}\frac{\Gamma(\nu+\mu)}{\Gamma(\nu-\mu+2)}\sin(\nu+\mu)\pi\left[(\nu+\mu)-\frac{2\mu}{1-x^2}\right].\end{aligned} \tag{9.60}$$

同样可以写出 $P_\nu^\mu(z)$, $Q_\nu^\mu(z)$ 的类似恒等式. 这时需要从 (9.12) 式出发，再利用 $P_\nu^\mu(z)$ 与 $Q_\nu^\mu(z)$的递推关系：

$$(z^2-1)\frac{dP_\nu^\mu(z)}{dz}=\nu zP_\nu^\mu(z)-(\nu+\mu)P_{\nu-1}^\mu(z) \tag{9.61a}$$

$$=\sqrt{z^2-1}P_\nu^{\mu+1}(z)+\mu zP_\nu^\mu(z), \tag{9.61b}$$

$$(z^2-1)\frac{dQ_\nu^\mu(z)}{dz}=\nu zQ_\nu^\mu(z)-(\nu+\mu)Q_{\nu-1}^\mu(z) \tag{9.62a}$$

$$=\sqrt{z^2-1}Q_\nu^{\mu+1}(z)+\mu zQ_\nu^\mu(z), \tag{9.62b}$$

则将得到

$$\mathrm{P}_\nu^\mu(z)\,\mathrm{Q}_{\nu-1}^\mu(z)-\mathrm{P}_{\nu-1}^\mu(z)\,\mathrm{Q}_\nu^\mu(z)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu\pi}\frac{\Gamma(\nu+\mu)}{\Gamma(\nu-\mu+1)},\tag{9.63}$$

$$\mathrm{P}_\nu^\mu(z)\,\mathrm{Q}_\nu^{\mu+1}(z)-\mathrm{P}_\nu^{\mu+1}(z)\,\mathrm{Q}_\nu^\mu(z)=-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu\pi}\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu-\mu+1)}\frac{1}{\sqrt{z^2-1}}.\tag{9.64}$$

再结合 $\mathrm{P}_\nu^\mu(z)$，$\mathrm{Q}_\nu^\mu(z)$ 的递推关系 (它们与 $\mathrm{P}_\nu^\mu(x)$，$\mathrm{Q}_\nu^\mu(x)$ 的递推关系形式不完全相同)，进而又可以导出下列恒等式：

$$\mathrm{P}_{\nu+1}^\mu(z)\,\mathrm{Q}_{\nu-1}^\mu(z)-\mathrm{P}_{\nu-1}^\mu(z)\,\mathrm{Q}_{\nu+1}^\mu(z)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu\pi}\frac{(2\nu+1)\Gamma(\nu+\mu)}{\Gamma(\nu-\mu+2)}\,z,\tag{9.65}$$

$$\mathrm{P}_\nu^{\mu+1}(z)\,\mathrm{Q}_\nu^{\mu-1}(z)-\mathrm{P}_\nu^{\mu-1}(z)\,\mathrm{Q}_\nu^{\mu+1}(z)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu\pi}\frac{\Gamma(\nu+\mu)}{\Gamma(\nu-\mu+2)}\frac{2\mu z}{z^2-1},\tag{9.66}$$

$$\mathrm{P}_\nu^{\mu-1}(z)\,\mathrm{Q}_{\nu-1}^\mu(z)-\mathrm{P}_{\nu-1}^\mu(z)\,\mathrm{Q}_\nu^{\mu-1}(z)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu\pi}\frac{\Gamma(\nu+\mu)}{\Gamma(\nu-\mu+2)}\frac{z}{\sqrt{z^2-1}},\tag{9.67}$$

$$\mathrm{P}_\nu^{\mu+1}(z)\,\mathrm{Q}_{\nu-1}^\mu(z)-\mathrm{P}_{\nu-1}^\mu(z)\,\mathrm{Q}_\nu^{\mu+1}(z)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu\pi}\frac{\Gamma(\nu+\mu)}{\Gamma(\nu-\mu)}\frac{z}{\sqrt{z^2-1}},\tag{9.68}$$

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}_{\nu-1}^{\mu+1}(z)\,\mathrm{Q}_{\nu+1}^\mu(z)-\mathrm{P}_{\nu+1}^\mu(z)\,\mathrm{Q}_{\nu-1}^{\mu+1}(z)\\&\quad=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu\pi}\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu-\mu+2)}\left[(2\nu+1)\sqrt{z^2-1}-\frac{\nu+\mu+1}{\sqrt{z^2-1}}\right],\end{aligned}\tag{9.69}$$

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}_{\nu-1}^\mu(z)\,\mathrm{Q}_{\nu+1}^{\mu+1}(z)-\mathrm{P}_{\nu+1}^{\mu+1}(z)\,\mathrm{Q}_{\nu-1}^\mu(z)\\&\quad=-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu\pi}\frac{\Gamma(\nu+\mu)}{\Gamma(\nu-\mu+1)}\left[(2\nu+1)\sqrt{z^2-1}-\frac{\nu-\mu}{\sqrt{z^2-1}}\right],\end{aligned}\tag{9.70}$$

$$\mathrm{P}_\nu^{\mu-1}(z)\,\mathrm{Q}_{\nu+1}^{\mu+1}(z)-\mathrm{P}_{\nu+1}^{\mu+1}(z)\,\mathrm{Q}_\nu^{\mu-1}(z)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu\pi}\frac{\Gamma(\nu+\mu)}{\Gamma(\nu-\mu+2)}\left[(\nu-\mu+1)-\frac{2\mu}{z^2-1}\right],\tag{9.71}$$

$$\mathrm{P}_\nu^{\mu-1}(z)\,\mathrm{Q}_{\nu-1}^{\mu+1}(z)-\mathrm{P}_{\nu-1}^{\mu+1}(z)\,\mathrm{Q}_\nu^{\mu-1}(z)=-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu\pi}\frac{\Gamma(\nu+\mu)}{\Gamma(\nu-\mu+2)}\left[(\nu+\mu)+\frac{2\mu}{z^2-1}\right].\tag{9.72}$$

为了消去 (9.63) 和 (9.64) 两式中的第二类连带 Legendre 函数，需要用到

$$\frac{2}{\pi}\sin(\nu+\mu)\pi\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu\pi}\mathrm{Q}_\nu^\mu(z)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu\pi\,\mathrm{Im}z}\,\mathrm{P}_\nu^\mu(z)-\mathrm{P}_\nu^\mu(-z),\tag{9.73}$$

这样就能导出

$$\mathrm{P}_\nu^\mu(z)\,\mathrm{P}_{\nu-1}^\mu(-z)+\mathrm{P}_{\nu-1}^\mu(z)\,\mathrm{P}_\nu^\mu(-z)=\frac{2}{\pi}\frac{\Gamma(\nu+\mu)}{\Gamma(\nu-\mu+1)}\sin(\nu+\mu)\pi,\tag{9.74}$$

$$\mathrm{P}_\nu^\mu(z)\,\mathrm{P}_\nu^{\mu+1}(-z)-\mathrm{P}_\nu^{\mu+1}(z)\,\mathrm{P}_\nu^\mu(-z)=\frac{2}{\pi}\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu-\mu+1)}\frac{\sin(\nu+\mu)\pi}{\sqrt{z^2-1}}.\tag{9.75}$$

再利用 $\mathrm{P}_\nu^\mu(z)$ 的递推关系①，就能导出

$$\mathrm{P}_{\nu+1}^\mu(z)\,\mathrm{P}_{\nu-1}^\mu(-z)-\mathrm{P}_{\nu-1}^\mu(z)\,\mathrm{P}_{\nu+1}^\mu(-z)=\frac{2}{\pi}\frac{(2\nu+1)\Gamma(\nu+\mu)}{\Gamma(\nu-\mu+2)}\,z\cdot\sin(\nu+\mu)\pi, \tag{9.76}$$

$$\mathrm{P}_\nu^{\mu+1}(z)\,\mathrm{P}_\nu^{\mu-1}(-z)-\mathrm{P}_\nu^{\mu-1}(z)\,\mathrm{P}_\nu^{\mu+1}(-z)=\frac{2}{\pi}\frac{\Gamma(\nu+\mu)}{\Gamma(\nu-\mu+2)}\frac{2\mu z}{z^2-1}\sin(\nu+\mu)\pi, \tag{9.77}$$

$$\mathrm{P}_\nu^{\mu-1}(z)\,\mathrm{P}_{\nu-1}^\mu(-z)+\mathrm{P}_{\nu-1}^\mu(z)\,\mathrm{P}_\nu^{\mu-1}(-z)=\frac{2}{\pi}\frac{\Gamma(\nu+\mu)}{\Gamma(\nu-\mu+2)}\frac{z}{\sqrt{z^2-1}}\sin(\nu+\mu)\pi, \tag{9.78}$$

$$\mathrm{P}_\nu^{\mu+1}(z)\,\mathrm{P}_{\nu-1}^\mu(-z)+\mathrm{P}_{\nu-1}^\mu(z)\,\mathrm{P}_\nu^{\mu+1}(-z)=\frac{2}{\pi}\frac{\Gamma(\nu+\mu)}{\Gamma(\nu-\mu)}\frac{z}{\sqrt{z^2-1}}\sin(\nu+\mu)\pi, \tag{9.79}$$

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}_{\nu-1}^{\mu+1}(z)\,\mathrm{P}_{\nu+1}^\mu(-z)-\mathrm{P}_{\nu+1}^\mu(z)\,\mathrm{P}_{\nu-1}^{\mu+1}(-z)\\&\quad=\frac{2}{\pi}\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu-\mu+2)}\left[(2\nu+1)\sqrt{z^2-1}+\frac{\nu+\mu+1}{\sqrt{z^2-1}}\right]\sin(\nu+\mu)\pi,\end{aligned} \tag{9.80}$$

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}_{\nu-1}^\mu(z)\,\mathrm{P}_{\nu+1}^{\mu+1}(-z)-\mathrm{P}_{\nu+1}^{\mu+1}(z)\,\mathrm{P}_{\nu-1}^\mu(-z)\\&\quad=-\frac{2}{\pi}\frac{\Gamma(\nu+\mu)}{\Gamma(\nu-\mu+1)}\left[(2\nu+1)\sqrt{z^2-1}+\frac{\nu-\mu}{\sqrt{z^2-1}}\right]\sin(\nu+\mu)\pi,\end{aligned} \tag{9.81}$$

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}_\nu^{\mu-1}(z)\,\mathrm{P}_{\nu+1}^{\mu+1}(-z)+\mathrm{P}_{\nu+1}^{\mu+1}(z)\,\mathrm{P}_\nu^{\mu-1}(-z)\\&\quad=\frac{2}{\pi}\frac{\Gamma(\nu+\mu)}{\Gamma(\nu-\mu+2)}\left[(\nu-\mu+1)-\frac{2\mu}{z^2-1}\right]\sin(\nu+\mu)\pi,\end{aligned} \tag{9.82}$$

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}_\nu^{\mu-1}(z)\,\mathrm{P}_{\nu-1}^{\mu+1}(-z)+\mathrm{P}_{\nu-1}^{\mu+1}(z)\,\mathrm{P}_\nu^{\mu-1}(-z)\\&\quad=\frac{2}{\pi}\frac{\Gamma(\nu+\mu)}{\Gamma(\nu-\mu+2)}\left[(\nu+\mu)+\frac{2\mu}{z^2-1}\right]\sin(\nu+\mu)\pi.\end{aligned} \tag{9.83}$$

也可以利用

$$\pi\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu\pi}\cos\nu\pi\,\mathrm{P}_\nu^\mu(z)=\sin(\nu+\mu)\pi\,\mathrm{Q}_\nu^\mu(z)-\sin(\nu-\mu)\pi\,\mathrm{Q}_{-\nu-1}^\mu(z) \tag{9.84}$$

以消去 (9.63) 与 (9.64) 两式中的第一类连带 Legendre 函数，从而得到

$$\mathrm{Q}_\nu^\mu(z)\mathrm{Q}_{-\nu}^\mu(z)-\mathrm{Q}_{\nu-1}^\mu(z)\mathrm{Q}_{-\nu-1}^\mu(z)=\pi\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\mu\pi}\frac{\cos\nu\pi}{\sin(\nu-\mu)\pi}\frac{\Gamma(\nu+\mu)}{\Gamma(\nu-\mu+1)}, \tag{9.85}$$

$$\mathrm{Q}_\nu^\mu(z)\mathrm{Q}_{-\nu-1}^{\mu+1}(z)-\mathrm{Q}_\nu^{\mu+1}(z)\mathrm{Q}_{-\nu-1}^\mu(z)=-\pi\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\mu\pi}\frac{\cos\nu\pi}{\sin(\nu-\mu)\pi}\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu-\mu+1)}\frac{1}{\sqrt{z^2-1}}. \tag{9.86}$$

① 这里涉及将 $\mathrm{P}_\nu^\mu(z)$ 的递推关系变换为 $\mathrm{P}_\nu^\mu(-z)$ 的递推关系．需要注意，函数 $\mathrm{P}_\nu^\mu(z)$ 与 $\mathrm{Q}_\nu^\mu(z)$ 只是在由 $z=1$ 向左沿实轴割开的 z 平面上单值解析，因此，当 z 变换为 $-z$ 时，$\sqrt{z^2-1}$ 也需要变换为 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\cdot\mathrm{Im}z}\sqrt{z^2-1}=-\sqrt{z^2-1}$.

再进一步，由 (9.85) 与 (9.86) 两式又可以导出

$$Q_{\nu+1}^{\mu}(z)Q_{-\nu}^{\mu}(z)-Q_{\nu-1}^{\mu}(z)Q_{-\nu-2}^{\mu}(z)=\pi e^{i2\mu\pi}\frac{\cos\nu\pi}{\sin(\nu-\mu)\pi}\frac{\Gamma(\nu+\mu)}{\Gamma(\nu-\mu+2)}\cdot(2\nu+1)z, \tag{9.87}$$

$$Q_{\nu+1}^{\mu}(z)Q_{-\nu-1}^{\mu}(z)-Q_{\nu}^{\mu}(z)Q_{-\nu-2}^{\mu}(z)=\pi e^{i2\mu\pi}\frac{\cos\nu\pi}{\sin(\nu-\mu)\pi}\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu-\mu+2)}, \tag{9.88}$$

$$Q_{\nu}^{\mu+1}(z)Q_{-\nu}^{\mu}(z)-Q_{\nu-1}^{\mu}(z)Q_{-\nu-1}^{\mu+1}(z)=\pi e^{i2\mu\pi}\frac{\cos\nu\pi}{\sin(\nu-\mu)\pi}\frac{\Gamma(\nu+\mu)}{\Gamma(\nu-\mu)}\frac{z}{\sqrt{z^2-1}}, \tag{9.89}$$

$$Q_{\nu}^{\mu-1}(z)Q_{-\nu}^{\mu}(z)-Q_{\nu-1}^{\mu}(z)Q_{-\nu-1}^{\mu-1}(z)=\pi e^{i2\mu\pi}\frac{\cos\nu\pi}{\sin(\nu-\mu)\pi}\frac{\Gamma(\nu+\mu)}{\Gamma(\nu-\mu+2)}\frac{z}{\sqrt{z^2-1}}, \tag{9.90}$$

$$Q_{\nu-1}^{\mu+1}(z)Q_{-\nu}^{\mu}(z)-Q_{\nu-1}^{\mu}(z)Q_{-\nu}^{\mu+1}(z)=\pi e^{i2\mu\pi}\frac{\cos\nu\pi}{\sin(\nu-\mu)\pi}\frac{\Gamma(\nu+\mu)}{\Gamma(\nu-\mu)}\frac{1}{\sqrt{z^2-1}}, \tag{9.91}$$

$$Q_{\nu-1}^{\mu-1}(z)Q_{-\nu}^{\mu}(z)-Q_{\nu-1}^{\mu}(z)Q_{-\nu}^{\mu-1}(z)=\pi e^{i2\mu\pi}\frac{\cos\nu\pi}{\sin(\nu-\mu)\pi}\frac{\Gamma(\nu+\mu-1)}{\Gamma(\nu-\mu+1)}\frac{1}{\sqrt{z^2-1}}, \tag{9.92}$$

$$\begin{aligned}&Q_{\nu+1}^{\mu-1}(z)Q_{-\nu}^{\mu}(z)-Q_{\nu-1}^{\mu}(z)Q_{-\nu-2}^{\mu-1}(z)\\&\quad=\pi e^{i2\mu\pi}\frac{\cos\nu\pi}{\sin(\nu-\mu)\pi}\frac{\Gamma(\nu+\mu)}{\Gamma(\nu-\mu+3)}\left[(2\nu+1)\sqrt{z^2-1}+\frac{\nu+\mu}{\sqrt{z^2-1}}\right],\end{aligned} \tag{9.93}$$

$$\begin{aligned}&Q_{\nu+1}^{\mu+1}(z)Q_{-\nu}^{\mu}(z)-Q_{\nu-1}^{\mu}(z)Q_{-\nu-2}^{\mu+1}(z)\\&\quad=\pi e^{i2\mu\pi}\frac{\cos\nu\pi}{\sin(\nu-\mu)\pi}\frac{\Gamma(\nu+\mu)}{\Gamma(\nu-\mu+1)}\left[(2\nu+1)\sqrt{z^2-1}+\frac{\nu-\mu}{\sqrt{z^2-1}}\right],\end{aligned} \tag{9.94}$$

$$Q_{\nu+1}^{\mu}(z)Q_{-\nu-1}^{\mu+1}(z)-Q_{\nu}^{\mu+1}(z)Q_{-\nu-2}^{\mu}(z)=-\pi e^{i2\mu\pi}\frac{\cos\nu\pi}{\sin(\nu-\mu)\pi}\frac{\Gamma(\nu+\mu+2)}{\Gamma(\nu-\mu+2)}\frac{z}{\sqrt{z^2-1}}, \tag{9.95}$$

$$Q_{\nu}^{\mu-1}(z)Q_{-\nu-1}^{\mu+1}(z)-Q_{\nu}^{\mu+1}(z)Q_{-\nu-1}^{\mu-1}(z)=-\pi e^{i2\mu\pi}\frac{\cos\nu\pi}{\sin(\nu-\mu)\pi}\frac{\Gamma(\nu+\mu)}{\Gamma(\nu-\mu+2)}\frac{2\mu z}{z^2-1}, \tag{9.96}$$

$$\begin{aligned}&Q_{\nu-1}^{\mu-1}(z)Q_{-\nu-1}^{\mu+1}(z)-Q_{\nu}^{\mu+1}(z)Q_{-\nu}^{\mu-1}(z)\\&\quad=-\pi e^{i2\mu\pi}\frac{\cos\nu\pi}{\sin(\nu-\mu)\pi}\frac{\Gamma(\nu+\mu-1)}{\Gamma(\nu-\mu+1)}\left[(\nu-\mu)+\frac{2\mu}{z^2-1}\right],\end{aligned} \tag{9.97}$$

$$\begin{aligned}&Q_{\nu}^{\mu-1}(z)Q_{-\nu}^{\mu+1}(z)-Q_{\nu-1}^{\mu+1}(z)Q_{-\nu-1}^{\mu-1}(z)\\&\quad=-\pi e^{i2\mu\pi}\frac{\cos\nu\pi}{\sin(\nu-\mu)\pi}\frac{\Gamma(\nu+\mu)}{\Gamma(\nu-\mu+2)}\left[(\nu+\mu)+\frac{2\mu}{z^2-1}\right].\end{aligned} \tag{9.98}$$

§9.3 Legendre 方程的本征值问题

在多数情况下，Legendre 方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+\lambda y=0$$

中的自变量 x 来自变换 $x=\cos\theta,\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi$. 因此，常见的本征值问题是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+\lambda y=0, \tag{9.99a}$$

$$y(\pm1)\ 有界, \tag{9.99b}$$

其解为

$$\begin{aligned}&本征值 && \lambda_l=l(l+1), \qquad l=0,1,2,\cdots,\\ &本征函数 && y_l(x)=\mathrm{P}_l\,(x)\,.\end{aligned}$$

有关这个本征值问题的解法，数学物理方法教材中多有详细讨论，这里不再赘述. 但是，也不排除在有些情况下，由于涉及的区间不是 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$，相应地，$x$ 的变化区间不是 $[-1,1]$，因而需要求解 Legendre 方程在其他形式边界条件下的本征值问题. 下面分别讨论可能有的几个比较简单的情形.

9.3.1 几个比较简单的本征值问题

例 9.1 求解本征值问题

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+\lambda y=0, \tag{9.100a}$$

$$y(0)=0, \qquad y(1)\ 有界. \tag{9.100b}$$

解 不难证明，如果此本征值问题有解，则一定有 $\lambda\geqslant0$. 不妨令 $\lambda=\nu(\nu+1)$，且约定 $\nu\geqslant0$，而后可按下列方法继续求解:

解法一 先写出 Legendre 方程在 $x=0$ 点的两个线性无关解:

$$y_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n}}{(2n)!}\left(-\frac{\nu}{2}\right)_n\left(\frac{\nu+1}{2}\right)_n x^{2n},$$

$$y_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n}}{(2n+1)!}\left(-\frac{\nu-1}{2}\right)_n\left(1+\frac{\nu}{2}\right)_n x^{2n+1},$$

其中

$$(\nu)_0=1, \qquad (\nu)_n=\frac{\Gamma\,(\nu+n)}{\Gamma\,(\nu)},$$

Legendre 方程的通解即为 $y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$. 因为 $y(0)=0$，所以 $c_1=0$；又由于只要 $y_2(x)$ 是无穷级数，则 $y_2(1)$ 一定对数发散. 于是，只有当

$$\frac{2\nu-1}{2}=l,\qquad 即\qquad \lambda_l=(2l+1)(2l+2),\ l=0,1,2,\cdots \tag{9.101a}$$

时，本征值问题 (9.100) 才有解，本征函数为

$$\begin{aligned}y_l(x)&=c_2\sum_{n=0}^{l}\frac{2^{2n}}{(2n+1)!}(-l)_n(l+3/2)_n\,x^{2n+1}\\&=c_2\sum_{n=0}^{l}(-1)^n\frac{2^{2n}}{(2n+1)!}\frac{l!}{(l-n)!}\frac{\Gamma(n+l+3/2)}{\Gamma(l+3/2)}x^{2n+1}\\&=c_2\frac{l!\,l!}{(2l+1)!}\sum_{n=0}^{l}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{(2l+2n+1)!}{(l-n)!(l+n)!}x^{2n+1}.\end{aligned}$$

所以，如果取 $c_2=\dfrac{(-1)^l}{2^{2l}}\dfrac{(2l+1)!}{l!\,l!}$，则本征函数正好就是 $2l+1$ 次 Legendre 多项式

$$y_l(x)=\mathrm{P}_{2l+1}(x). \tag{9.101b}$$

解法二 先写出 Legendre 方程在 $x=1$ 点的两个线性无关解，进而写出通解

$$y(x)=d_1\mathrm{P}_\nu(x)+d_2\mathrm{Q}_\nu(x).$$

因为在 $x=1$ 点 $\mathrm{P}_\nu(x)$ 有界，而 $\mathrm{Q}_\nu(x)$ 无界，故 $d_2=0$；再据 (9.2) 式，有

$$\mathrm{P}_\nu(0)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma((1+\nu)/2)}{\Gamma(1+\nu/2)}\cos\frac{\nu\pi}{2}.$$

因此，为满足 $y(0)=0$，则必有

$$\cos\frac{\nu\pi}{2}=0,\qquad 即\qquad \nu=2l+1,\ l=0,1,2,\cdots.$$

因而同样得到 (取 $d_1=1$)

本征值　　$\lambda_l=(2l+1)(2l+2),\qquad l=0,1,2,\cdots,$

本征函数　　$y_l(x)=\mathrm{P}_{2l+1}(x).$

解法三 将原本征值问题奇延拓到区间 $[-1,1]$ 上，从而得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+\lambda y=0, \tag{9.100a$'$}$$

$$y(-x)=-y(x),\qquad y(1)\ 有界. \tag{9.100b$'$}$$

根据 (9.100b′) 式，显然能够推出 $y(-1)$ 有界. 因此原本征值问题等价于

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+\lambda y=0, \tag{9.100a$''$}$$

$$y(\pm 1)\ \text{有界}, \tag{9.100b$''$}$$

$$y(-x)=-y(x). \tag{9.100c$''$}$$

由方程 (9.100a″) 及有界条件 (9.100b″) 可以定出

$$\lambda_l=l(l+1), \qquad l=0,1,2,\cdots,$$

$$y_l(x)=\mathrm{P}_l(x).$$

根据 (9.100c″) 式，又进一步排除掉 l 为偶数的情形，因而也能得出同样的结果.

例 9.2 求解本征值问题

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+\lambda y=0, \tag{9.102a}$$

$$y'(0)=0, \qquad y(1)\ \text{有界}. \tag{9.102b}$$

解 类似于例 9.1，可以得到

$$\text{本征值} \qquad \lambda_l=2l(2l+1), \qquad l=0,1,2,\cdots, \tag{9.103a}$$

$$\text{本征函数} \qquad y_l(x)=\mathrm{P}_{2l}(x), \tag{9.103b}$$

其中，在采用解法二时，需要用到 (9.3) 式.

例 9.3 求解本征值问题

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+\lambda y=0, \tag{9.104a}$$

$$\alpha\, y'(0)-\beta\, y(0)=0, \qquad y(1)\ \text{有界}, \tag{9.104b}$$

其中 α, β 均为已知常数.

解 也类似于例 9.1，但采用解法二更方便些.

根据 Legendre 方程及边界条件 $y(1)$ 有界，可得

$$y(x)=\mathrm{P}_\nu(x), \qquad \lambda=\nu(\nu+1).$$

再代入 $x=0$ 端的边界条件 $\alpha\, y'(0)-\beta\, y(0)=0$，有

$$\frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(1+\nu/2)}{\Gamma((1+\nu)/2)}\sin\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\beta}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma((1+\nu)/2)}{\Gamma(1+\nu/2)}\cos\frac{\nu\pi}{2}=0,$$

即

$$\frac{2\alpha}{\beta}\left[\frac{\Gamma(1+\nu/2)}{\Gamma((1+\nu)/2)}\right]^2\tan\frac{\nu\pi}{2}=1.$$

解此超越方程，可以得到无穷多个正根 ν_i，$i=1,2,3,\cdots$，从而求得

$$\text{本征值} \qquad \lambda_l=\nu_i(\nu_i+1), \qquad i=1,2,3,\cdots, \tag{9.105a}$$

$$\text{本征函数} \qquad y_i(x)=\mathrm{P}_{\nu_i}(x). \tag{9.105b}$$

一般说来，ν_i 不再是整数.

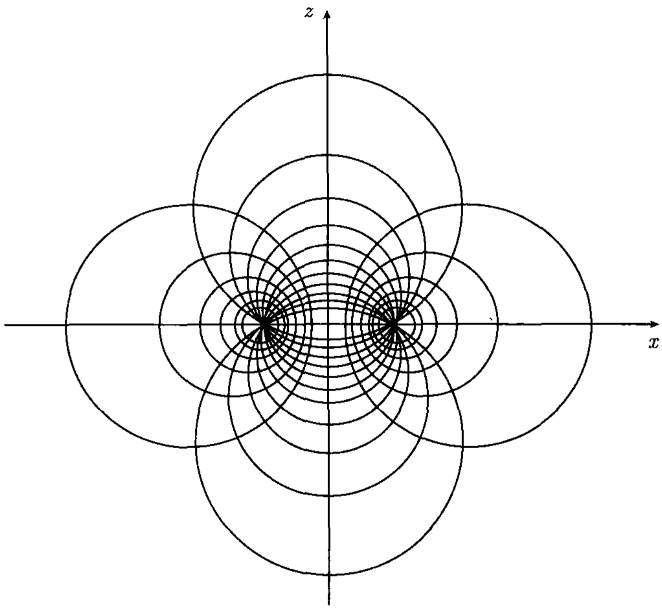


图 9.1 二维直角坐标系 (x,z) 与双极坐标系 (σ,τ)①

Legendre 方程不只是出现在球坐标系中. 例如，将图 9.1 所示的二维双极坐标系 (σ,τ)：

$$x=\frac{a\,\sinh\tau}{\cosh\tau-\cos\sigma}, \qquad z=\frac{a\,\sin\sigma}{\cosh\tau-\cos\sigma}$$

绕 z 轴旋转可以得到圆环坐标系 (σ,τ,ϕ)：

$$x=\frac{a\,\sinh\tau}{\cosh\tau-\cos\sigma}\,\cos\phi, \tag{9.106a}$$

$$y=\frac{a\,\sinh\tau}{\cosh\tau-\cos\sigma}\,\sin\phi, \tag{9.106b}$$

① 取自 http://en.wikipedia.org/wiki/Toroidal_coordinates. 图中的圆周分别对应于 τ 为常数 (圆心位于 x 轴上) 及 σ 为常数 (圆心位于 z 轴上).

$$z = \frac{a\sin\sigma}{\cosh\tau - \cos\sigma}, \tag{9.106c}$$

而在该坐标系中将 Laplace 方程

$$\sinh\tau\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{1}{\cosh\tau-\cos\sigma}\frac{\partial u}{\partial\sigma}\right)+\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\sinh\tau}{\cosh\tau-\cos\sigma}\frac{\partial u}{\partial\tau}\right) + \frac{1}{\sinh\tau(\cosh\tau-\cos\sigma)}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2} = 0 \tag{9.107}$$

分离变量 $u(\sigma,\tau,\phi) = \sqrt{\cosh\tau - \cos\sigma}\, S(\sigma)\, T(\tau)\, \Phi(\phi)$，就将出现

$$\frac{1}{\sinh\tau}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\sinh\tau\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\tau}\right)+\left(-\nu^2+\frac{1}{4}-\frac{\mu^2}{\sinh^2\tau}\right)T = 0. \tag{9.108a}$$

令 $x = \cosh\tau$, $T(\tau) = y(x)$，则上述方程即可化为连带 Legendre 方程．而且因为 $0 < \tau < \infty$，所以 $1 < x < \infty$．这就有可能出现下面例 9.4 中的本征值问题．

如果将方程 (9.108a) 作代换 $x = \coth\tau$, $y(x) = T(\tau)/\sqrt{\sinh\tau}$，则又可导出 $y(x)$ 满足的方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+\left[\left(\mu^2-\frac{1}{4}\right)-\frac{\nu^2}{1-x^2}\right]y(x) = 0. \tag{9.108b}$$

这里同样有 $1 < x < \infty$.

例 9.4 求解本征值问题

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+\lambda y = 0, \tag{9.109a}$$

$$y(1)\ 有界, \qquad y(\infty)\ 有界. \tag{9.109b}$$

解 仍令 $\lambda = \nu(\nu+1)$．作变换 $\xi = 1/x$, $\Xi(\xi) = y(x)$，则本征值问题化为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left[(\xi^2-1)\frac{\mathrm{d}\Xi}{\mathrm{d}\xi}\right]+\frac{\nu(\nu+1)}{\xi^2}\Xi = 0, \tag{9.110a}$$

$$\Xi(0)\ 有界, \qquad \Xi(1)\ 有界. \tag{9.110b}$$

$\xi = 0$ 与 $\xi = 1$ 均为正则奇点．容易列出方程 (9.110a) 在 $\xi = 0$ 点的指标方程：

$$\rho(\rho-1)-\nu(\nu+1) = 0.$$

因此，如果约定 $\mathrm{Re}\,(2\nu+1) \geqslant 0$，则 $\rho_1 = \nu+1$, $\rho_2 = -\nu$．下面需分五种情况讨论：

(1) $2\nu+1 = 0$，即 $\nu = -1/2$, $\rho_1 = \rho_2 = 1/2$．两正则解为

$$\Xi_1(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n!)^2}\frac{\Gamma(2n+1/2)}{\Gamma(1/2)}\left(\frac{\xi}{2}\right)^{2n+1/2} \tag{9.111a}$$

$$\Xi_2(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2} \frac{\Gamma(2n+1/2)}{\Gamma(1/2)} \left(\frac{\xi}{2}\right)^{2n+1/2} \times \left\{ \ln\frac{\xi}{2} + \left[\psi\left(2n+\frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right)\right] - \left[\psi(n+1) - \psi(1)\right] \right\}. \tag{9.111b}$$

此二解在 $\xi = 0$ 点均有界. 而对于 $\xi = 1$ 点，因为当 $n \to \infty$ 时，

$$\frac{1}{(n!)^2} \frac{\Gamma(2n+1/2)}{\Gamma(1/2)} \frac{1}{2^{2n+1/2}} \sim \frac{1}{2n\pi}, \qquad \lim_{n\to\infty} \left[\psi(n+z) - \ln n\right] = 0,$$

所以 $\Xi_1(\xi)$ 在 $\xi = 1$ 点数发散，而 $\Xi_2(\xi)$ 在 $\xi = 1$ 点收敛.

结论：就满足齐次常微分方程 (9.110a) 和齐次边界条件 (9.110b) 而言，此时本征值问题有解：$\lambda = -1/4$ 为本征值，相应的本征函数为

$$\Xi(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2} \frac{\Gamma(2n+1/2)}{\Gamma(1/2)} \left(\frac{\xi}{2}\right)^{2n+1/2} \times \left\{ \ln\frac{\xi}{2} + \left[\psi\left(2n+\frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right)\right] - \left[\psi(n+1) - \psi(1)\right] \right\}. \tag{9.112}$$

(2) $0 < \mathrm{Re}\,(2\nu+1) < 1$，即 $-1/2 < \mathrm{Re}\,\nu < 0$. 此时 $1/2 < \rho_1 < 1$, $0 < \rho_2 < 1/2$，两正则解为

$$\Xi_1(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\Gamma(\nu+3/2)}{\Gamma(n+\nu+3/2)} \frac{\Gamma(2n+\nu+1)}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{\xi}{2}\right)^{2n+\nu+1}, \tag{9.113a}$$

$$\Xi_2(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\Gamma(-\nu+1/2)}{\Gamma(n-\nu+1/2)} \frac{\Gamma(2n-\nu)}{\Gamma(-\nu)} \left(\frac{\xi}{2}\right)^{2n-\nu}. \tag{9.113b}$$

此二解在 $\xi=0$ 点仍均有界，而且在 $\xi=1$ 点对数发散，但 $\Xi_1(\xi) - \Xi_2(\xi)$ 在 $\xi=1$ 点有界. 故在 $-1/2 < \mathrm{Re}\,\nu < 0$ 的条件下，有本征值 $\lambda = \nu(\nu+1)$，本征函数为

$$\begin{aligned}\Xi(\xi) &= \frac{1}{2\nu+1}\left[\Xi_1(\xi) - \Xi_2(\xi)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\Gamma(\nu+1/2)}{\Gamma(n+\nu+3/2)} \frac{\Gamma(2n+\nu+1)}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{\xi}{2}\right)^{2n+\nu+1} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\Gamma(-\nu-1/2)}{\Gamma(n-\nu+1/2)} \frac{\Gamma(2n-\nu)}{\Gamma(-\nu)} \left(\frac{\xi}{2}\right)^{2n-\nu}\right].\end{aligned} \tag{9.114}$$

容易验证，当 $\nu \to -1/2$ 时，(9.114) 式的极限正是 (9.112) 式.

(3) $\mathrm{Re}\,(2\nu+1) > 1$，且 $2\nu+1$ 不为整数. 此时解式仍为 (9.113a) 与 (9.113b). 容易判断 $\Xi_1(\xi)$ 在 $\xi = 0$ 点有界，在 $\xi = 1$ 点无界；$\Xi_2(\xi)$ 则在 $\xi = 0$ 与 $\xi = 1$ 两点均无界. 故本征值问题无解.

(4) $2\nu+1=2k,\ k=1,2,3,\cdots$. 方程 (9.110a) 的第一解

$$\Xi_1(\xi)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{k!}{n!\,(n+k)!}\,\frac{\Gamma\,(2n+k+1/2)}{\Gamma\,(k+1/2)}\left(\frac{\xi}{2}\right)^{2n+k+1/2} \tag{9.115a}$$

仍在 $\xi=0$ 点有界，在 $\xi=1$ 点无界；而第二解的形式为

$$\Xi_2(\xi)=\Xi_1(\xi)\,\ln\xi+\sum_{n=0}^{\infty}d_n\xi^{n-k+1/2}, \tag{9.115b}$$

一定在 $\xi=0$ 点无界. 因此，此时本征值问题 (9.110) 亦无解.

(5) $2\nu+1=2k+1,\ k=0,1,2,\cdots$. 方程 (9.110a) 的两个线性无关解为

$$\Xi_1(\xi)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+k)!}{n!\,k!}\,\frac{\Gamma\,(k+3/2)}{\Gamma\,(n+k+3/2)}\left(\frac{\xi}{2}\right)^{2n+k+1}, \tag{9.116a}$$

$$\begin{aligned}\Xi_2(\xi)&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\,\frac{\Gamma\,(2n-k)}{\Gamma\,(-k)}\,\frac{\Gamma\,(-k+1/2)}{\Gamma\,(n-k+1/2)}\left(\frac{\xi}{2}\right)^{2n-k}\\&=\sum_{n=0}^{[k/2]}\frac{1}{n!}\,\frac{\Gamma\,(2n-k)}{\Gamma\,(-k)}\,\frac{\Gamma\,(-k+1/2)}{\Gamma\,(n-k+1/2)}\left(\frac{\xi}{2}\right)^{2n-k}.\end{aligned} \tag{9.116b}$$

同样可以判断此时本征值问题无解.

综合以上讨论，可以得出结论：本征值问题 (9.109) 的解为

本征值 $\lambda=\nu(\nu+1),\qquad -1/2<\operatorname{Re}\nu<0,$ (9.117a)

本征函数

$$\begin{aligned}y(x)=\frac{1}{2}\bigg[&\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\,\frac{\Gamma\,(\nu+1/2)}{\Gamma\,(n+\nu+3/2)}\,\frac{\Gamma\,(2n+\nu+1)}{\Gamma\,(\nu+1)}\left(\frac{1}{2x}\right)^{2n+\nu+1}\\&+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\,\frac{\Gamma\,(-\nu-1/2)}{\Gamma\,(n-\nu+1/2)}\,\frac{\Gamma\,(2n-\nu)}{\Gamma\,(-\nu)}\left(\frac{1}{2x}\right)^{2n-\nu}\bigg].\end{aligned} \tag{9.117b}$$

当 $\nu=-1/2$ 时，(9.117b) 式可按 l'Hôpital 法则求极限，从而得

$$\begin{aligned}y(x)&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n!)^2}\,\frac{\Gamma\,(2n+1/2)}{\Gamma\,(1/2)}\left(\frac{1}{2x}\right)^{2n+1/2}\\&\quad\times\left\{-\ln(2x)+\left[\psi\left(2n+\frac{1}{2}\right)-\psi\left(\frac{1}{2}\right)\right]-\left[\psi(n+1)-\psi(1)\right]\right\}.\end{aligned} \tag{9.117c}$$

最后需要说明：以上得到的本征函数 $y(x)$ 只是在区间 $1\leqslant x<\infty$ 上连续，在 $1<x<\infty$ 内可导，并且满足方程 (9.109a)，当 x 从区间内部逼近 0 或 ∞ 时满足

边界条件 (9.109b)；本征值构成连续谱；但无法证明本征函数 $y(x)$ 具有正交性，也不能归一化 (到有限值)，即在 $(1,\infty)$ 上并不平方可积．因此，如果局限于平方可积空间 $\mathscr{L}_2^{(c)}(1,\infty)$，则本征值问题 (9.109) 无解；但如果从广义函数的角度来讨论，则本征值问题 (9.109) 有解，相应地，本征函数应当归一化到 δ 函数．

9.3.2 由 Legendre 多项式的生成函数证明正交性[①]

我们直接计算积分

$$I=\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-2xt+t^2}\sqrt{1-2xs+s^2}}.$$

作代换

$$u^2=\frac{1+t^2}{2t}-x,\qquad v^2=\frac{1+s^2}{2s}-x,$$

将积分变量 x 换为 u 和 v (当然 u 和 v 不是互相独立的)．因此

$$u\mathrm{d}u=v\mathrm{d}v,\qquad \mathrm{d}x=-2u\mathrm{d}u=-2v\mathrm{d}v=-u\mathrm{d}u-v\mathrm{d}v.$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}u}{v}=\frac{\mathrm{d}v}{u}=\frac{\mathrm{d}(u+v)}{u+v}.$$

于是就得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-2xt+t^2}\sqrt{1-2xs+s^2}} &= -\frac{u\mathrm{d}u+v\mathrm{d}v}{2\sqrt{ts}uv}\\ &=-\frac{1}{2\sqrt{ts}}\left(\frac{\mathrm{d}u}{v}+\frac{\mathrm{d}v}{u}\right) = -\frac{1}{\sqrt{ts}}\frac{\mathrm{d}(u+v)}{u+v}.\end{aligned}$$

这样就能算出积分

$$I=-\frac{1}{\sqrt{ts}}\ln|u+v|\Big|_{x=-1}^{x=1}.$$

注意根据 u 和 v 的定义，当 $|t|<1$，$|s|<1$ 时，应该有

$$u\Big|_{x=1}=\frac{1-t}{\sqrt{2t}},\qquad u\Big|_{x=-1}=\frac{1+t}{\sqrt{2t}},$$
$$v\Big|_{x=1}=\frac{1-s}{\sqrt{2s}},\qquad u\Big|_{x=-1}=\frac{1+s}{\sqrt{2s}}.$$

代入即得

$$I=\frac{1}{\sqrt{ts}}\ln\frac{1+\sqrt{ts}}{1-\sqrt{ts}}=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{2}{2l+1}(ts)^l.$$

① 引自文献：H. Sagan. *Boundary and Eigenvalue Problems in Mathematical Physics.* New York: John Wiley & Sons, Inc., 1961.

另一方面，由 Legendre 多项式的生成函数，又应该有

$$I=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}t^l s^k\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_l\,(x)\,\mathrm{P}_k\,(x)\;\mathrm{d}x.$$

比较系数，就求得

$$\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_l\,(x)\,\mathrm{P}_k\,(x)\;\mathrm{d}x=\frac{2}{2l+1}\delta_{kl}.$$

这正是大家熟悉的结果.

§9.4　含 Legendre 多项式的积分

本节介绍几个含 Legendre 多项式或连带 Legendre 函数的积分，计算中多少要用到一些特殊的技巧.

例 9.5　计算积分 $\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_k'\,(x)\,\mathrm{P}_l'\,(x)\;\mathrm{d}x$.

解　容易判断，当 $k+l$ 为奇数时积分一定为 0，故下面只需讨论 $k+l$ 为偶数的情形. 而且由于 k 和 l 的任意性，不妨假定 $k\geqslant l$. 于是，因为 $\mathrm{P}_l''(x)$ 是 $l-2$ 次多项式，故一定有

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_k'\,(x)\,\mathrm{P}_l'\,(x)\;\mathrm{d}x&=\mathrm{P}_k\,(x)\,\mathrm{P}_l'\,(x)\Big|_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_k\,(x)\,\mathrm{P}_l''(x)\,\mathrm{d}x\\&=\mathrm{P}_k\,(x)\,\mathrm{P}_l'\,(x)\Big|_{-1}^{1}.\end{aligned}$$

为了求出 $\mathrm{P}_l'\,(\pm1)$，可在 Legendre 方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{dP}_l\,(x)}{\mathrm{d}x}\right]+l(l+1)\mathrm{P}_l\,(x)=0$$

中代入 $x=\pm1$，有

$$\pm2\mathrm{P}_l'\,(\pm1)=l(l+1)\mathrm{P}_l\,(\pm1),\qquad\text{即}\qquad\mathrm{P}_l'\,(\pm1)=(\pm)^{l-1}\,\frac{l(l+1)}{2}.$$

所以就求得

$$\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_k'\,(x)\,\mathrm{P}_l'\,(x)\;\mathrm{d}x=\begin{cases}l(l+1), & k+l=\text{偶数，且 }k\geqslant l,\\ k(k+1), & k+l=\text{偶数，且 }l\geqslant k,\\ 0, & k+l=\text{奇数}.\end{cases}\tag{9.118}$$

例 9.6　计算积分 $\int_{0}^{1}x^{\alpha}\mathrm{P}_l\,(x)\,\mathrm{d}x$，$\alpha>-1$.

解 本积分需要采用一种特殊的办法计算. 令

$$I_l=\int_0^1 x^{\alpha}\mathrm{P}_l\,(x)\,\mathrm{d}x,\qquad J_l=\int_0^1 x^{\alpha+1}\mathrm{P}_l\,(x)\,\mathrm{d}x,$$

利用递推关系

$$(2l-1)x\mathrm{P}_{l-1}\,(x)=l\mathrm{P}_l\,(x)+(l-1)\mathrm{P}_{l-2}\,(x)\,,$$

就能得到

$$\begin{aligned}lI_l&\equiv l\int_0^1 x^{\alpha}\mathrm{P}_l\,(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 x^{\alpha}\Big[(2l-1)x\mathrm{P}_{l-1}\,(x)-(l-1)\mathrm{P}_{l-2}\,(x)\Big]\mathrm{d}x\\&=(2l-1)J_{l-1}-(l-1)I_{l-2}.\end{aligned}\tag{9.119a}$$

再利用递推关系 $l\mathrm{P}_l\,(x)=x\mathrm{P}_l'\,(x)-\mathrm{P}_{l-1}'\,(x)$，又能得到

$$\begin{aligned}lJ_l&\equiv l\int_0^1 x^{\alpha+1}\mathrm{P}_l\,(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 x^{\alpha+1}\Big[x\mathrm{P}_l'\,(x)-\mathrm{P}_{l-1}'\,(x)\Big]\mathrm{d}x\\&=x^{\alpha+2}\mathrm{P}_l\,(x)\Big|_0^1-(\alpha+2)\int_0^1 x^{\alpha+1}\mathrm{P}_l\,(x)\,\mathrm{d}x\\&\quad-x^{\alpha+1}\mathrm{P}_{l-1}\,(x)\Big|_0^1+(\alpha+1)\int_0^1 x^{\alpha}\mathrm{P}_{l-1}\,(x)\,\mathrm{d}x\\&=-(\alpha+2)J_l+(\alpha+1)I_{l-1},\end{aligned}$$

即

$$(l+\alpha+2)J_l=(\alpha+1)I_{l-1}\quad\text{或写成}\quad(l+\alpha+1)J_{l-1}=(\alpha+1)I_{l-2}.\tag{9.119b}$$

与 (9.119a) 式联立，消去 J_{l-1}，就得到 I_l 所满足的递推关系

$$(l+\alpha+1)I_l=-(l-\alpha-2)I_{l-2}.\tag{9.119c}$$

下面需要区分 l 为偶数与奇数两种情形：

$$\begin{aligned}I_{2l}&=-\frac{2l-\alpha-2}{2l+\alpha+1}I_{2l-2}=(-1)^2\frac{2l-\alpha-2}{2l+\alpha+1}\frac{2l-\alpha-4}{2l+\alpha-1}I_{2l-4}\\&=\cdots=(-1)^l\frac{2l-\alpha-2}{2l+\alpha+1}\frac{2l-\alpha-4}{2l+\alpha-1}\cdots\frac{-\alpha}{\alpha+3}I_0,\qquad \alpha>-1;\\I_{2l+1}&=-\frac{2l-\alpha-1}{2l+\alpha+2}I_{2l-1}=(-1)^2\frac{2l-\alpha-1}{2l+\alpha+2}\frac{2l-\alpha-3}{2l+\alpha}I_{2l-3}\\&=\cdots=(-1)^l\frac{2l-\alpha-1}{2l+\alpha+2}\frac{2l-\alpha-3}{2l+\alpha}\cdots\frac{-\alpha+1}{\alpha+4}I_1,\qquad \alpha>-2.\end{aligned}$$

因为

$$I_0 = \int_0^1 x^\alpha \mathrm{P}_0(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha+1}, \qquad \alpha > -1, \tag{9.120a}$$

$$I_1 = \int_0^1 x^\alpha \mathrm{P}_1(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha+2}, \qquad \alpha > -2, \tag{9.120b}$$

所以

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^\alpha \mathrm{P}_{2l}(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{(-1)^l}{2}\frac{\Gamma\left(l-\dfrac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(-\dfrac{\alpha}{2}\right)}\frac{\Gamma\left(\dfrac{\alpha+1}{2}\right)}{\Gamma\left(l+\dfrac{\alpha+3}{2}\right)} \\ &= \frac{(-1)^{l+1}}{2^{\alpha+1}}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma\left(l-\dfrac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(l+\dfrac{\alpha+3}{2}\right)}\sin\frac{\pi\alpha}{2}, \quad \alpha>-1,\end{aligned} \tag{9.121a}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^\alpha \mathrm{P}_{2l+1}(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{(-1)^l}{2}\frac{\Gamma\left(l-\dfrac{\alpha-1}{2}\right)}{\Gamma\left(-\dfrac{\alpha-1}{2}\right)}\frac{\Gamma\left(\dfrac{\alpha}{2}+1\right)}{\Gamma\left(l+\dfrac{\alpha}{2}+2\right)} \\ &= \frac{(-1)^{l+1}}{2^{\alpha+1}}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma\left(l+\dfrac{1-\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(l+2+\dfrac{\alpha}{2}\right)}\cos\frac{\pi\alpha}{2}, \quad \alpha>-2,\end{aligned} \tag{9.121b}$$

或者合并成

$$\int_0^1 x^\alpha \mathrm{P}_l(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2^{\alpha+1}}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma\left(\dfrac{l-\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{l+\alpha+3}{2}\right)}\sin\frac{l+\alpha}{2}\pi. \tag{9.121c}$$

不妨列出 α 取特殊值的几种情形:

$$\int_0^1 x^{-1/2}\mathrm{P}_{2l}(x)\,\mathrm{d}x = (-1)^l\frac{2}{4l+1}, \tag{9.122a}$$

$$\int_0^1 x^{1/2}\mathrm{P}_{2l}(x)\,\mathrm{d}x = (-1)^{l+1}\frac{2}{(4l-1)(4l+3)}, \tag{9.122b}$$

$$\int_0^1 x^{-3/2}\mathrm{P}_{2l+1}(x)\,\mathrm{d}x = (-1)^l 2, \tag{9.122c}$$

$$\int_0^1 x^{-1/2}\mathrm{P}_{2l+1}(x)\,\mathrm{d}x = (-1)^l\frac{2}{4l+3}, \tag{9.122d}$$

$$\int_0^1 x^{1/2}\mathrm{P}_{2l+1}(x)\,\mathrm{d}x = (-1)^l\frac{2}{(4l+1)(4l+5)}. \tag{9.122e}$$

下面介绍另一种做法[①]. 其特点是只用到不多的简单计算，而更多的是运用逻辑推理. 这反映了我们对于此积分结果的更深理解.

我们首先注意到 $\mathrm{P}_l(x)$ 是 l 次多项式，且只含偶次幂或奇次幂，共 $[l/2]+1$ 项：

$$\mathrm{P}_l(x) = a_0x^l + a_1x^{l-2} + a_2x^{l-4} + \cdots,$$

所以一定有

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^\alpha \mathrm{P}_l(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{a_0}{\alpha+l+1} + \frac{a_1}{\alpha+l-1} + \frac{a_2}{\alpha+l-3} + \cdots \\ &= \frac{f(\alpha)}{(\alpha+l+1)(\alpha+l-1)(\alpha+l-3)\cdots},\end{aligned}$$

其中的分母是 α 的 $[l/2]+1$ 次多项式，分子 $f(\alpha)$ 是 α 的 $[l/2]$ 次多项式. 但因为 $\mathrm{P}_l(1)=1$，所以 $a_0+a_1+a_2+\cdots=1$，即 $f(\alpha)$ 的最高次幂 $\alpha^{[l/2]}$ 的系数必为 1. 再注意当 $\alpha = l-2, l-4, \cdots$ 时，

$$\int_0^1 x^\alpha \mathrm{P}_l(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 x^\alpha \mathrm{P}_l(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

因此 $f(\alpha)$ 作为 α 的多项式，就一定含有 $(\alpha-l+2), (\alpha-l+4), \cdots$ 等因子，即

$$f(\alpha) = (\alpha-l+2)(\alpha-l+4)\cdots,$$

这里的连乘积正好是 $[l/2]$ 个因子相乘，最后一项为 α 或 $\alpha-1$，视 l 为偶数或奇数而定. 所以我们就得到

$$\int_0^1 x^\alpha \mathrm{P}_{2l}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{(\alpha-2l+2)(\alpha-2l+4)\cdots\alpha}{(\alpha+2l+1)(\alpha+2l-1)\cdots(\alpha+1)}, \tag{9.123a}$$

$$\int_0^1 x^\alpha \mathrm{P}_{2l+1}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{(\alpha-2l+1)(\alpha-2l+3)\cdots(\alpha-1)}{(\alpha+2l+2)(\alpha+2l)\cdots(\alpha+2)}. \tag{9.123b}$$

容易将这些结果化为 (9.121) 式的形式.

例 9.7 计算积分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{P}_{2l}(x)}{(1+kx^2)^{l+3/2}}\mathrm{d}x$，其中 l 为自然数，$-1<k<1$.

解 将被积函数中的 $(1+kt^2)^{-(l+3/2)}$ 作 Taylor 展开，并逐项积分，得

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{P}_{2l}(x)}{(1+kx^2)^{l+3/2}}\mathrm{d}x = \sum_{m=0}^\infty \frac{(-k)^m}{m!}\frac{\Gamma(l+m+3/2)}{\Gamma(l+3/2)}\int_0^1 x^{2m}\mathrm{P}_{2l}(x)\,\mathrm{d}x.$$

---

① 见文献：E. W. Hobson. *The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics*. Cambridge, 1931: 39. 但该处只讨论了 α 为自然数的情形.

因为

$$\int_0^1 x^{2m}\mathrm{P}_{2l}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 x^{2m}\mathrm{P}_{2l}(x)\,\mathrm{d}x = 0, \qquad m<l,$$

所以

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{P}_{2l}(x)}{(1+kx^2)^{l+3/2}}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-k)^{l+n}}{(l+n)!}\frac{\Gamma(2l+n+3/2)}{\Gamma(l+3/2)}\int_0^1 x^{2(l+n)}\mathrm{P}_{2l}(x)\,\mathrm{d}x.$$

代入例 9.6 中的结果，并将级数求和，即得

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\mathrm{P}_{2l}(x)}{(1+kx^2)^{l+3/2}}\mathrm{d}x &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-k)^{l+n}}{(l+n)!}\frac{\Gamma(2l+n+3/2)}{\Gamma(l+3/2)}\cdot\frac{1}{2}\frac{(l+n)!}{n!}\frac{\Gamma(l+n+1/2)}{\Gamma(2l+n+3/2)}\\ &= \frac{(-1)^k}{2l+1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-k)^n}{n!}\frac{\Gamma(l+n+1/2)}{\Gamma(l+1/2)}\\ &= \frac{(-1)^l}{2l+1}\frac{k^l}{(1+k)^{l+1/2}}.\end{aligned} \tag{9.124}$$

☞ **讨论** 类似地，也可以计算

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\mathrm{P}_{2l+1}(x)}{(1+kx^2)^{l+2}}\mathrm{d}x &= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-k)^m}{m!}\frac{\Gamma(l+m+2)}{\Gamma(l+2)}\int_0^1 x^{2m}\mathrm{P}_{2l+1}(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-k)^m}{m!}\frac{(l+m+1)!}{(l+1)!}\cdot\frac{1}{2}\frac{m!}{(l+m+1)!}\frac{\Gamma(m+1/2)}{\Gamma(m-l+1/2)}\\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{(l+1)!}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\Gamma(m+1/2)}{\Gamma(m-l+1/2)}(-k)^m\\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{(l+1)!}\frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma(-l+1/2)}\mathrm{F}\left(1,\frac{1}{2};-l+\frac{1}{2};-k\right).\end{aligned} \tag{9.125a}$$

还可以利用超几何函数的变换关系

$$\begin{aligned}\mathrm{F}(\alpha,\beta;\gamma;z) &= (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}\mathrm{F}(\gamma-\alpha,\gamma-\beta;\gamma;z)\\ &= (1-z)^{-\alpha}\mathrm{F}\left(\alpha,\gamma-\beta;\gamma;\frac{z}{z-1}\right)\end{aligned}$$

化简为

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{P}_{2l+1}(x)}{(1+kx^2)^{l+2}}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{(l+1)!}\frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma(-l+1/2)}(1+k)^{-l-1}\mathrm{F}\left(-l-\frac{1}{2},-l;-l+\frac{1}{2};-k\right) \tag{9.125b}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{(l+1)!}\frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma(-l+1/2)}(1+k)^{-1}\mathrm{F}\left(1,-l;-l+\frac{1}{2};\frac{k}{1+k}\right). \tag{9.125c}$$

现在出现的超几何函数都是 l 次多项式.

例 9.8 计算积分 $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x}\mathrm{P}_l(x)\,\mathrm{P}_{l+1}(x)\,\mathrm{d}x$.

解 可以直接计算此积分. 当 l 为偶数 $2n$ 时，将 Legendre 多项式的递推关系

$$(4n+1)x\mathrm{P}_{2n}(x)=(2n+1)\mathrm{P}_{2n+1}(x)+2n\mathrm{P}_{2n-1}(x)$$

代入原积分，有

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{x}\mathrm{P}_{2n}(x)\,\mathrm{P}_{2n+1}(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\left[\frac{4n+1}{2n+1}\mathrm{P}_{2n}(x)-\frac{2n}{2n+1}\frac{1}{x}\mathrm{P}_{2n-1}(x)\right]\mathrm{P}_{2n}(x)\,\mathrm{d}x,$$

因为 $\mathrm{P}_{2n-1}(x)/x$ 是 $2n-2$ 次多项式，它一定与 $\mathrm{P}_{2n}(x)$ 正交，所以

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{x}\mathrm{P}_{2n}(x)\,\mathrm{P}_{2n+1}(x)\,\mathrm{d}x=\frac{4n+1}{2n+1}\int_{-1}^{1}\left[\mathrm{P}_{2n}(x)\right]^2\mathrm{d}x=\frac{2}{2n+1}. \tag{9.126a}$$

若 l 为奇数 $2n+1$，则因为 $\mathrm{P}_{2n+1}(x)/x$ 是 $2n$ 次多项式，与 $\mathrm{P}_{2n+2}(x)$ 正交，所以

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{x}\mathrm{P}_{2n+1}(x)\,\mathrm{P}_{2n+2}(x)\,\mathrm{d}x=0. \tag{9.126b}$$

本题还有另一种算法，就是根据 Legendre 多项式的递推关系导出积分

$$I_l\equiv\int_{-1}^{1}\frac{1}{x}\mathrm{P}_l(x)\,\mathrm{P}_{l+1}(x)\,\mathrm{d}x$$

的递推关系

$$I_l=\int_{-1}^{1}\frac{1}{x}\mathrm{P}_l(x)\left[\frac{2l+1}{l+1}x\mathrm{P}_l(x)-\frac{l}{l+1}\mathrm{P}_{l-1}(x)\right]\mathrm{d}x=\frac{2}{l+1}-\frac{l}{l+1}I_{l-1},$$

或者再重复应用此式于 I_{l-1}，从而进一步得到 I_l 与 I_{l-2} 之间的递推关系

$$I_l=\frac{2}{l+1}-\frac{l}{l+1}\left(\frac{2}{l}-\frac{l-1}{l}I_{l-2}\right)=\frac{l-1}{l+1}I_{l-2}.$$

所以

$$I_{2l}=\frac{2l-1}{2l+1}I_{2l-2}=\frac{2l-1}{2l+1}\frac{2l-3}{2l-1}I_{2l-4}=\cdots=\frac{1}{2l+1}I_0,$$
$$I_{2l+1}=\frac{2l}{2l+2}I_{2l-1}=\frac{2l}{2l+2}\frac{2l-2}{2l}I_{2l-3}=\cdots=\frac{2}{2l+2}I_1.$$

直接求出 I_0 与 I_1:

$$I_0=\int_{-1}^{1}\frac{1}{x}\mathrm{P}_0(x)\,\mathrm{P}_1(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x=2,$$

$$I_1 = \int_{-1}^{1} \frac{1}{x} \mathrm{P}_1(x)\,\mathrm{P}_2(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \mathrm{P}_2(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

同样也能得到 (9.126) 式的结果.

例 9.9 计算积分 $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\left(1-x^2\right)^n}{(1-2xt+t^2)^{n+1/2}}\mathrm{d}x$，其中 n 为自然数，$|t| \neq 1$.

解 先假设 $t \neq 0$，于是

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \frac{\left(1-x^2\right)^n}{(1-2xt+t^2)^{n+1/2}}\mathrm{d}x &= \frac{1}{(2n-1)t} \frac{1}{(1-2xt+t^2)^{n-1/2}} \left(1-x^2\right)^n \Big|_{-1}^{1} \\
&\quad - \frac{1}{(2n-1)t} \int_{-1}^{1} \frac{1}{(1-2xt+t^2)^{n-1/2}} \frac{\mathrm{d}\left(1-x^2\right)^n}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{(2n-1)t} \int_{-1}^{1} \frac{1}{(1-2xt+t^2)^{n-1/2}} \frac{\mathrm{d}\left(1-x^2\right)^n}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x \\
&= \frac{(-1)^2}{(2n-1)(2n-3)} \frac{1}{t^2} \int_{-1}^{1} \frac{1}{(1-2xt+t^2)^{n-3/2}} \frac{\mathrm{d}^2\left(1-x^2\right)^n}{\mathrm{d}x^2}\mathrm{d}x \\
&= \cdots \\
&= \frac{(-1)^n}{(2n-1)!!} \frac{1}{t^n} \int_{-1}^{1} \frac{1}{(1-2xt+t^2)^{1/2}} \frac{\mathrm{d}^n\left(1-x^2\right)^n}{\mathrm{d}x^n}\mathrm{d}x \\
&= \frac{2^n n!}{(2n-1)!!} \frac{1}{t^n} \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{P}_n(x)}{\sqrt{1-2xt+t^2}}\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

当 $|t| < 1$ 时，利用 Legendre 多项式的生成函数展开式，就可以得到

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \frac{\left(1-x^2\right)^n}{(1-2xt+t^2)^{n+1/2}}\mathrm{d}x &= \frac{2^n n!}{(2n-1)!!} \frac{1}{t^n} \sum_{l=0}^{\infty} t^l \int_{-1}^{1} \mathrm{P}_l(x)\,\mathrm{P}_n(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2^{n+1} n!}{(2n+1)!!} = 2^{2n+1} \frac{n!\,n!}{(2n+1)!}.
\end{aligned} \tag{9.127a}$$

直接计算可以证明，当 $t = 0$ 时此结果亦成立. 若 $|t| > 1$，同样可得

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \frac{\left(1-x^2\right)^n}{(1-2xt+t^2)^{n+1/2}}\mathrm{d}x &= \frac{2^n n!}{(2n-1)!!} \frac{1}{t^n} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{t^{l+1}} \int_{-1}^{1} \mathrm{P}_l(x)\,\mathrm{P}_n(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2^{n+1} n!}{(2n+1)!!} \frac{1}{t^{2n+1}} = 2^{2n+1} \frac{n!\,n!}{(2n+1)!} \frac{1}{t^{2n+1}}.
\end{aligned} \tag{9.127b}$$

对于涉及连带 Legendre 函数的积分，原则上也可以化为含 Legendre 多项式的积分.

例 9.10 计算积分

$$\int_{-1}^{1} \frac{x}{1-x^2} \mathrm{P}_n^m(x)\,\mathrm{P}_{n+2l+1}^m(x)\,\mathrm{d}x, \qquad l = 0, 1, 2, \cdots,\ m = 1, 2, 3, \cdots.$$

解 按照连带 Legendre 函数的定义

$$\mathrm{P}_n^m(x)=(-1)^m\left(1-x^2\right)^{m/2}\frac{\mathrm{d}^m\mathrm{P}_n(x)}{\mathrm{d}x^m},$$

我们有

$$\int_{-1}^1\frac{x}{1-x^2}\mathrm{P}_n^m(x)\,\mathrm{P}_{n+2l+1}^m(x)\,\mathrm{d}x\equiv\int_{-1}^1\left(1-x^2\right)^{m-1}x\frac{\mathrm{d}^m\mathrm{P}_n(x)}{\mathrm{d}x^m}\frac{\mathrm{d}^m\mathrm{P}_{n+2l+1}(x)}{\mathrm{d}x^m}\mathrm{d}x.$$

分部积分 $m-1$ 次，得

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^1\frac{x}{1-x^2}\mathrm{P}_n^m(x)\,\mathrm{P}_{n+2l+1}^m(x)\,\mathrm{d}x\\&\quad=(-1)^{m-1}\int_{-1}^1\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}x^{m-1}}\left[\left(1-x^2\right)^{m-1}x\frac{\mathrm{d}^m\mathrm{P}_n(x)}{\mathrm{d}x^m}\right]\frac{\mathrm{d}\mathrm{P}_{n+2l+1}(x)}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

再继续分部积分一次，就得到

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^1\frac{x}{1-x^2}\mathrm{P}_n^m(x)\,\mathrm{P}_{n+2l+1}^m(x)\,\mathrm{d}x\\&\quad=(-1)^{m-1}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}x^{m-1}}\left[\left(1-x^2\right)^{m-1}x\frac{\mathrm{d}^m\mathrm{P}_n(x)}{\mathrm{d}x^m}\right]\mathrm{P}_{n+2l+1}(x)\bigg|_{-1}^1\\&\qquad+(-1)^m\int_{-1}^1\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\left[\left(1-x^2\right)^{m-1}x\frac{\mathrm{d}^m\mathrm{P}_n(x)}{\mathrm{d}x^m}\right]\mathrm{P}_{n+2l+1}(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

因为 $\dfrac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\left[\left(1-x^2\right)^{m-1}x\dfrac{\mathrm{d}^m\mathrm{P}_n(x)}{\mathrm{d}x^m}\right]$ 是 $n-1$ 次多项式，一定与 Legendre 多项式 $\mathrm{P}_{n+2l+1}(x)$ 正交，所以

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^1\frac{x}{1-x^2}\mathrm{P}_n^m(x)\,\mathrm{P}_{n+1}^m(x)\,\mathrm{d}x\\&\quad=(-1)^{m-1}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}x^{m-1}}\left[\left(1-x^2\right)^{m-1}x\,\frac{\mathrm{d}^m\mathrm{P}_n(x)}{\mathrm{d}x^m}\right]\mathrm{P}_{n+2l+1}(x)\bigg|_{-1}^1\\&\quad=(-1)^{m-1}\frac{\mathrm{d}^{m-1}\left(1-x^2\right)^{m-1}}{\mathrm{d}x^{m-1}}\cdot\left[x\,\frac{\mathrm{d}^m\mathrm{P}_n(x)}{\mathrm{d}x^m}\right]\cdot\mathrm{P}_{n+2l+1}(x)\bigg|_{-1}^1\\&\quad=2^{m-1}(m-1)!\cdot\mathrm{P}_{m-1}(x)\cdot x\,\frac{\mathrm{d}^m\mathrm{P}_n(x)}{\mathrm{d}x^m}\cdot\mathrm{P}_{n+2l+1}(x)\bigg|_{-1}^1.\end{aligned}$$

直接由 Legendre 多项式的定义

$$\mathrm{P}_l(x)=\sum_{n=0}^l\frac{1}{(n!)^2}\,\frac{(l+n)!}{(l-n)!}\left(\frac{x-1}{2}\right)^n$$

及 Legendre 多项式的奇偶性，可以求得

$$\left.\frac{\mathrm{d}^m \mathrm{P}_l(x)}{\mathrm{d}x^m}\right|_{x=1} = \frac{1}{2^m m!}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}, \qquad \left.\frac{\mathrm{d}^m \mathrm{P}_l(x)}{\mathrm{d}x^m}\right|_{x=-1} = \frac{(-1)^{l-m}}{2^m m!}\frac{(l+m)!}{(l-m)!},$$

所以最后就计算得

$$\int_{-1}^{1} \frac{x}{1-x^2}\mathrm{P}_n^m(x)\,\mathrm{P}_{n+2l+1}^m(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{m}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}, \qquad l=0,1,2,\cdots,\ m=1,2,3,\cdots. \tag{9.128}$$

注意此积分值与 l 无关.

☞ **讨论** 类似地，也可以计算

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \mathrm{P}_n^m(x)\,\mathrm{P}_{n+2l}^m(x)\,\frac{\mathrm{d}x}{1-x^2} &\equiv \int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^{m-1}\frac{\mathrm{d}^m\mathrm{P}_n(x)}{\mathrm{d}x^m}\frac{\mathrm{d}^m\mathrm{P}_{n+2l}(x)}{\mathrm{d}x^m}\mathrm{d}x \\
&= (-1)^{m-1}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}x^{m-1}}\left[\left(1-x^2\right)^{m-1}\frac{\mathrm{d}^m\mathrm{P}_n(x)}{\mathrm{d}x^m}\right]\frac{\mathrm{d}\mathrm{P}_{n+2l}(x)}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x \\
&= (-1)^{m-1}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}x^{m-1}}\left[\left(1-x^2\right)^{m-1}\frac{\mathrm{d}^m\mathrm{P}_n(x)}{\mathrm{d}x^m}\right]\mathrm{P}_{n+2l}(x)\Big|_{-1}^{1} \\
&= (-1)^{m-1}\frac{\mathrm{d}^{m-1}\left(1-x^2\right)^{m-1}}{\mathrm{d}x^{m-1}}\cdot\frac{\mathrm{d}^m\mathrm{P}_n(x)}{\mathrm{d}x^m}\cdot\mathrm{P}_{n+2l}(x)\Big|_{-1}^{1} \\
&= 2^{m-1}(m-1)!\cdot\mathrm{P}_{m-1}(x)\cdot\frac{\mathrm{d}^m\mathrm{P}_n(x)}{\mathrm{d}x^m}\cdot\mathrm{P}_{n+2l}(x)\Big|_{-1}^{1} \\
&= m\frac{(n+m)!}{(n-m)!}, \qquad l=0,1,2,\cdots,\ m=1,2,3,\cdots.
\end{aligned} \tag{9.129}$$

$m=0$ 时，此积分不存在.

例 9.11 计算积分 $\displaystyle\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_n^m(x)\,\mathrm{P}_{n+2l+1}^{m+1}(x)\,\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$，其中 $l=0,1,2,\cdots$，$m=1,2,3,\cdots$.

解 与上题类似，有

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_n^m(x)\,\mathrm{P}_{n+2l+1}^{m+1}(x)\,\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} &= \int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^m\frac{\mathrm{d}^m\mathrm{P}_n(x)}{\mathrm{d}x^m}\frac{\mathrm{d}^{m+1}\mathrm{P}_{n+2l+1}(x)}{\mathrm{d}x^{m+1}}\mathrm{d}x \\
&= (-1)^m\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\left[\left(1-x^2\right)^m\frac{\mathrm{d}^m\mathrm{P}_n(x)}{\mathrm{d}x^m}\right]\frac{\mathrm{d}\mathrm{P}_{n+2l+1}(x)}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x \\
&= (-1)^m\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\left[\left(1-x^2\right)^m\frac{\mathrm{d}^m\mathrm{P}_n(x)}{\mathrm{d}x^m}\right]\mathrm{P}_{n+2l+1}(x)\Big|_{-1}^{1} \\
&\quad+(-1)^{m+1}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}^{m+1}}{\mathrm{d}x^{m+1}}\left[\left(1-x^2\right)^m\frac{\mathrm{d}^m\mathrm{P}_n(x)}{\mathrm{d}x^m}\right]\mathrm{P}_{n+2l+1}(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

因为 $\dfrac{\mathrm{d}^{m+1}}{\mathrm{d}x^{m+1}}\left[\left(1-x^2\right)^m\dfrac{\mathrm{d}^m\mathrm{P}_n(x)}{\mathrm{d}x^m}\right]$ 是 $n-1$ 次多项式，与 $\mathrm{P}_{n+2l+1}(x)$ 正交，所以

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_n^m(x)\,\mathrm{P}_{n+2l+1}^{m+1}(x)\,\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} &= (-1)^m\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\left[\left(1-x^2\right)^m\frac{\mathrm{d}^m\mathrm{P}_n(x)}{\mathrm{d}x^m}\right]\mathrm{P}_{n+2l+1}(x)\bigg|_{-1}^{1}\\ &= (-1)^m\frac{\mathrm{d}^m\left(1-x^2\right)^m}{\mathrm{d}x^m}\cdot\frac{\mathrm{d}^m\mathrm{P}_n(x)}{\mathrm{d}x^m}\cdot\mathrm{P}_{n+2l+1}(x)\bigg|_{-1}^{1}\\ &= 2^m m!\cdot\mathrm{P}_m(x)\cdot\frac{\mathrm{d}^m\mathrm{P}_n(x)}{\mathrm{d}x^m}\cdot\mathrm{P}_{n+2l+1}(x)\bigg|_{-1}^{1}\\ &= 2\,\frac{(n+m)!}{(n-m)!}.\end{aligned}\tag{9.130}$$

☞ **讨论**

1. 直接计算，可以证明上述结果在 $m=0$ 时仍成立：

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_n(x)\,\mathrm{P}_{n+2l+1}'(x)\,\mathrm{d}x &= \mathrm{P}_n(x)\,\mathrm{P}_{n+2l+1}(x)\bigg|_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_n'(x)\,\mathrm{P}_{n+2l+1}(x)\,\mathrm{d}x\\ &= 2+0=2.\end{aligned}\tag{9.131}$$

2. 类似地可以证明

$$\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_n^m(x)\,\mathrm{P}_{n+2l+1}^{m-1}(x)\,\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=0,\qquad l=0,1,2,\cdots,\ m=1,2,3,\cdots.\tag{9.132}$$

3. 将 (9.128) 与 (9.130) 式结合起来，又能得到

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_n^m(x)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\mathrm{P}_{n+2l+1}^m(x)\right]\mathrm{d}x\\ &= \int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^{m/2}\frac{\mathrm{d}^m\mathrm{P}_n(x)}{\mathrm{d}x^m}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(1-x^2\right)^{m/2}\frac{\mathrm{d}^m\mathrm{P}_{n+2l+1}(x)}{\mathrm{d}x^m}\right]\mathrm{d}x\\ &= -m\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^{m-1}x\,\frac{\mathrm{d}^m\mathrm{P}_n(x)}{\mathrm{d}x^m}\,\frac{\mathrm{d}^m\mathrm{P}_{n+2l+1}(x)}{\mathrm{d}x^m}\mathrm{d}x\\ &\quad+\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^m\frac{\mathrm{d}^m\mathrm{P}_n(x)}{\mathrm{d}x^m}\,\frac{\mathrm{d}^{m+1}\mathrm{P}_{n+2l+1}(x)}{\mathrm{d}x^{m+1}}\mathrm{d}x\\ &= -m\int_{-1}^{1}\frac{x}{1-x^2}\mathrm{P}_n^m(x)\,\mathrm{P}_{n+2l+1}^m(x)\,\mathrm{d}x+\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_n^m(x)\,\mathrm{P}_{n+2l+1}^n(x)\,\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}\\ &= \frac{(n+m)!}{(n-m)!},\qquad l=0,1,2,\cdots,\ m=1,2,3,\cdots.\end{aligned}\tag{9.133}$$

需要特别注意，此结果不适用于 $m=0$ 的情形.

第十章　涉及球函数的级数展开

§10.1　函数按 Legendre 多项式展开

例 10.1　将函数 $\mathrm{P}_l'(x)$ 按 Legendre 多项式展开.

解　我们知道，$\mathrm{P}_l'(x)$ 是一个 $l-1$ 多项式，并且只含 $x^{l-1}, x^{l-3}, x^{l-5}, \cdots$ 等项，因此

$$\mathrm{P}_l'(x) = c_{l-1}\mathrm{P}_{l-1}(x)+c_{l-3}\mathrm{P}_{l-3}(x)+\cdots = \sum_{k=0}^{[(l-1)/2]} c_{l-2k-1}\mathrm{P}_{l-2k-1}(x),$$

其中

$$c_{l-2k-1} = \frac{2l-4k-1}{2}\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_l'(x)\,\mathrm{P}_{l-2k-1}(x)\,\mathrm{d}x.$$

将上式右端直接分部积分，得

$$\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_l'(x)\,\mathrm{P}_{l-2k-1}(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{P}_l(x)\,\mathrm{P}_{l-2k-1}(x)\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}\mathrm{P}_l(x)\,\mathrm{P}_{l-2k-1}'(x)\,\mathrm{d}x,$$

因为 $\mathrm{P}_{l-2k-1}'(x)$ 是 $l-2k-2$ 次多项式，故而

$$\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_l(x)\,\mathrm{P}_{l-2k-1}'(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

这样就得到

$$\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_l'(x)\,\mathrm{P}_{l-2k-1}(x)\,\mathrm{d}x = 2. \tag{10.1}$$

因此 $c_{l-2k-1} = 2l-4k-1$，最后就得到

$$\mathrm{P}_l'(x) = \sum_{k=0}^{[(l-1)/2]}(2l-4k-1)\mathrm{P}_{l-2k-1}(x). \tag{10.2}$$

例 10.2　将 $\mathrm{P}_\nu(x)$ 按 Legendre 多项式展开，其中 ν 不为整数.

解　为将 $\mathrm{P}_\nu(x)$ 按 Legendre 多项式展开：

$$\mathrm{P}_\nu(x) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l\mathrm{P}_l(x),$$

只需求出系数

$$c_l = \frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_\nu(x)\,\mathrm{P}_l(x)\,\mathrm{d}x.$$

根据积分

$$\int_x^1 \mathrm{P}_\mu(x)\,\mathrm{P}_\nu(x)\,\mathrm{d}x = \frac{(1-x^2)\left[\mathrm{P}'_\mu(x)\,\mathrm{P}_\nu(x) - \mathrm{P}'_\nu(x)\,\mathrm{P}_\mu(x)\right]}{\mu(\mu+1)-\nu(\nu+1)}, \tag{10.3}$$

容易求出

$$c_l = -\frac{2l+1}{2}\frac{1}{l(l+1)-\nu(\nu+1)}\cdot\lim_{x\to-1}\left\{(1-x^2)\left[\mathrm{P}'_\nu(x)\,\mathrm{P}_l(x) - \mathrm{P}_\nu(x)\,\mathrm{P}'_l(x)\right]\right\}.$$

因为 $\mathrm{P}_l(\pm1) = (\pm1)^l$，并且根据 Legendre 方程可以求出

$$\mathrm{P}'_l(\pm1) = (-1)^{l+1}\frac{l(l+1)}{2},$$

同时考虑到 $\mathrm{P}_\nu(x)$ 在 $x=-1$ 点对数发散，所以

$$c_l = \frac{(-1)^{l+1}}{2}\frac{2l+1}{l(l+1)-\nu(\nu+1)}\cdot\lim_{x\to-1}\left[(1-x^2)\mathrm{P}'_\nu(x)\right].$$

根据 Wroński 行列式 $W\left[\mathrm{P}_\nu(x),\,\mathrm{P}_\nu(-x)\right]$ (见 §9.1) 可以求出

$$\lim_{x\to-1}(1-x^2)\mathrm{P}'_\nu(x) = \frac{2}{\pi}\sin\nu\pi,$$

因此就得到

$$\begin{aligned}\mathrm{P}_\nu(x) &= \frac{\sin\nu\pi}{\pi}\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^{l+1}\frac{2l+1}{l(l+1)-\nu(\nu+1)}\mathrm{P}_l(x)\\ &= \frac{\sin\nu\pi}{\pi}\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^{l+1}\left(\frac{1}{l-\nu}+\frac{1}{l+\nu+1}\right)\mathrm{P}_l(x).\end{aligned} \tag{10.4a}$$

特别是，当 $x=1$ 或 $x=0$ 时，有

$$1 = \frac{\sin\nu\pi}{\pi}\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^{l+1}\left(\frac{1}{l-\nu}+\frac{1}{l+\nu+1}\right), \tag{10.5a}$$

$$\mathrm{P}_\nu(0) = -\frac{\sin\nu\pi}{\pi}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2l-\nu}+\frac{1}{2l+\nu+1}\right)\mathrm{P}_{2l}(0). \tag{10.5b}$$

类似地，也可以求得 $\mathrm{P}_\nu(|x|)$ 的展开式. 不同之处在于 $\mathrm{P}_\nu(|x|)$ 是偶函数，所以只含有偶次 Legendre 多项式：

$$\mathrm{P}_\nu(|x|) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l\mathrm{P}_{2l}(x),$$

$$c_l = \frac{4l+1}{2}\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_\nu(|x|)\,\mathrm{P}_{2l}(x)\,\mathrm{d}x = (4l+1)\int_0^1\mathrm{P}_\nu(x)\,\mathrm{P}_{2l}(x)\,\mathrm{d}x.$$

同样根据 (10.3) 式计算出 c_l，就得到

$$\mathrm{P}_\nu(|x|) = -\mathrm{P}_\nu'(0)\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2l-\nu}+\frac{1}{2l+\nu+1}\right)\mathrm{P}_{2l}(0)\,\mathrm{P}_{2l}(x). \tag{10.4b}$$

特别是，当 $x=\pm1$ 时，我们有

$$1 = -\mathrm{P}_\nu'(0)\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2l-\nu}+\frac{1}{2l+\nu+1}\right)\mathrm{P}_{2l}(0). \tag{10.4c}$$

另外，若 $\nu\to$ 偶数 $2k$，又有

$$\mathrm{P}_{2k}(|x|) = \mathrm{P}_{2k}(x) = -\lim_{\nu\to2k}\mathrm{P}_\nu'(0)\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2l-\nu}+\frac{1}{2l+\nu+1}\right)\mathrm{P}_{2l}(0)\,\mathrm{P}_{2l}(x), \tag{10.6a}$$

因而

$$\lim_{\nu\to2k}\left[\frac{1}{2l-\nu}\mathrm{P}_\nu'(0)\,\mathrm{P}_{2l}(0)\right] = -\delta_{kl}. \tag{10.6b}$$

例 10.3　在例 10.2 的基础上，可以进一步计算 $\left.\dfrac{\partial\mathrm{P}_\nu(|x|)}{\partial\nu}\right|_{\nu=2k}$. 第十一章的 §11.2 中要用到这个结果.

由 (10.4) 式，并利用 $\mathrm{P}_\nu(0)$ 及 $\mathrm{P}_\nu'(0)$ 的表达式 (见 (9.2) 及 (9.3) 式) 可得

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\mathrm{P}_\nu(|x|)}{\partial\nu} &= -\frac{\partial\mathrm{P}_\nu'(0)}{\partial\nu}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2l-\nu}+\frac{1}{2l+\nu+1}\right)\mathrm{P}_{2l}(0)\,\mathrm{P}_{2l}(x)\\
&\quad+\mathrm{P}_\nu'(0)\sum_{l=0}^{\infty}\left[\frac{1}{(2l-\nu)^2}-\frac{1}{(2l+\nu+1)^2}\right]\mathrm{P}_{2l}(0)\,\mathrm{P}_{2l}(x)\\
&= -\mathrm{P}_\nu'(0)\left[\psi\left(1+\frac{\nu}{2}\right)-\psi\left(\frac{1+\nu}{2}\right)\right]\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2l-\nu}+\frac{1}{2l+\nu+1}\right)\mathrm{P}_{2l}(0)\,\mathrm{P}_{2l}(x)\\
&\quad-\frac{1}{\mathrm{P}_\nu(0)}\cos^2\frac{\nu\pi}{2}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2l-\nu}+\frac{1}{2l+\nu+1}\right)\mathrm{P}_{2l}(0)\,\mathrm{P}_{2l}(x)\\
&\quad+\mathrm{P}_\nu'(0)\sum_{l=0}^{\infty}\left[\frac{1}{(2l-\nu)^2}-\frac{1}{(2l+\nu+1)^2}\right]\mathrm{P}_{2l}(0)\,\mathrm{P}_{2l}(x).
\end{aligned}$$

代入 $\nu=2k$，注意将和式中的 $l=k$ 项单列，就有

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial\mathrm{P}_\nu(|x|)}{\partial\nu}\right|_{\nu=2k} &= -\frac{1}{\mathrm{P}_{2k}(0)}{\sum_{l=0}^{\infty}}'\left(\frac{1}{2l-2k}+\frac{1}{2l+2k+1}\right)\mathrm{P}_{2l}(0)\,\mathrm{P}_{2l}(x)-\frac{\mathrm{P}_{2k}(x)}{4k+1}\\
&\quad+\lim_{\nu\to2k}\left[\frac{\mathrm{P}_\nu'(0)}{2k-\nu}\right]\cdot\left[\psi(1+k)-\psi\left(k+\frac{1}{2}\right)\right]\mathrm{P}_{2k}(0)\,\mathrm{P}_{2k}(x)
\end{aligned}$$

$$-\lim_{\nu\to 2k}\left[\frac{1}{2k-\nu}\frac{1}{\mathrm{P}_{2k}(0)}+\frac{\mathrm{P}'_{\nu}(0)}{(2k-\nu)^2}\right]\mathrm{P}_{2k}(0)\,\mathrm{P}_{2k}(x)\,.$$

因为

$$\lim_{\nu\to 2k}\frac{\mathrm{P}'_{\nu}(0)}{2k-\nu}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1/2)}\cdot\lim_{\nu\to 2k}\frac{1}{2k-\nu}\sin\frac{\nu\pi}{2}=-\frac{1}{\mathrm{P}_{2k}(0)},\tag{10.7a}$$

同时，

$$\begin{aligned}\lim_{\nu\to 2k}\left[\frac{1}{2k-\nu}\frac{1}{\mathrm{P}_{2k}(0)}+\frac{\mathrm{P}'_{\nu}(0)}{(2k-\nu)^2}\right]&=\lim_{\nu\to 2k}\frac{\mathrm{P}'_{\nu}(0)}{2k-\nu}\times\lim_{\nu\to 2k}\left[\frac{1}{\mathrm{P}'_{\nu}(0)}+\frac{\mathrm{P}_{2k}(0)}{2k-\nu}\right]\frac{1}{\mathrm{P}_{2k}(0)}\\&=-\left[\frac{1}{\mathrm{P}_{2k}(0)}\right]^2\times\lim_{\nu\to k}\left[\frac{1}{\mathrm{P}'_{2\nu}(0)}+\frac{\mathrm{P}_{2k}(0)}{2k-2\nu}\right]\\&=-\frac{1}{2}\frac{1}{\mathrm{P}_{2k}(0)}\left[\psi\left(k+\frac{1}{2}\right)-\psi(k+1)\right],\end{aligned}\tag{10.7b}$$

所以

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial\mathrm{P}_{\nu}(|x|)}{\partial\nu}\right|_{\nu=2k}=&-\frac{1}{\mathrm{P}_{2k}(0)}\sum_{l=0}^{\infty}{}'\left(\frac{1}{2l-2k}+\frac{1}{2l+2k+1}\right)\mathrm{P}_{2l}(0)\,\mathrm{P}_{2l}(x)\\&-\frac{1}{4k+1}\mathrm{P}_{2k}(x)+\frac{1}{2}\left[\psi(1+k)-\psi\left(\frac{1}{2}+k\right)\right]\mathrm{P}_{2k}(x)\,.\end{aligned}\tag{10.8}$$

上面在得到 (10.7b) 式时用到了

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mathrm{P}'_{2\nu}(0)}&=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma(\nu+1/2)}{\Gamma(1+\nu)}\frac{1}{\sin\nu\pi}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma(\nu+1/2)}{\Gamma(1+\nu)}\frac{\cos k\pi}{\sin(\nu-k)\pi}\\&=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma(\nu+1/2)}{\Gamma(1+\nu)}\frac{\cos k\pi}{(\nu-k)\pi-(\nu-k)^3\pi^3/6+\cdots}\\&=\frac{\cos k\pi}{2\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(\nu+1/2)}{\Gamma(1+\nu)}\frac{1}{\nu-k}\left[1+\frac{1}{6}(\nu-k)^2\pi^2+\cdots\right].\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\mathrm{P}'_{2\nu}(0)}+\frac{\mathrm{P}_{2k}(0)}{2\nu-2k}\\&=\frac{1}{2k-2\nu}\left[\frac{\cos k\pi}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(\nu+1/2)}{\Gamma(1+\nu)}-\mathrm{P}_{2k}(0)\right]-\frac{1}{12}\frac{\cos k\pi}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(\nu+1/2)}{\Gamma(1+\nu)}(\nu-k)\pi^2+\cdots\\&=\frac{\cos k\pi}{2\sqrt{\pi}}\frac{1}{\nu-k}\left[\frac{\Gamma(\nu+1/2)}{\Gamma(1+\nu)}-\frac{\Gamma(k+1/2)}{\Gamma(1+k)}\right]-\frac{1}{12}\frac{\cos k\pi}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(\nu+1/2)}{\Gamma(1+\nu)}(\nu-k)\pi^2+\cdots.\end{aligned}$$

最后就有

$$\lim_{\nu\to k}\left[\frac{1}{\mathrm{P}'_{2\nu}(0)}+\frac{\mathrm{P}_{2k}(0)}{2k-2\nu}\right]=\frac{\cos k\pi}{2\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(\nu+1/2)}{\Gamma(1+\nu)}\left[\psi\left(\frac{1}{2}+k\right)-\psi(1+k)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\psi\left(\frac{1}{2}+k\right) - \psi(1+k)\right] \mathrm{P}_{2k}(0). \tag{10.9}$$

作为 (10.8) 式的特殊情形，当 $x = \pm 1$ 时，因为 $\mathrm{P}_\nu(|x|)$ 恒为 1，所以

$$\left.\frac{\partial \mathrm{P}_\nu(|x|)}{\partial \nu}\right|_{\nu=2k, x=\pm 1} = 0.$$

于是就有

$$\sum_{l=0}^{\infty}{}' \left(\frac{1}{2l-2k} + \frac{1}{2l+2k+1}\right) \mathrm{P}_{2l}(0)$$
$$= -\frac{1}{4k+1}\mathrm{P}_{2k}(0) - \frac{1}{2}\left[\psi\left(\frac{1}{2}+k\right) - \psi(1+k)\right] \mathrm{P}_{2k}(0). \tag{10.10}$$

再代回到 (10.8) 式中，又可以将该式改写为

$$\left.\frac{\partial \mathrm{P}_\nu(|x|)}{\partial \nu}\right|_{\nu=2k} = \frac{1}{\mathrm{P}_{2k}(0)} \sum_{l=0}^{\infty}{}' \left(\frac{1}{2l-2k} + \frac{1}{2l+2k+1}\right) \mathrm{P}_{2l}(0)\left[\mathrm{P}_{2k}(x) - \mathrm{P}_{2l}(x)\right]. \tag{10.8'}$$

另一种特殊情形是 $k = 0$. 在 §9.1 中，已经给出了

$$\left.\frac{\partial \mathrm{P}_\nu(\cos\theta)}{\partial \nu}\right|_{\nu=0} = \ln\frac{1+\cos\theta}{2},$$

因此，可以推断

$$\left.\frac{\partial \mathrm{P}_\nu(|\cos\theta|)}{\partial \nu}\right|_{\nu=0} = \ln\frac{1+|\cos\theta|}{2}, \tag{10.11a}$$

亦即

$$\sum_{l=0}^{\infty}{}' \left(\frac{1}{2l} + \frac{1}{2l+1}\right) \mathrm{P}_{2l}(0)\left[1 - \mathrm{P}_{2l}(x)\right] = \ln\frac{1+|x|}{2} \tag{10.11b}$$

或

$$\sum_{l=0}^{\infty}{}' \left(\frac{1}{2l} + \frac{1}{2l+1}\right) \mathrm{P}_{2l}(0)\,\mathrm{P}_{2l}(x) = -\ln\frac{1+|x|}{4} - 1. \tag{10.11c}$$

例 10.4　将函数 $\sin\nu\theta$, $\cos\nu\theta$ 按 Legendre 多项式展开.

解　因为 $\sin\nu\theta$, $\cos\nu\theta$ 满足微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}\theta^2} + \nu^2 w = 0, \tag{10.12a}$$

改用 $x = \cos\theta$ 为自变量，$y(x) = w(\theta)$，则方程变为

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} - x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \nu^2 y = 0. \tag{10.12b}$$

另一方面，将函数 $\sin\nu\theta$, $\cos\nu\theta$ 按 Legendre 多项式 $\mathrm{P}_l(\cos\theta)$ 展开：

$$y(x)=\sum_{l=0}^{\infty}a_l\mathrm{P}_l(x), \tag{10.13}$$

而后代入方程 (10.12b)，即得

$$\sum_{l=0}^{\infty}a_l\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{P}_l(x)}{\mathrm{d}x^2}-x\frac{\mathrm{dP}_l(x)}{\mathrm{d}x}+\nu^2\mathrm{P}_l(x)\right]=0$$

或

$$\sum_{l=0}^{\infty}a_l\left\{x\frac{\mathrm{dP}_l(x)}{\mathrm{d}x}+\left[\nu^2-l(l+1)\right]\mathrm{P}_l(x)\right\}=0.$$

再利用 Legendre 多项式的递推关系

$$\begin{aligned}&x\mathrm{P}_l'(x)-l\mathrm{P}_l(x)-\mathrm{P}_{l-1}'(x)=0, &\qquad l\geqslant 1,\\ &(l+1)\mathrm{P}_l(x)-\mathrm{P}_{l+1}'(x)+x\mathrm{P}_l'(x)=0, &\qquad l\geqslant 0,\end{aligned}$$

即可将上式化为

$$\nu^2a_0\mathrm{P}_0(x)+\sum_{l=2}^{\infty}\frac{\nu^2-(l-1)^2}{2l-1}a_{l-1}\mathrm{P}_l'(x)-\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\nu^2-(l+2)^2}{2l+3}a_{l+1}\mathrm{P}_l'(x)=0.$$

两端积分，即得

$$\nu^2a_0\mathrm{P}_1(x)+\sum_{l=2}^{\infty}\frac{\nu^2-(l-1)^2}{2l-1}a_{l-1}\mathrm{P}_l(x)-\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\nu^2-(l+2)^2}{2l+3}a_{l+1}\mathrm{P}_l(x)+C=0,$$

其中 C 为积分常数. 这样，由 $\mathrm{P}_0(x)$ 项的系数，有

$$-\frac{\nu^2-4}{3}a_1+C=0; \tag{10.14a}$$

比较 $\mathrm{P}_1(x)$ 项的系数，就可以推得

$$a_2=\frac{5\nu^2}{\nu^2-9}a_0; \tag{10.14b}$$

再比较 $\mathrm{P}_l(x)$, $l\geqslant 2$ 项的系数，也可推出

$$a_{l+1}=\frac{2l+3}{2l-1}\frac{\nu^2-(l-1)^2}{\nu^2-(l+2)^2}a_{l-1}, \qquad l\geqslant 2. \tag{10.14c}$$

事实上，还可以将 (10.14b) 和 (10.14c) 式合并写成

$$a_l=\frac{2l+1}{2l-3}\frac{\nu^2-(l-2)^2}{\nu^2-(l+1)^2}a_{l-2}, \qquad l\geqslant 2. \tag{10.14d}$$

反复应用递推关系 (10.14d)，即可求出展开系数

$$\begin{aligned}a_{2l} &= \frac{4l+1}{4l-3}\frac{(2l-\nu-2)(2l+\nu-2)}{(2l-\nu+1)(2l+\nu+1)}a_{2l-2}\\&= \frac{4l+1}{4l-7}\frac{(2l-\nu-2)(2l-\nu-4)}{(2l-\nu+1)(2l-\nu-1)}\frac{(2l+\nu-2)(2l+\nu-4)}{(2l+\nu+1)(2l+\nu-1)}a_{2l-4}\\&=\cdots\\&= (4l+1)\frac{\Gamma(l-\nu/2)\,\Gamma(l+\nu/2)}{\Gamma(-\nu/2)\,\Gamma(\nu/2)}\frac{\Gamma((3-\nu)/2)\,\Gamma((3+\nu)/2)}{\Gamma(l+(3-\nu)/2)\,\Gamma(l+(3+\nu)/2)}a_0,\end{aligned}\tag{10.15a}$$

$$\begin{aligned}a_{2l+1} &= \frac{4l+3}{4l-1}\frac{(2l-\nu-1)(2l+\nu-1)}{(2l-\nu+2)(2l+\nu+2)}a_{2l-1}\\&= \frac{4l+3}{4l-5}\frac{(2l-\nu-1)(2l-\nu-3)}{(2l-\nu+2)(2l-\nu)}\frac{(2l+\nu-1)(2l+\nu-3)}{(2l+\nu+2)(2l+\nu)}a_{2l-3}\\&=\cdots\\&= \frac{4l+1}{3}\frac{\Gamma(l+(1-\nu)/2)\,\Gamma(l+(1+\nu)/2)}{\Gamma((1-\nu)/2)\,\Gamma((1+\nu)/2)}\frac{\Gamma(2-\nu/2)\,\Gamma(2+\nu/2)}{\Gamma(l+2-\nu/2)\,\Gamma(l+2+\nu/2)}a_1.\end{aligned}\tag{10.15b}$$

这样，为了求出 $\sin\nu\theta$, $\cos\nu\theta$ 按 Legendre 多项式的展开式，只需分别求出相应的展开系数 a_0 和 a_1，而后由 (10.15a) 和 (10.15b) 式即可求出全部展开系数.

对于 $\sin\nu\theta$，有

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin\nu\theta\,\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\nu^2}\sin\nu\pi,\tag{10.16a}$$

$$a_1 = \frac{3}{2}\int_0^{\pi}\sin\nu\theta\,\cos\theta\,\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = -\frac{3}{2}\frac{1}{4-\nu^2}\sin\nu\pi,\tag{10.16b}$$

因此

$$\begin{aligned}a_{2l} &= (4l+1)\frac{\Gamma(l-\nu/2)\,\Gamma(l+\nu/2)}{\Gamma(-\nu/2)\,\Gamma(\nu/2)}\frac{\Gamma((3-\nu)/2)\,\Gamma((3+\nu)/2)}{\Gamma(l+(3-\nu)/2)\,\Gamma(l+(3+\nu)/2)}\frac{1}{2}\frac{1}{1-\nu^2}\sin\nu\pi\\&= \frac{\nu}{16}(1+\cos\nu\pi)(4l+1)\frac{\Gamma(l-\nu/2)\,\Gamma(l+\nu/2)}{\Gamma(l+(3-\nu)/2)\,\Gamma(l+(3+\nu)/2)},\end{aligned}\tag{10.16c}$$

$$\begin{aligned}a_{2l+1} &= \frac{4l+1}{3}\frac{\Gamma(l+(1-\nu)/2)\,\Gamma(l+(1+\nu)/2)}{\Gamma((1-\nu)/2)\,\Gamma((1+\nu)/2)}\frac{\Gamma(2-\nu/2)\,\Gamma(2+\nu/2)}{\Gamma(l+2-\nu/2)\,\Gamma(l+2+\nu/2)}\\&\quad\times\left[-\frac{3}{2}\frac{1}{4-\nu^2}\sin\nu\pi\right]\\&= -\frac{\nu}{16}(1-\cos\nu\pi)(4l+3)\frac{\Gamma(l+(1-\nu)/2)\,\Gamma(l+(1+\nu)/2)}{\Gamma(l+2-\nu/2)\,\Gamma(l+2+\nu/2)},\end{aligned}\tag{10.16d}$$

或者统一写成

$$a_l = \frac{\nu}{16}\left[\cos\nu\pi+(-1)^l\right](2l+1)\frac{\Gamma((l-\nu)/2)\,\Gamma((l+\nu)/2)}{\Gamma((l+3-\nu)/2)\,\Gamma((l+3+\nu)/2)}.\tag{10.17}$$

所以

$$\sin\nu\theta = \frac{\nu}{16}\sum_{l=0}^{\infty}\left[\cos\nu\pi + (-1)^l\right](2l+1)\frac{\Gamma((l-\nu)/2)\,\Gamma((l+\nu)/2)}{\Gamma((l+3-\nu)/2)\,\Gamma((l+3+\nu)/2)}\mathrm{P}_l(\cos\theta). \tag{10.18}$$

同样，对于 $\cos\nu\theta$，有

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos\nu\theta\,\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{1-\nu^2}\frac{1+\cos\nu\pi}{2}, \tag{10.19a}$$

$$a_1 = \frac{3}{2}\int_0^{\pi}\cos\nu\theta\,\cos\theta\,\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{3}{4-\nu^2}\frac{1-\cos\nu\pi}{2}, \tag{10.19b}$$

因此

$$\begin{aligned}a_{2l} &= (4l+1)\frac{\Gamma(l-\nu/2)\,\Gamma(l+\nu/2)}{\Gamma(-\nu/2)\,\Gamma(\nu/2)}\frac{\Gamma((3-\nu)/2)\,\Gamma((3+\nu)/2)}{\Gamma(l+(3-\nu)/2)\,\Gamma(l+(3+\nu)/2)}\\ &\quad\times\frac{1}{1-\nu^2}\frac{1+\cos\nu\pi}{2}\\ &= \frac{\nu}{16}\sin\nu\pi\cdot(4l+1)\frac{\Gamma(l-\nu/2)\,\Gamma(l+\nu/2)}{\Gamma(l+(3-\nu)/2)\,\Gamma(l+(3+\nu)/2)},\end{aligned} \tag{10.19c}$$

$$\begin{aligned}a_{2l+1} &= \frac{4l+1}{3}\frac{\Gamma(l+(1-\nu)/2)\,\Gamma(l+(1+\nu)/2)}{\Gamma((1-\nu)/2)\,\Gamma((1+\nu)/2)}\frac{\Gamma(2-\nu/2)\,\Gamma(2+\nu/2)}{\Gamma(l+2-\nu/2)\,\Gamma(l+2+\nu/2)}\\ &\quad\times\frac{3}{4-\nu^2}\frac{1-\cos\nu\pi}{2}\\ &= -\frac{\nu}{16}\sin\nu\pi\cdot(4l+3)\frac{\Gamma(l+(1-\nu)/2)\,\Gamma(l+(1+\nu)/2)}{\Gamma(l+2-\nu/2)\,\Gamma(l+2+\nu/2)},\end{aligned} \tag{10.19d}$$

也可以统一写成

$$a_l = (-1)^l\frac{\nu}{16}(2l+1)\frac{\Gamma((l-\nu)/2)\,\Gamma((l+\nu)/2)}{\Gamma((l+3-\nu)/2)\,\Gamma((l+3+\nu)/2)}\sin\nu\pi. \tag{10.20}$$

所以

$$\cos\nu\theta = \frac{\nu}{16}\sin\nu\pi\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l(2l+1)\frac{\Gamma((l-\nu)/2)\,\Gamma((l+\nu)/2)}{\Gamma((l+3-\nu)/2)\,\Gamma((l+3+\nu)/2)}\mathrm{P}_l(\cos\theta). \tag{10.21}$$

§10.2 Legendre 多项式的 Fourier 展开

Legendre 多项式 $\mathrm{P}_l(\cos\theta)$ 本来是定义在区间 $[0,\pi]$ 上的，但作为 $\cos\theta$ 本身，可以并不受这一限制的约束，所以很自然地可以把 $\mathrm{P}_l(\cos\theta)$ 延拓到区间 $(-\infty,\infty)$ 上，进而将它展开为余弦级数.

为此，我们从 Legendre 多项式的生成函数

$$\frac{1}{\sqrt{1-2t\cos\theta+t^2}}=\sum_{l=0}^{\infty}\mathrm{P}_l(\cos\theta)\,t^l \tag{10.22}$$

出发. 因为

$$1-2t\cos\theta+t^2=1-t\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right)+t^2=\left(1-t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\left(1-t\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right),$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1-2t\cos\theta+t^2}}&=\left(1-t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^{-1/2}\left(1-t\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right)^{-1/2}\\&=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\Big(-\frac{1}{2}\Big)\Big(-\frac{3}{2}\Big)\cdots\Big(-m+\frac{1}{2}\Big)\big(-t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\big)^m\\&\quad\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\Big(-\frac{1}{2}\Big)\Big(-\frac{3}{2}\Big)\cdots\Big(-n+\frac{1}{2}\Big)\big(-t\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\big)^n\\&=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{m+n}}\frac{(2m-1)!!}{m!}\frac{(2n-1)!!}{n!}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(m-n)\theta}\,t^{m+n}\\&=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{l}\frac{1}{2^l}\frac{(2l-2n-1)!!}{(l-n)!}\frac{(2n-1)!!}{n!}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(l-2n)\theta}\,t^l.\end{aligned}$$

比较 (10.22) 式，就得到

$$\mathrm{P}_l(\cos\theta)=\frac{1}{2^l}\sum_{n=0}^{l}\frac{(2l-2n-1)!!\,(2n-1)!!}{(l-n)!\,n!}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(l-2n)\theta}.$$

由于 $\mathrm{P}_l(\cos\theta)$ 是实函数，所以上式右端的虚部应为 0. 这样就得到了 $\mathrm{P}_l(\cos\theta)$ 的余弦展开：

$$\mathrm{P}_l(\cos\theta)=\frac{1}{2^l}\sum_{n=0}^{l}\frac{(2l-2n-1)!!\,(2n-1)!!}{(l-n)!\,n!}\cos(l-2n)\theta. \tag{10.23}$$

此式的右端共有 $l+1$ 项，其中的 $n=0$ 项与 $n=l$ 项完全相同，$n=1$ 项与 $n=l-1$ 项完全相同，$\cdots$. 这样，当 l 为奇数 $2k+1$ 时，

$$\mathrm{P}_{2k+1}(\cos\theta)=\frac{1}{2^{2k}}\sum_{n=0}^{k}\frac{(4k-2n+1)!!\,(2n-1)!!}{(2k-n+1)!\,n!}\cos(2k-2n+1)\theta; \tag{10.24}$$

当 l 为偶数 $2k$ 时，

$$\mathrm{P}_{2k}(\cos\theta)=\frac{1}{2^{2k-1}}\sum_{n=0}^{k-1}\frac{(4k-2n-1)!!\,(2n-1)!!}{(2k-n)!\,n!}\cos(2k-2n)\theta+\frac{1}{2^{2k}}\left[\frac{(2k-1)!!}{k!}\right]^2. \tag{10.25}$$

从原则上说，我们还可以撇开 θ 角在球坐标中的特定含义，而纯粹从数学的角度，将 $\mathrm{P}_l(\cos\theta)$ 奇延拓到区间 $[-\pi,0]$ 上，然后再周期延拓到区间 $(-\infty,\infty)$ 上. 这时又可以将 $\mathrm{P}_l(\cos\theta)$ 展开为正弦级数：

$$\mathrm{P}_l(\cos\theta)=\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(l+k)!}{k!}\frac{\Gamma(k+1/2)}{\Gamma(l+k+3/2)}\sin(l+2k+1)\theta. \tag{10.26}$$

但推导过程略为复杂一些，从略[①].

§10.3　Legendre 多项式积分表示的应用

由 Legendre 多项式的微分表示

$$\mathrm{P}_l(x)=\frac{1}{2^l l!}\frac{\mathrm{d}^l(x^2-1)^l}{\mathrm{d}x^l},$$

再根据解析函数的高阶微商公式，就能将 $\mathrm{P}_l(x)$ 表示为围道积分

$$\mathrm{P}_l(x)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{1}{(t-x)^{l+1}}\left(\frac{t^2-1}{2}\right)^l\mathrm{d}t,$$

其中 C 为围绕 $t=x$ 点正向一周的闭合围道. 现在取 C 为以 $t=x$ 点为圆心、$\left|x^2-1\right|^{1/2}$ 为半径的圆周，则在此圆周上，

$$t=x+\sqrt{x^2-1}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi},\qquad \mathrm{d}t=\sqrt{x^2-1}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\mathrm{i}\mathrm{d}\phi=\mathrm{i}(t-x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\mathrm{d}\phi,$$

$$\begin{aligned}\frac{t^2-1}{t-x}&=t+x+\frac{x^2-1}{t-x}=2x+\sqrt{x^2-1}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}+\sqrt{x^2-1}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}\\&=2\left(x+\sqrt{x^2-1}\cos\phi\right),\end{aligned}$$

所以就得到 Legendre 多项式的积分表示

$$\begin{aligned}\mathrm{P}_l(x)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(x+\sqrt{x^2-1}\cos\phi\right)^l\mathrm{d}\phi\\&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(x+\sqrt{x^2-1}\cos\phi\right)^l\mathrm{d}\phi.\end{aligned} \tag{10.27}$$

值得注意，此积分与函数 $\sqrt{x^2-1}$ 的单值分枝规定无关. 事实上，作变换 $\phi\mapsto\pi-\phi$，就可以证明

$$\mathrm{P}_l(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(x-\sqrt{x^2-1}\cos\phi\right)^l\mathrm{d}\phi. \tag{10.27'}$$

此积分表示适合于用来求某些含 Legendre 多项式的级数和.

---

① 例如，读者可参阅：莫叶. 勒襄特函数论. 济南：山东大学出版社，1988.

例 10.5　求 $\sum_{l=0}^{n}\frac{n!}{l!(n-l)!}\mathrm{P}_l(x)\,t^l$ 之和.

解　直接代入 Legendre 多项式的积分表示 (10.27)，并交换求和与积分的次序，则得

$$\begin{aligned}\sum_{l=0}^{n}\frac{n!}{l!(n-l)!}\mathrm{P}_l(x)\,t^l &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi\sum_{l=0}^{n}\frac{n!}{l!(n-l)!}\left(x+\sqrt{x^2-1}\,\cos\phi\right)^l t^l\mathrm{d}\phi\\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi\left(1+tx+t\sqrt{x^2-1}\,\cos\phi\right)^n\mathrm{d}\phi.\end{aligned}$$

但因为

$$\begin{aligned}1+tx+t\sqrt{x^2-1}\,\cos\phi &= \sqrt{1+2tx+t^2}\cdot\frac{1+tx+t\sqrt{x^2-1}\,\cos\phi}{\sqrt{1+2tx+t^2}}\\ &= \sqrt{1+2tx+t^2}\left[\frac{1+tx}{\sqrt{1+2tx+t^2}}+\sqrt{\left(\frac{1+tx}{\sqrt{1+2tx+t^2}}\right)^2-1}\,\cos\phi\right],\end{aligned}$$

所以就求得

$$\begin{aligned}&\sum_{l=0}^{n}\frac{n!}{l!(n-l)!}\mathrm{P}_l(x)\,t^l\\ &\quad=\frac{\left(1+2tx+t^2\right)^{n/2}}{\pi}\int_0^\pi\left[\frac{1+tx}{\sqrt{1+2tx+t^2}}+\sqrt{\left(\frac{1+tx}{\sqrt{1+2tx+t^2}}\right)^2-1}\,\cos\phi\right]^n\mathrm{d}\phi\\ &\quad=\left(1+2tx+t^2\right)^{n/2}\mathrm{P}_n\left(\frac{1+tx}{\sqrt{1+2tx+t^2}}\right).\end{aligned}\tag{10.28}$$

特别是当 $t=1$ 时，有

$$\sum_{l=0}^{n}\frac{n!}{l!(n-l)!}\mathrm{P}_l(x)=2^{n/2}(1+x)^{n/2}\mathrm{P}_n\left(\sqrt{\frac{1+x}{2}}\right),\tag{10.29a}$$

或者写成

$$\sum_{l=0}^{n}\frac{n!}{l!(n-l)!}\mathrm{P}_l(\cos\theta)=2^n\cos^n\frac{\theta}{2}\times\mathrm{P}_n\left(\cos\frac{\theta}{2}\right).\tag{10.29b}$$

例 10.6　求级数 $\sum_{l=0}^{\infty}\frac{r^l}{l!}\mathrm{P}_l(\cos\theta)$ 之和.

解　仍利用 (10.27) 式. 注意当 $x=\cos\theta$ 时，有

$$x+\sqrt{x^2-1}\,\cos\phi=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta\cos\phi,$$

所以

$$\begin{aligned}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{r^l}{l!}\mathrm{P}_l(\cos\theta)&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{r^l}{l!}(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta\cos\phi)^l\mathrm{d}\phi\\&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta\cos\phi)}\mathrm{d}\phi\\&=\mathrm{e}^{r\cos\theta}\mathrm{J}_0(r\sin\theta).\end{aligned}\tag{10.30}$$

这里用到了 Bessel 函数的积分表示.

例 10.7 求级数和 $\displaystyle\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l}\mathrm{P}_l(x)t^l$ 与 $\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l+1}\mathrm{P}_l(x)t^l$.

解 就此二级数而言，当然也可以仿造上两题的方法计算. 但是更简单的办法或许是直接使用 Legendre 多项式的生成函数. 为此设

$$f(t)=\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l}\mathrm{P}_l(x)t^l,\qquad g(t)=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l+1}\mathrm{P}_l(x)t^l,$$

则显然有

$$\begin{aligned}f'(t)&=\sum_{l=1}^{\infty}\mathrm{P}_l(x)t^{l-1}=\frac{1}{t}\left(\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}-1\right),\\\big[tg(t)\big]'&=\sum_{l=0}^{\infty}\mathrm{P}_l(x)t^l=\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}f(t)&=\int_0^t\left(\frac{1}{\sqrt{1-2x\tau+\tau^2}}-1\right)\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau}=-\ln\left(2-2x\tau+2\sqrt{1-2x\tau+\tau^2}\right)\Big|_0^t\\&=\ln 2-\ln\left(1-xt+\sqrt{1-2xt+t^2}\right),\\tg(t)&=\int_0^t\frac{\mathrm{d}\tau}{\sqrt{1-2x\tau+\tau^2}}=\ln\left(2\sqrt{1-2x\tau+\tau^2}+2\tau-2x\right)\Big|_0^t\\&=\ln\left(\sqrt{1-2xt+t^2}+t-x\right)-\ln(1-x),\end{aligned}$$

亦即

$$\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l}\mathrm{P}_l(x)t^l=\ln 2-\ln\left(1-xt+\sqrt{1-2xt+t^2}\right),\tag{10.31}$$

$$\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l+1}\mathrm{P}_l(x)t^l=\frac{1}{t}\ln\frac{t-x+\sqrt{1-2xt+t^2}}{1-x}.\tag{10.32}$$

将两式相加减，即得

$$\begin{aligned}&\sum_{l=1}^{\infty}\frac{2l+1}{l(l+1)}\mathrm{P}_l\left(x\right)t^l\\&\quad=\ln 2-1-\ln\left(1-xt+\sqrt{1-2xt+t^2}\,\right)+\frac{1}{t}\ln\frac{t-x+\sqrt{1-2xt+t^2}}{1-x},\end{aligned}\tag{10.33}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l(l+1)}\mathrm{P}_l\left(x\right)t^l\\&\quad=\ln 2+1-\ln\left(1-xt+\sqrt{1-2xt+t^2}\,\right)-\frac{1}{t}\ln\frac{t-x+\sqrt{1-2xt+t^2}}{1-x}.\end{aligned}\tag{10.34}$$

在 (10.31) — (10.34) 式中作代换 $t\mapsto -t$ 或 $x\mapsto -x$，就可以导出

$$\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(-1)^l}{l}\mathrm{P}_l\left(x\right)t^l=\ln 2-\ln\left(1+xt+\sqrt{1+2xt+t^2}\,\right),\tag{10.35}$$

$$\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l}{l+1}\mathrm{P}_l\left(x\right)t^l=\frac{1}{t}\ln\frac{t+x+\sqrt{1+2xt+t^2}}{1+x},\tag{10.36}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^l\frac{2l+1}{l(l+1)}\mathrm{P}_l\left(x\right)t^l\\&\quad=\ln 2-1-\ln\left(1+xt+\sqrt{1+2xt+t^2}\,\right)+\frac{1}{t}\ln\frac{t+x+\sqrt{1+2xt+t^2}}{1+x},\end{aligned}\tag{10.37}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(-1)^l}{l(l+1)}\mathrm{P}_l\left(x\right)t^l\\&\quad=\ln 2+1-\ln\left(1+xt+\sqrt{1+2xt+t^2}\,\right)-\frac{1}{t}\ln\frac{t+x+\sqrt{1+2xt+t^2}}{1+x}.\end{aligned}\tag{10.38}$$

再与 (10.31) — (10.34) 诸式相加减，又能得到

$$\begin{aligned}&\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{2l}\mathrm{P}_{2l}\left(x\right)t^{2l}\\&\quad=\ln 2-\frac{1}{2}\ln\left(1-xt+\sqrt{1-2xt+t^2}\right)-\frac{1}{2}\ln\left(1+xt+\sqrt{1+2xt+t^2}\right),\end{aligned}\tag{10.39}$$

$$\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{2l+1}\mathrm{P}_{2l+1}\left(x\right)t^{2l+1}=\frac{1}{2}\ln\frac{1+xt+\sqrt{1+2xt+t^2}}{1-xt+\sqrt{1-2xt+t^2}},\tag{10.40}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{2l+1}\mathrm{P}_{2l}\left(x\right)t^{2l}\\&\quad=\frac{1}{2t}\ln\frac{t-x+\sqrt{1-2xt+t^2}}{1-x}+\frac{1}{2t}\ln\frac{t+x+\sqrt{1+2xt+t^2}}{1+x},\end{aligned}\tag{10.41}$$

$$\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{2l+2}\mathrm{P}_{2l+1}(x)\,t^{2l+1}$$
$$=\frac{1}{2t}\ln\frac{t-x+\sqrt{1-2xt+t^2}}{1-x}-\frac{1}{2t}\ln\frac{t+x+\sqrt{1+2xt+t^2}}{1+x}, \tag{10.42}$$

$$\sum_{l=1}^{\infty}\frac{4l+1}{2l(2l+1)}\mathrm{P}_{2l}(x)\,t^{2l}$$
$$=\ln 2-1-\frac{1}{2}\ln\left(1-xt+\sqrt{1-2xt+t^2}\right)-\frac{1}{2}\ln\left(1+xt+\sqrt{1+2xt+t^2}\right)$$
$$+\frac{1}{2t}\ln\frac{t-x+\sqrt{1-2xt+t^2}}{1-x}+\frac{1}{2t}\ln\frac{t+x+\sqrt{1+2xt+t^2}}{1+x}, \tag{10.43}$$

$$\sum_{l=0}^{\infty}\frac{4l+3}{(2l+1)(2l+2)}\mathrm{P}_{2l+1}(x)\,t^{2l+1}$$
$$=\frac{1}{2}\ln\frac{1+xt+\sqrt{1+2xt+t^2}}{1-xt+\sqrt{1-2xt+t^2}}+\frac{1}{2t}\ln\frac{t-x+\sqrt{1-2xt+t^2}}{1-x}$$
$$-\frac{1}{2t}\ln\frac{t+x+\sqrt{1+2xt+t^2}}{1+x}, \tag{10.44}$$

$$\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{2l(2l+1)}\mathrm{P}_{2l}(x)\,t^{2l}$$
$$=\ln 2+1-\frac{1}{2}\ln\left[\left(1-xt+\sqrt{1-2xt+t^2}\right)\left(1+xt+\sqrt{1+2xt+t^2}\right)\right]$$
$$-\frac{1}{2t}\ln\frac{t-x+\sqrt{1-2xt+t^2}}{1-x}-\ln\frac{t+x+\sqrt{1+2xt+t^2}}{1+x}, \tag{10.45}$$

$$\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{(2l+1)(2l+2)}\mathrm{P}_{2l+1}(x)\,t^{2l+1}$$
$$=\frac{1}{2}\ln\frac{1+xt+\sqrt{1+2xt+t^2}}{1-xt+\sqrt{1-2xt+t^2}}-\frac{1}{2t}\ln\frac{t-x+\sqrt{1-2xt+t^2}}{1-x}$$
$$+\frac{1}{2t}\ln\frac{t+x+\sqrt{1+2xt+t^2}}{1+x}. \tag{10.46}$$

将 (10.31) — (10.34) 式对 x 求导，并略加化简，又有

$$\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l}\mathrm{P}_l'(x)\,t^l=\frac{1}{1-x^2}\left(\frac{t-x}{\sqrt{1-2xt+t^2}}+x\right), \tag{10.47}$$

$$\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l+1}\mathrm{P}_l'(x)\,t^l=\frac{1}{t}\frac{1}{1-x^2}\left(\frac{xt-1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}+1\right); \tag{10.48}$$

$$\sum_{l=1}^{\infty}\frac{2l+1}{l(l+1)}\mathrm{P}_l'(x)\,t^l=\frac{1}{t}\frac{1}{1-x^2}\left(xt+1-\frac{1-t^2}{\sqrt{1-2xt+t^2}}\right), \tag{10.49}$$

$$\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l(l+1)}\mathrm{P}_l'(x)\,t^l=\frac{1}{t}\frac{1}{1-x^2}\left(xt-1+\sqrt{1-2xt+t^2}\right).\tag{10.50}$$

再次作代换 $x\mapsto -x$ 或 $t\mapsto -t$，得

$$\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(-1)^l}{l}\mathrm{P}_l'(x)\,t^l=\frac{1}{1-x^2}\left(x-\frac{t+x}{\sqrt{1+2xt+t^2}}\right),\tag{10.51}$$

$$\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(-1)^l}{l+1}\mathrm{P}_l'(x)\,t^l=\frac{1}{t}\frac{1}{1-x^2}\left(\frac{xt+1}{\sqrt{1+2xt+t^2}}-1\right);\tag{10.52}$$

$$\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^l\frac{2l+1}{l(l+1)}\mathrm{P}_l'(x)\,t^l=\frac{1}{t}\frac{1}{1-x^2}\left(xt-1+\frac{1-t^2}{\sqrt{1+2xt+t^2}}\right),\tag{10.53}$$

$$\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(-1)^l}{l(l+1)}\mathrm{P}_l'(x)\,t^l=\frac{1}{t}\frac{1}{1-x^2}\left(xt+1-\sqrt{1+2xt+t^2}\right).\tag{10.54}$$

而后与 (10.47) — (10.50) 诸式相加减，又可导出

$$\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{2l}\mathrm{P}_{2l}'(x)\,t^{2l}=\frac{x}{1-x^2}+\frac{1}{2}\frac{1}{1-x^2}\left(\frac{t-x}{\sqrt{1-2xt+t^2}}-\frac{t+x}{\sqrt{1+2xt+t^2}}\right),\tag{10.55}$$

$$\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{2l+1}\mathrm{P}_{2l+1}'(x)\,t^{2l+1}=\frac{1}{2}\frac{1}{1-x^2}\left(\frac{t-x}{\sqrt{1-2xt+t^2}}+\frac{t+x}{\sqrt{1+2xt+t^2}}\right),\tag{10.56}$$

$$\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{2l+1}\mathrm{P}_{2l}'(x)\,t^{2l}=\frac{1}{2t}\frac{1}{1-x^2}\left(\frac{xt-1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}+\frac{xt+1}{\sqrt{1+2xt+t^2}}\right),\tag{10.57}$$

$$\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{2l+2}\mathrm{P}_{2l+1}'(x)\,t^{2l+1}$$
$$=\frac{1}{t}\frac{1}{1-x^2}+\frac{1}{2t}\frac{1}{1-x^2}\left(\frac{xt-1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}-\frac{xt+1}{\sqrt{1+2xt+t^2}}\right),\tag{10.58}$$

$$\sum_{l=1}^{\infty}\frac{4l+1}{2l(2l+1)}\mathrm{P}_{2l}'(x)\,t^{2l}$$
$$=\frac{x}{1-x^2}+\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\frac{1}{1-x^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}-\frac{1}{\sqrt{1+2xt+t^2}}\right),\tag{10.59}$$

$$\sum_{l=0}^{\infty}\frac{4l+3}{(2l+1)(2l+2)}\mathrm{P}_{2l+1}'(x)\,t^{2l+1}$$
$$=\frac{1}{t}\frac{1}{1-x^2}+\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\frac{1}{1-x^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+2xt+t^2}}\right),\tag{10.60}$$

$$\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{2l(2l+1)}\mathrm{P}_{2l}'(x)\,t^{2l}$$

$$= \frac{x}{1-x^2} + \frac{1}{2t}\frac{1}{1-x^2}\left(\sqrt{1-2xt+t^2} - \sqrt{1+2xt+t^2}\right), \tag{10.61}$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(2l+1)(2l+2)} \mathrm{P}'_{2l+1}(x)\, t^{2l+1}$$
$$= -\frac{1}{t}\frac{1}{1-x^2} + \frac{1}{2t}\frac{1}{1-x^2}\left(\sqrt{1-2xt+t^2} + \sqrt{1+2xt+t^2}\right). \tag{10.62}$$

在 (10.31) —(10.62) 诸式中还可以代入 $t=1$，从而导出：

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l} \mathrm{P}_l(x) = \ln 2 - \ln\left(1 - x + \sqrt{2-2x}\right), \tag{10.63}$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l+1} \mathrm{P}_l(x) = \ln\left(1 + \sqrt{\frac{2}{1-x}}\right), \tag{10.64}$$

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{2l+1}{l(l+1)} \mathrm{P}_l(x) = \ln 2 - 1 - \ln(1-x), \tag{10.65}$$

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l(l+1)} \mathrm{P}_l(x) = \ln 2 + 1 - 2\ln\left(1 - x + \sqrt{2-2x}\right) + \ln(1-x); \tag{10.66}$$

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l} \mathrm{P}_l(x) = \ln 2 - \ln\left(1+x+\sqrt{2+2x}\right), \tag{10.67}$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l+1} \mathrm{P}_l(x) = \ln\left(1 + \sqrt{\frac{2}{1+x}}\right), \tag{10.68}$$

$$\sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l \frac{2l+1}{l(l+1)} \mathrm{P}_l(x) = \ln 2 - 1 - \ln(1+x), \tag{10.69}$$

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l(l+1)} \mathrm{P}_l(x) = \ln 2 + 1 - 2\ln\left(1+x+\sqrt{2+2x}\right) + \ln(1+x); \tag{10.70}$$

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{2l} \mathrm{P}_{2l}(x) = \ln 2 - \frac{1}{2}\ln\left(1-x+\sqrt{2-2x}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(1+x+\sqrt{2+2x}\right), \tag{10.71}$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2l+1} \mathrm{P}_{2l+1}(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x+\sqrt{2+2x}}{1-x+\sqrt{2-2x}}, \tag{10.72}$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2l+1} \mathrm{P}_{2l}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(1 + \sqrt{\frac{2}{1-x}}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(1 + \sqrt{\frac{2}{1+x}}\right), \tag{10.73}$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2l+2} \mathrm{P}_{2l+1}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(1 + \sqrt{\frac{2}{1-x}}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(1 + \sqrt{\frac{2}{1+x}}\right); \tag{10.74}$$

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{4l+1}{2l(2l+1)} \mathrm{P}_{2l}(x) = \ln 2 - 1 - \frac{1}{2}\ln\left(1-x^2\right), \tag{10.75}$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{4l+3}{(2l+1)(2l+2)} \mathrm{P}_{2l+1}(x) = -\frac{1}{2} \ln \frac{1-x}{1+x}, \tag{10.76}$$

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{2l(2l+1)} \mathrm{P}_{2l}(x)$$

$$= \ln 2 + 1 - \ln\left(1-x+\sqrt{2-2x}\right) - \ln\left(1+x+\sqrt{2+2x}\right) + \frac{1}{2} \ln\left(1-x^2\right), \tag{10.77}$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(2l+1)(2l+2)} \mathrm{P}_{2l+1}(x) = \ln \frac{1+x+\sqrt{2+2x}}{1-x+\sqrt{2-2x}} + \frac{1}{2} \ln \frac{1-x}{1+x}; \tag{10.78}$$

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l} \mathrm{P}_l'(x) = \frac{1}{1-x^2} \left(\sqrt{\frac{1-x}{2}} + x \right), \tag{10.79}$$

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l+1} \mathrm{P}_l'(x) = \frac{1}{1-x^2} \left(1 - \sqrt{\frac{1-x}{2}} \right), \tag{10.80}$$

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{2l+1}{l(l+1)} \mathrm{P}_l'(x) = \frac{1}{1-x}, \tag{10.81}$$

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l(l+1)} \mathrm{P}_l'(x) = \frac{1}{1+x} \left(-1 + \sqrt{\frac{2}{1-x}} \right); \tag{10.82}$$

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l} \mathrm{P}_l'(x) = \frac{1}{1-x^2} \left(x - \sqrt{\frac{1+x}{2}} \right), \tag{10.83}$$

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l+1} \mathrm{P}_l'(x) = \frac{1}{1-x^2} \left(-1 + \sqrt{\frac{1+x}{2}} \right), \tag{10.84}$$

$$\sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l \frac{2l+1}{l(l+1)} \mathrm{P}_l'(x) = -\frac{1}{1+x}, \tag{10.85}$$

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l(l+1)} \mathrm{P}_l'(x) = \frac{1}{1-x} \left(1 - \sqrt{\frac{2}{1+x}} \right); \tag{10.86}$$

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{2l} \mathrm{P}_{2l}'(x) = \frac{x}{1-x^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{1-x^2} \left(\sqrt{\frac{1-x}{2}} - \sqrt{\frac{1+x}{2}} \right), \tag{10.87}$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2l+1} \mathrm{P}_{2l+1}'(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{1-x^2} \left(\sqrt{\frac{1-x}{2}} + \sqrt{\frac{1+x}{2}} \right), \tag{10.88}$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2l+1} \mathrm{P}_{2l}'(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{1-x^2} \left(-\sqrt{\frac{1-x}{2}} + \sqrt{\frac{1+x}{2}} \right), \tag{10.89}$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2l+2} \mathrm{P}_{2l+1}'(x) = \frac{1}{1-x^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{1-x^2} \left(\sqrt{\frac{1-x}{2}} + \sqrt{\frac{1+x}{2}} \right); \tag{10.90}$$

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{4l+1}{2l(2l+1)} \mathrm{P}'_{2l}(x) = \frac{x}{1-x^2}, \tag{10.91}$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{4l+3}{(2l+1)(2l+2)} \mathrm{P}'_{2l+1}(x) = \frac{1}{1-x^2}, \tag{10.92}$$

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{2l(2l+1)} \mathrm{P}'_{2l}(x) = \frac{x}{1-x^2} + \frac{1}{1-x^2}\left(\sqrt{\frac{1-x}{2}} - \sqrt{\frac{1+x}{2}}\right), \tag{10.93}$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(2l+1)(2l+2)} \mathrm{P}'_{2l+1}(x) = -\frac{1}{1-x^2} + \frac{1}{1-x^2}\left(\sqrt{\frac{1-x}{2}} + \sqrt{\frac{1+x}{2}}\right). \tag{10.94}$$

以上的和式中还可以代入特殊值 $x=0$，这时需要注意 $\mathrm{P}_{2l+1}(0) = \mathrm{P}'_{2l}(0) = 0$，因而有

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{2l} \mathrm{P}_{2l}(0)\, t^{2l} = \ln 2 - \ln\left(1+\sqrt{1+t^2}\right), \tag{10.95}$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2l+1} \mathrm{P}_{2l}(0)\, t^{2l} = \frac{1}{t} \ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right), \tag{10.96}$$

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{4l+1}{2l(2l+1)} \mathrm{P}_{2l}(0)\, t^{2l} = \ln 2 - 1 - \ln\left(1+\sqrt{1+t^2}\right) + \frac{1}{t} \ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right), \tag{10.97}$$

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{2l(2l+1)} \mathrm{P}_{2l}(0)\, t^{2l} = \ln 2 + 1 - \ln\left(1+\sqrt{1+t^2}\right) - \frac{1}{t} \ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right); \tag{10.98}$$

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{2l} \mathrm{P}_{2l}(0) = \ln 2 - \ln\left(1+\sqrt{2}\right), \tag{10.99}$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2l+1} \mathrm{P}_{2l}(0) = \ln\left(1+\sqrt{2}\right), \tag{10.100}$$

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{4l+1}{2l(2l+1)} \mathrm{P}_{2l}(0) = \ln 2 - 1, \tag{10.101}$$

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{2l(2l+1)} \mathrm{P}_{2l}(0)\, t^{2l} = \ln 2 + 1 - 2\ln\left(1+\sqrt{2}\right); \tag{10.102}$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2l+1} \mathrm{P}'_{2l+1}(0)\, t^{2l+1} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \tag{10.103}$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2l+2} \mathrm{P}'_{2l+1}(0)\, t^{2l+1} = \frac{1}{t}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right), \tag{10.104}$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{4l+3}{(2l+1)(2l+2)} \mathrm{P}'_{2l+1}(0)\, t^{2l+1} = \frac{1}{t}\left(1 - \frac{1-t^2}{\sqrt{1+t^2}}\right), \tag{10.105}$$

$$\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{(2l+1)(2l+2)}\mathrm{P}'_{2l+1}(0)\,t^{2l+1}=\frac{1}{t}\left(\sqrt{1+t^2}-1\right); \tag{10.106}$$

$$\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{2l+1}\mathrm{P}'_{2l+1}(0)=\frac{1}{\sqrt{2}}, \tag{10.107}$$

$$\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{2l+2}\mathrm{P}'_{2l+1}(0)\,t^{2l+1}=1-\frac{1}{\sqrt{2}}, \tag{10.108}$$

$$\sum_{l=0}^{\infty}\frac{4l+3}{(2l+1)(2l+2)}\mathrm{P}'_{2l+1}(0)=1, \tag{10.109}$$

$$\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{(2l+1)(2l+2)}\mathrm{P}'_{2l+1}(0)=\sqrt{2}-1. \tag{10.110}$$

§10.4 连带 Legendre 函数加法公式的应用

上一节中得到的一些公式，再结合连带 Legendre 函数加法公式，可以演绎出一些新的、近乎奇妙的结果.

在介绍这些结果之前，作为准备，先要介绍几个积分公式.

预备公式 设

$$\cos\gamma=\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos\phi,\qquad 0<\theta,\ \theta'<\pi,$$

则

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\ln(1-\cos\gamma)\,\mathrm{d}\phi=\begin{cases}\ln\dfrac{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta')}{2}, & \theta\leqslant\theta',\\[2ex] \ln\dfrac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta')}{2}, & \theta\geqslant\theta',\end{cases} \tag{10.111}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\ln(1-\cos\gamma)\cos m\phi\,\mathrm{d}\phi=\begin{cases}-\dfrac{1}{m}\left(\tan\dfrac{\theta}{2}\cot\dfrac{\theta'}{2}\right)^m, & \theta\leqslant\theta',\\[2ex] -\dfrac{1}{m}\left(\cot\dfrac{\theta}{2}\tan\dfrac{\theta'}{2}\right)^m, & \theta\geqslant\theta'.\end{cases} \tag{10.112}$$

解 本质上这是将函数 $\ln(1\mp\cos\gamma)$ 作 Fourier 展开的问题. 令

$$1-\cos\gamma=\ln A+\ln\left(1-2r\cos\phi+r^2\right),$$

于是

$$A\left(1+r^2\right)=1-\cos\theta\cos\theta',\qquad 2Ar=\sin\theta\sin\theta'.$$

不妨限定 $r^2<1$，即可解得

$$A=\begin{cases}\dfrac{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta')}{2}, & \theta\leqslant\theta',\\[2mm] \dfrac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta')}{2}, & \theta\geqslant\theta',\end{cases}$$

$$r=\begin{cases}\tan\dfrac{\theta}{2}\cot\dfrac{\theta'}{2}, & \theta\leqslant\theta',\\[2mm] \cot\dfrac{\theta}{2}\tan\dfrac{\theta'}{2}, & \theta\geqslant\theta'.\end{cases}$$

再进一步，利用

$$\begin{aligned}\ln(1-2r\cos\phi+r^2)&=\ln\left(1-re^{i\phi}\right)+\ln\left(1-e^{-i\phi}\right)\\ &=-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2}{m}r^m\cos m\phi,\qquad r^2<1,\end{aligned}$$

就能得到

$$\begin{aligned}&\ln(1-\cos\gamma)=\ln(1-\cos\theta\cos\theta'-\sin\theta\sin\theta'\cos\phi)\\ &=\begin{cases}\ln\dfrac{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta')}{2}-\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2}{m}\left(\tan\frac{\theta}{2}\cot\frac{\theta'}{2}\right)^m\cos m\phi, & \theta\leqslant\theta',\\[2mm] \ln\dfrac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta')}{2}-\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2}{m}\left(\cot\frac{\theta}{2}\tan\frac{\theta'}{2}\right)^m\cos m\phi, & \theta\geqslant\theta'.\end{cases}\end{aligned}$$

这样就证得了 (10.111) 和 (10.112) 二式.

☞ **讨论** 类似地，也可以计算

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\ln(1+\cos\gamma)\,d\phi=\begin{cases}\ln\dfrac{(1+\cos\theta)(1+\cos\theta')}{2}, & \theta+\theta'\leqslant\pi,\\[2mm] \ln\dfrac{(1-\cos\theta)(1-\cos\theta')}{2}, & \theta+\theta'\geqslant\pi;\end{cases}\tag{10.113}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\ln(1+\cos\gamma)\cos m\phi\,d\phi=\begin{cases}\dfrac{(-1)^{m+1}}{m}\left(\tan\dfrac{\theta}{2}\tan\dfrac{\theta'}{2}\right)^m, & \theta+\theta'\leqslant\pi,\\[2mm] \dfrac{(-1)^{m+1}}{m}\left(\cot\dfrac{\theta}{2}\cot\dfrac{\theta'}{2}\right)^m, & \theta+\theta'\geqslant\pi.\end{cases}\tag{10.114}$$

例 10.8 (10.65) 式的推论①.

① 本例题和以下各例题中的 $\theta,\theta',\cdots$ 及 γ 均限于区间 $(0,\pi)$ 内，不再一一指出.

将 (10.65) 式中的 $x=\cos\theta$ 改写成 $\cos\gamma$，即

$$\sum_{l=1}^{\infty}\frac{2l+1}{l(l+1)}\mathrm{P}_l\left(\cos\gamma\right)=-1-\ln\frac{1-\cos\gamma}{2},\tag{10.65$'$}$$

而 γ 为 (θ,ϕ) 与 (θ',ϕ') 之间的夹角，

$$\cos\gamma=\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\phi-\phi'),\tag{10.115}$$

利用连带 Legendre 函数的加法公式：

$$\begin{aligned}\mathrm{P}_l\left(\cos\gamma\right)=&\,\mathrm{P}_l\left(\cos\theta\right)\mathrm{P}_l\left(\cos\theta'\right)\\&+2\sum_{m=1}^{l}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\mathrm{P}_l^m\left(\cos\theta\right)\mathrm{P}_l^m\left(\cos\theta'\right)\cos m(\phi-\phi'),\end{aligned}\tag{10.116}$$

进一步就可以将 (10.65) 式改写成

$$\begin{aligned}&\sum_{l=1}^{\infty}\frac{2l+1}{l(l+1)}\mathrm{P}_l\left(\cos\theta\right)\mathrm{P}_l\left(\cos\theta'\right)\\&\qquad+2\sum_{l=1}^{\infty}\frac{2l+1}{l(l+1)}\sum_{m=1}^{l}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\mathrm{P}_l^m\left(\cos\theta\right)\mathrm{P}_l^m\left(\cos\theta'\right)\cos m(\phi-\phi')\\&\quad=-1-\ln\frac{1-\cos\theta\cos\theta'-\sin\theta\sin\theta'\cos(\phi-\phi')}{2}.\end{aligned}$$

将上式看成右端函数所作的 Fourier 展开，因此，利用 (10.111) 与 (10.112) 式的结果，就得到

$$\begin{aligned}&\sum_{l=1}^{\infty}\frac{2l+1}{l(l+1)}\mathrm{P}_l\left(\cos\theta\right)\mathrm{P}_l\left(\cos\theta'\right)\\&\quad=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(1+\ln\frac{1-\cos\theta\cos\theta'-\sin\theta\sin\theta'\cos\phi}{2}\right)\mathrm{d}\phi\\&\quad=-1+\ln 2-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\ln(1-\cos\theta\cos\theta'-\sin\theta\sin\theta'\cos\phi)\,\mathrm{d}\phi\\&\quad=\begin{cases}-1-\ln\dfrac{1+\cos\theta}{2}-\ln\dfrac{1-\cos\theta'}{2}, & \theta\leqslant\theta',\\-1-\ln\dfrac{1-\cos\theta}{2}-\ln\dfrac{1+\cos\theta'}{2}, & \theta'\leqslant\theta,\end{cases}\end{aligned}\tag{10.117}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{l=m}^{\infty}\frac{2l+1}{l(l+1)}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\mathrm{P}_l^m\left(\cos\theta\right)\mathrm{P}_l^m\left(\cos\theta'\right)\\&\quad=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(1+\ln\frac{1-\cos\theta\cos\theta'-\sin\theta\sin\theta'\cos\phi}{2}\right)\cos m\phi\,\mathrm{d}\phi\end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \ln(1-\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta'\cos\phi)\cos m\phi\,\mathrm{d}\phi$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{m}\left(\cot\dfrac{\theta}{2}\tan\dfrac{\theta'}{2}\right)^m, & \theta \leqslant \theta', \\ \dfrac{1}{m}\left(\tan\dfrac{\theta}{2}\cot\dfrac{\theta'}{2}\right)^m, & \theta' \leqslant \theta. \end{cases} \tag{10.118}$$

同样，从 (10.69) 式出发，也可得到类似的结果：

$$\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^l \frac{2l+1}{l(l+1)}\mathrm{P}_l(\cos\theta)\,\mathrm{P}_l(\cos\theta')$$
$$= \begin{cases} -1-\ln\dfrac{1+\cos\theta}{2} - \ln\dfrac{1+\cos\theta'}{2}, & \theta+\theta' \leqslant \pi, \\ -1-\ln\dfrac{1-\cos\theta}{2} - \ln\dfrac{1-\cos\theta'}{2}, & \theta+\theta' \geqslant \pi, \end{cases} \tag{10.119}$$

$$\sum_{l=m}^{\infty}(-1)^l \frac{2l+1}{l(l+1)}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\,\mathrm{P}_l^m(\cos\theta')$$
$$= \begin{cases} \dfrac{(-1)^m}{m}\left(\tan\dfrac{\theta}{2}\tan\dfrac{\theta'}{2}\right)^m, & \theta+\theta' \leqslant \pi, \\ \dfrac{(-1)^m}{m}\left(\cot\dfrac{\theta}{2}\cot\dfrac{\theta'}{2}\right)^m, & \theta+\theta' \geqslant \pi. \end{cases} \tag{10.120}$$

☞ **讨论** 在 (10.117) — (10.120) 诸式中代入 $\theta=\theta'$，则有

$$\sum_{l=1}^{\infty}\frac{2l+1}{l(l+1)}\left[\mathrm{P}_l(\cos\theta)\right]^2 = -1-\ln\frac{1+\cos\theta}{2} - \ln\frac{1-\cos\theta}{2}, \tag{10.121}$$

$$\sum_{l=m}^{\infty}\frac{2l+1}{l(l+1)}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\left[\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\right]^2 = \frac{1}{m}, \tag{10.122}$$

$$\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^l\frac{2l+1}{l(l+1)}\left[\mathrm{P}_l(\cos\theta)\right]^2 = \begin{cases} -1-2\ln\dfrac{1+\cos\theta}{2}, & 0<\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}, \\ -1-2\ln\dfrac{1-\cos\theta}{2}, & \dfrac{\pi}{2}\leqslant\theta<\pi, \end{cases} \tag{10.123}$$

$$\sum_{l=m}^{\infty}(-1)^l\frac{2l+1}{l(l+1)}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\left[\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\right]^2 = \begin{cases} \dfrac{(-1)^m}{m}\left(\tan\dfrac{\theta}{2}\right)^{2m}, & 0<\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}, \\ \dfrac{(-1)^m}{m}\left(\cot\dfrac{\theta}{2}\right)^{2m}, & \dfrac{\pi}{2}\leqslant\theta<\pi. \end{cases} \tag{10.124}$$

例 10.9 (10.65) 式的推论 (续).

我们甚至可以不断重复例 10.8 中的计算步骤，例如，将 (10.117) 式再改写为

$$\sum_{l=1}^{\infty}\frac{2l+1}{l(l+1)}\mathrm{P}_l(\cos\gamma)\,\mathrm{P}_l(\cos\theta'')=\begin{cases}-1-\ln\dfrac{1-\cos\gamma}{2}-\ln\dfrac{1+\cos\theta''}{2}, & \theta''\leqslant\gamma,\\[2ex] -1-\ln\dfrac{1-\cos\theta''}{2}-\ln\dfrac{1+\cos\gamma}{2}, & \gamma\leqslant\theta'',\end{cases}$$

而 $\cos\gamma$ 仍如 (10.117) 式所示，则在 $\theta+\theta'\leqslant\theta''$ 与 $|\theta-\theta'|\geqslant\theta''$ (包括 $\theta-\theta'\geqslant\theta''$ 与 $\theta-\theta'\geqslant\theta''$) 的两种极端情形下，可得到

$$\begin{aligned}&\sum_{l=1}^{\infty}\frac{2l+1}{l(l+1)}\mathrm{P}_l(\cos\theta)\,\mathrm{P}_l(\cos\theta')\,\mathrm{P}_l(\cos\theta'')\\&=\begin{cases}-1-\ln\dfrac{1+\cos\theta}{2}-\ln\dfrac{1+\cos\theta'}{2}-\ln\dfrac{1-\cos\theta''}{2}, & \theta+\theta'\leqslant\theta'',\\[2ex] -1-\ln\dfrac{1+\cos\theta}{2}-\ln\dfrac{1-\cos\theta'}{2}-\ln\dfrac{1+\cos\theta''}{2}, & \theta+\theta''\leqslant\theta',\\[2ex] -1-\ln\dfrac{1-\cos\theta}{2}-\ln\dfrac{1+\cos\theta'}{2}-\ln\dfrac{1+\cos\theta''}{2}, & \theta'+\theta''\leqslant\theta,\end{cases}\end{aligned}\tag{10.125}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{l=m}^{\infty}\frac{2l+1}{l(l+1)}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\,\mathrm{P}_l^m(\cos\theta')\,\mathrm{P}_l(\cos\theta'')\\&=\begin{cases}\dfrac{(-1)^m}{m}\left(\tan\dfrac{\theta}{2}\tan\dfrac{\theta'}{2}\right)^m, & \theta+\theta'\leqslant\theta'',\\[2ex] \dfrac{1}{m}\left(\tan\dfrac{\theta}{2}\cot\dfrac{\theta'}{2}\right)^m, & \theta+\theta''\leqslant\theta',\\[2ex] \dfrac{1}{m}\left(\cot\dfrac{\theta}{2}\tan\dfrac{\theta'}{2}\right)^m, & \theta'+\theta''\leqslant\theta.\end{cases}\end{aligned}\tag{10.126}$$

这里用到了

$$\cos(\theta+\theta')\leqslant\cos\gamma\leqslant\cos(\theta-\theta'),\quad 即\quad |\theta-\theta'|\leqslant\gamma\leqslant(\theta+\theta').$$

值得注意的是，(10.126) 式的右端与 θ'' 无关.

类似地，由 (10.119) 式可以导出

$$\begin{aligned}&\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^l\frac{2l+1}{l(l+1)}\mathrm{P}_l(\cos\theta)\,\mathrm{P}_l(\cos\theta')\,\mathrm{P}_l(\cos\theta'')\\&=\begin{cases}-1-\ln\dfrac{1+\cos\theta}{2}-\ln\dfrac{1+\cos\theta'}{2}-\ln\dfrac{1+\cos\theta''}{2}, & \theta+\theta'+\theta''\leqslant\pi,\\[2ex] -1-\ln\dfrac{1-\cos\theta}{2}-\ln\dfrac{1+\cos\theta'}{2}-\ln\dfrac{1+\cos\theta''}{2}, & \theta-\theta'+\theta''\geqslant\pi,\ \theta\geqslant\theta',\\[2ex] -1-\ln\dfrac{1+\cos\theta}{2}-\ln\dfrac{1-\cos\theta'}{2}-\ln\dfrac{1+\cos\theta''}{2}, & \theta'-\theta+\theta''\geqslant\pi,\ \theta'\geqslant\theta,\end{cases}\end{aligned}\tag{10.127}$$

$$\sum_{l=m}^{\infty}(-1)^l\frac{2l+1}{l(l+1)}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\,\mathrm{P}_l^m(\cos\theta')\,\mathrm{P}_l(\cos\theta'')$$
$$=\begin{cases}\dfrac{(-1)^m}{m}\left(\tan\dfrac{\theta}{2}\tan\dfrac{\theta'}{2}\right)^m, & \theta+\theta'+\theta''\leqslant\pi,\\ \dfrac{1}{m}\left(\cot\dfrac{\theta}{2}\tan\dfrac{\theta'}{2}\right)^m, & \theta-\theta'+\theta''\geqslant\pi,\ \theta\geqslant\theta',\\ \dfrac{1}{m}\left(\tan\dfrac{\theta}{2}\cot\dfrac{\theta'}{2}\right)^m, & \theta'-\theta+\theta''\geqslant\pi,\ \theta'\geqslant\theta.\end{cases}\tag{10.128}$$

重复这种做法，还可以讨论级数中出现 4 个或更多个 Legendre 多项式 (连带 Legendre 函数) 的情形.

☞ **讨论** 在 (10.125) — (10.128) 诸式中，可以代入 $\theta=\theta'$ (或 $\theta=\theta''$, $\theta'=\theta''$) 甚至 $\theta=\theta'=\theta''$，于是又有

$$\sum_{l=1}^{\infty}\frac{2l+1}{l(l+1)}\big[\mathrm{P}_l(\cos\theta)\big]^2\mathrm{P}_l(\cos\theta')=-1-2\ln\frac{1+\cos\theta}{2}-\ln\frac{1-\cos\theta'}{2},\qquad 2\theta\leqslant\theta',\tag{10.129}$$

$$\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^l\frac{2l+1}{l(l+1)}\big[\mathrm{P}_l(\cos\theta)\big]^2\mathrm{P}_l(\cos\theta')$$
$$=\begin{cases}-1-2\ln\dfrac{1+\cos\theta}{2}-\ln\dfrac{1+\cos\theta'}{2}, & 2\theta+\theta'\leqslant\pi,\\ -1-\ln\dfrac{1-\cos\theta'}{2}-\ln\dfrac{1+\cos\theta}{2}-\ln\dfrac{1+\cos\theta'}{2}, & 2\theta-\theta'\geqslant\pi,\end{cases}\tag{10.130}$$

$$\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^l\frac{2l+1}{l(l+1)}\big[\mathrm{P}_l(\cos\theta)\big]^3=-1-3\ln\frac{1+\cos\theta}{2},\qquad \theta\leqslant\frac{\pi}{3},\tag{10.131}$$

$$\sum_{l=m}^{\infty}(-1)^l\frac{2l+1}{l(l+1)}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\mathrm{P}_l(\cos\theta)\,\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\,\mathrm{P}_l^m(\cos\theta')=\frac{1}{m}\left(\cot\frac{\theta}{2}\tan\frac{\theta'}{2}\right)^m,\qquad 2\theta-\theta'\geqslant\pi,\tag{10.132}$$

$$\sum_{l=m}^{\infty}(-1)^l\frac{2l+1}{l(l+1)}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\big[\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\big]^2\mathrm{P}_l(\cos\theta')=\frac{(-1)^m}{m}\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)^{2m},\quad 2\theta+\theta'\leqslant\pi,\tag{10.133}$$

$$\sum_{l=m}^{\infty}(-1)^l\frac{2l+1}{l(l+1)}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\mathrm{P}_l(\cos\theta)\,\big[\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\big]^2=\frac{(-1)^m}{m}\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)^{2m},\quad \theta\leqslant\frac{\pi}{3}.\tag{10.134}$$

例 10.10 加法公式应用于其他级数.

通过例 10.8，我们看到了连带 Legendre 函数加法公式 (10.116) 的独特作用. 事实上，这一方法也可以应用到其他公式上. 例如，将 (10.4a) 式改写成

$$\mathrm{P}_\nu(\cos\gamma)=\frac{\sin\nu\pi}{\pi}\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^{l+1}\left(\frac{1}{l-\nu}+\frac{1}{l+\nu+1}\right)\mathrm{P}_l(\cos\gamma),$$

而后对左端的 $\mathrm{P}_\nu(\cos\gamma)$ 应用更普遍的连带 Legendre 函数加法公式 (非整数阶的一般情形)：

$$\begin{aligned}\mathrm{P}_\nu(\cos\gamma)=&\,\mathrm{P}_\nu(\cos\theta)\,\mathrm{P}_\nu(\cos\theta')\\&+2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\Gamma(\nu-m+1)}{\Gamma(\nu+m+1)}\mathrm{P}_\nu^m(\cos\theta)\,\mathrm{P}_\nu^m(\theta')\cos m(\phi-\phi'),\\&\qquad 0<\theta<\pi,\ 0<\theta'<\pi,\ \theta+\theta'<\pi,\end{aligned}\tag{10.135}$$

同时对右端的 $\mathrm{P}_l(\cos\gamma)$ 施用公式 (10.116)，就能得到

$$\mathrm{P}_\nu(\cos\theta)\,\mathrm{P}_\nu(\cos\theta')=\frac{\sin\nu\pi}{\pi}\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^{l+1}\left(\frac{1}{l-\nu}+\frac{1}{l+\nu+1}\right)\mathrm{P}_l(\cos\theta)\,\mathrm{P}_l(\cos\theta'),\tag{10.136}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\Gamma(\nu-m+1)}{\Gamma(\nu+m+1)}\mathrm{P}_\nu^m(\cos\theta)\,\mathrm{P}_\nu^m(\cos\theta')\\&\quad=\frac{\sin\nu\pi}{\pi}\sum_{l=m}^{\infty}(-1)^{l+1}\left(\frac{1}{l-\nu}+\frac{1}{l+\nu+1}\right)\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\,\mathrm{P}_l^m(\cos\theta').\end{aligned}\tag{10.137}$$

似乎值得提到，如果在 (10.136) 式中代入 $\cos\theta'=0$，则将得到

$$\mathrm{P}_\nu(\cos\theta)\,\mathrm{P}_\nu(0)=-\frac{\sin\nu\pi}{\pi}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2l-\nu}+\frac{1}{2l+\nu+1}\right)\mathrm{P}_{2l}(0)\,\mathrm{P}_{2l}(\cos\theta).$$

这岂不是意味着 $\mathrm{P}_\nu(x)$ 是偶函数？回答当然是否定的！原因是上式只是在 $0<\theta<\pi/2$ 即 $0<x<1$ 的区间上才成立.

将 (10.136)式中的 $\cos\theta$ 或 $\cos\theta'$ 改写为 $\cos\gamma$，再重复由 (10.4a) 式导出 (10.136) 和 (10.137) 式的步骤，还可以进一步得到

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}_\nu(\cos\theta)\,\mathrm{P}_\nu(\cos\theta')\,\mathrm{P}_\nu(\cos\theta'')\\&\quad=\frac{\sin\nu\pi}{\pi}\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^{l+1}\left(\frac{1}{l-\nu}+\frac{1}{l+\nu+1}\right)\\&\qquad\times\mathrm{P}_l(\cos\theta)\,\mathrm{P}_l(\cos\theta')\,\mathrm{P}_l(\cos\theta''),\end{aligned}\tag{10.138}$$

$$\frac{\Gamma(\nu-m+1)}{\Gamma(\nu+m+1)}\mathrm{P}_\nu^m(\cos\theta)\,\mathrm{P}_\nu^m(\cos\theta')\,\mathrm{P}_\nu^m(\cos\theta'')$$
$$=\frac{\sin\nu\pi}{\pi}\sum_{l=m}^{\infty}(-1)^{l+1}\left(\frac{1}{l-\nu}+\frac{1}{l+\nu+1}\right)$$
$$\times\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\,\mathrm{P}_l^m(\cos\theta')\,\mathrm{P}_l^m(\cos\theta'')\,. \tag{10.139}$$

可以预料，不断重复这一过程，还将能导出更多的结果. 这里不再一一罗列.

例 10.11　加法公式应用于递推关系.

上面的演绎过程应用于 Legendre 多项式的递推关系

$$(2l+1)x\,\mathrm{P}_l(x)=(l+1)\mathrm{P}_{l+1}(x)+l\mathrm{P}_{l-1}(x)\,,$$

将 x 写成 $\cos\gamma$，于是就有

$$(2l+1)\left[\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\phi-\phi')\right]$$
$$\times\left[\mathrm{P}_l(\cos\theta)\,\mathrm{P}_l(\cos\theta')+2\sum_{m=1}^{l}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\,\mathrm{P}_l^m(\theta')\cos m(\phi-\phi')\right]$$
$$=(l+1)\left[\mathrm{P}_{l+1}(\cos\theta)\,\mathrm{P}_{l+1}(\cos\theta')\right.$$
$$\left.+2\sum_{m=1}^{l+1}\frac{(l-m+1)!}{(l+m+1)!}\mathrm{P}_{l+1}^m(\cos\theta)\,\mathrm{P}_{l+1}^m(\theta')\cos m(\phi-\phi')\right]$$
$$+l\left[\mathrm{P}_{l-1}(\cos\theta)\,\mathrm{P}_{l-1}(\cos\theta')\right.$$
$$\left.+2\sum_{m=1}^{l-1}\frac{(l-m-1)!}{(l+m-1)!}\mathrm{P}_{l-1}^m(\cos\theta)\,\mathrm{P}_{l-1}^m(\theta')\cos m(\phi-\phi')\right].$$

仍将此式看成 Fourier 展开式，则可得到

$$(2l+1)\cos\theta\cos\theta'\mathrm{P}_l(\cos\theta)\,\mathrm{P}_l(\cos\theta')+\frac{2l+1}{l(l+1)}\sin\theta\,\sin\theta'\,\mathrm{P}_l^1(\cos\theta)\ \mathrm{P}_l^1(\cos\theta')$$
$$=(l+1)\mathrm{P}_{l+1}(\cos\theta)\ \mathrm{P}_{l+1}(\cos\theta')+l\,\mathrm{P}_{l-1}(\cos\theta)\,\mathrm{P}_{l-1}(\cos\theta')\,, \tag{10.140}$$
$$(2l+1)\sin\theta\,\sin\theta'\,\mathrm{P}_l(\cos\theta)\ \mathrm{P}_l(\cos\theta')+\frac{2l+1}{l(l+1)}\cos\theta\,\cos\theta'\,\mathrm{P}_l^1(\cos\theta)\ \mathrm{P}_l^1(\cos\theta')$$
$$=\frac{2}{l+2}\mathrm{P}_{l+1}^1(\cos\theta)\ \mathrm{P}_{l+1}^1(\cos\theta')+\frac{2}{l-1}\mathrm{P}_{l-1}^1(\cos\theta)\ \mathrm{P}_{l-1}^1(\cos\theta')\,, \tag{10.141}$$
$$(2l+1)\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\cos\theta\,\cos\theta'\,\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\ \mathrm{P}_l^m(\cos\theta')$$

$$
\begin{aligned}
&+(2l+1)\frac{(l-m+1)!}{(l+m-1)!}\sin\theta\,\sin\theta'\,\mathrm{P}_l^{m-1}(\cos\theta)\,\mathrm{P}_l^{m-1}(\cos\theta')\\
&+(2l+1)\frac{(l-m-1)!}{(l+m+1)!}\sin\theta\,\sin\theta'\,\mathrm{P}_l^{m+1}(\cos\theta)\,\mathrm{P}_l^{m+1}(\cos\theta')\\
=\,&2(l+1)\frac{(l-m+1)!}{(l+m+1)!}\mathrm{P}_{l+1}^{m}(\cos\theta)\,\mathrm{P}_{l+1}^{m}(\cos\theta')\\
&+2l\,\frac{(l-m-1)!}{(l+m-1)!}\mathrm{P}_{l-1}^{m}(\cos\theta)\,\mathrm{P}_{l-1}^{m}(\cos\theta').
\end{aligned}
\tag{10.142}
$$

对于非整数阶的 (第一类) Legendre 函数，也有类似的递推关系 (例如，见 (9.16a) 式)，因此，也将有

$$
(2\nu+1)\cos\theta\cos\theta'\mathrm{P}_\nu(\cos\theta)\,\mathrm{P}_\nu(\cos\theta')+\frac{2\nu+1}{\nu(\nu+1)}\sin\theta\,\sin\theta'\,\mathrm{P}_\nu^1(\cos\theta)\,\mathrm{P}_\nu^1(\cos\theta')
$$

$$
=(\nu+1)\mathrm{P}_{\nu+1}(\cos\theta)\,\mathrm{P}_{\nu+1}(\cos\theta')+\nu\,\mathrm{P}_{\nu-1}(\cos\theta)\,\mathrm{P}_{\nu-1}(\cos\theta'),\tag{10.143}
$$

$$
(2\nu+1)\sin\theta\,\sin\theta'\,\mathrm{P}_\nu(\cos\theta)\,\mathrm{P}_\nu(\cos\theta')+\frac{2\nu+1}{\nu(\nu+1)}\cos\theta\,\cos\theta'\,\mathrm{P}_\nu^1(\cos\theta)\,\mathrm{P}_\nu^1(\cos\theta')
$$

$$
=\frac{2}{\nu+2}\mathrm{P}_{\nu+1}^1(\cos\theta)\,\mathrm{P}_{\nu+1}^1(\cos\theta')+\frac{2}{\nu-1}\mathrm{P}_{\nu-1}^1(\cos\theta)\,\mathrm{P}_{\nu-1}^1(\cos\theta'),\tag{10.144}
$$

$$
\begin{aligned}
&(2\nu+1)\frac{\Gamma(\nu-m+1)}{\Gamma(\nu+m+1)}\cos\theta\,\cos\theta'\,\mathrm{P}_\nu^m(\cos\theta)\,\mathrm{P}_\nu^m(\cos\theta')\\
&\quad+(2\nu+1)\frac{\Gamma(\nu-m+2)}{\Gamma(\nu+m)}\sin\theta\,\sin\theta'\,\mathrm{P}_\nu^{m-1}(\cos\theta)\,\mathrm{P}_\nu^{m-1}(\cos\theta')\\
&\quad+(2\nu+1)\frac{\Gamma(\nu-m)}{\Gamma(\nu+m+2)}\sin\theta\,\sin\theta'\,\mathrm{P}_\nu^{m+1}(\cos\theta)\,\mathrm{P}_\nu^{m+1}(\cos\theta')\\
&=2(\nu+1)\frac{\Gamma(\nu-m+2)}{\Gamma(\nu+m+2)}\mathrm{P}_{\nu+1}^m(\cos\theta)\,\mathrm{P}_{\nu+1}^m(\cos\theta')\\
&\quad+2\nu\frac{\Gamma(\nu-m)}{\Gamma(\nu+m)}\mathrm{P}_{\nu-1}^m(\cos\theta)\,\mathrm{P}_{\nu-1}^m(\cos\theta').
\end{aligned}
\tag{10.145}
$$

更进一步，对于第二类 Legendre 函数，因为也有形式完全相同的递推关系 (例如，见 (9.16b) 式) 以及类似的加法公式，所以也可以写出类似的公式.

§10.5 关于 Legendre 多项式零点的级数

例 10.12 求级数和 $\displaystyle\sum_{i=1}^{[l/2]}\zeta_i^2$ 及 $\displaystyle\sum_{i=1}^{[l/2]}\frac{1}{\zeta_i^2}$，其中 ζ_i 是 $\mathrm{P}_l(x)$ 的第 i 个正零点.

已知 Legendre 多项式 $\mathrm{P}_l(x)$ 的 l 个零点均为实数，对称地分布在区间 $(-1,1)$ 上，因此必然有 $[l/2]$ 个正零点 $\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_{[l/2]}$ 和 $[l/2]$ 个负零点 $-\zeta_1,-\zeta_2,\cdots,$

$-\zeta_{[l/2]}$. 又因 Legendre 多项式 $\mathrm{P}_l(x)$ 的最高幂 x^l 项的系数为 $(2l)!/(2^l\,l!\,l!)$，所以

$$\mathrm{P}_l(x)=\frac{(2l)!}{2^l\,l!\,l!}x^{l-2[l/2]}\left(x^2-\zeta_1^2\right)\left(x^2-\zeta_2^2\right)\cdots\left(x^2-\zeta_{[l/2]}^2\right), \tag{10.146}$$

根据代数方程根和系数的关系 (即 Viete 定理)，即可求得

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{[l/2]}\zeta_i^2 &= -\frac{\mathrm{P}_l(x)\text{ 中 }x^{l-2}\text{ 项的系数}}{\mathrm{P}_l(x)\text{ 中 }x^l\text{ 项的系数}}\\ &=\frac{(2l-2)!}{2^l\,(l-1)!\,(l-2)!}\,\frac{2^l\,l!\,l!}{(2l)!}=\frac{l(l-1)}{2(2l-1)}.\end{aligned} \tag{10.147}$$

另一方面，从 Legendre 多项式的表达式

$$\mathrm{P}_l(x)=\sum_{r=0}^{[l/2]}(-1)^r\frac{(2l-2r)!}{2^l r!(l-r)!(l-2r)!}x^{l-2r} \tag{10.148}$$

还可以看出最低次幂 $x^{l-2[l/2]}$ 的系数为

$$c_{l-2[l/2]}=(-1)^{[l/2]}\frac{(2l-2[l/2])!}{2^l[l/2]!\,(l-[l/2])!\,(l-2[l/2])!},$$

所以

$$\mathrm{P}_l(x)=c_{l-2[l/2]}\,x^{l-2[l/2]}\left(1-\frac{x^2}{\zeta_1^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{\zeta_2^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{\zeta_{[l/2]}^2}\right), \tag{10.149}$$

于是又可求得

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{[l/2]}\frac{1}{\zeta_i^2} &= -\frac{\mathrm{P}_l(x)\text{ 中 }x^{l-2[l/2]+2}\text{ 项的系数}}{\mathrm{P}_l(x)\text{ 中 }x^{l-2[l/2]}\text{ 项的系数}}\\ &=\frac{(2l-2[l/2]+2)!}{2^l\,([l/2]-1)!\,(l-[l/2]+1)!\,(l-2[l/2]+2)!}\\ &\quad\div\frac{(2l-2[l/2])!}{2^l\,[l/2]!\,(l-[l/2])!\,(l-2[l/2])!}\\ &=\begin{cases}\dfrac{l(l+1)}{2}, & l=\text{偶数},\\[2ex] \dfrac{(l-1)(l+2)}{2\cdot 3}, & l=\text{奇数}.\end{cases}\end{aligned} \tag{10.150}$$

第十一章　球函数与电磁场问题

§11.1　均匀带电圆盘的静电势问题[①]

均匀细圆环的静电势问题，由于物理图像清晰，计算简单，常作为应用分离变量法及特殊函数的典型例题，在数学物理方法及电动力学教材中多有讨论．在此基础上，很自然地就会讨论到均匀带电薄圆盘的静电势问题．事实上，在 Morse 和 Feshbach 所著的 *Method of Theoretical Physics* (New York: McGraw-Hill, 1953) 一书中就可以找到这个问题．目前，在一些教材中也有所讨论，或者把它列为习题．但是，这个问题，看似简单，实际上涉及数学物理方法中的一些基本理论，在一些教材中似乎讨论得不够充分，甚至也有不正确的结果．本节将简述几种常用的解法，并对其中的一些不正确做法与结论作了尽可能详细的分析．

11.1.1　延拓法与轴定理

我们面对的物理问题是：一半径为 a 的薄圆盘，厚度可以忽略，盘上均匀带电，总电量为 Q，求它在空间任意一点的静电势．

对于这个问题，常模仿均匀细圆环问题所用的做法，即根据轴线上的静电势，利用幂级数展开的唯一性，求出空间任意一点的静电势．取球坐标系，坐标原点放在圆盘的中心，而圆盘处在赤道面上．这时空间任意一点 $(r,\ \theta,\ \phi)$ 的静电势显然与 ϕ 无关，即 $u=u(r,\ \theta)$．考虑到 $r=0$ 时 $u(r,\theta)$ 有界及 $r\to\infty$ 时 $u(r,\ \theta)\to 0$ 的要求，通常假设

$$u(r,\theta)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}A_l\left(\frac{r}{a}\right)^l\mathrm{P}_l\left(\cos\theta\right), & r<a,\\ \displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}B_l\left(\frac{a}{r}\right)^{l+1}\mathrm{P}_l\left(\cos\theta\right), & r>a.\end{cases}\tag{11.1}$$

另一方面，通过直接积分，又可求出轴线上任意一点 $(\theta=0$ 或 $\pi)$ 的静电势：

$$\begin{aligned}u\Big|_{\text{轴线上}}&=\frac{Q}{4\pi^2\varepsilon_0a^2}\int_0^{2\pi}\int_0^a\frac{\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta}{\sqrt{r^2+\rho^2}}=\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0a^2}\left(\sqrt{a^2+r^2}-r\right)\\&=\begin{cases}\displaystyle-\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0a}\frac{r}{a}+\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0a}\sum_{l=0}^{\infty}\binom{1/2}{l}\left(\frac{r}{a}\right)^{2l}, & r<a,\\ \displaystyle\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0a}\sum_{l=0}^{\infty}\binom{1/2}{l+1}\left(\frac{a}{r}\right)^{2l+1}, & r>a.\end{cases}\end{aligned}\tag{11.2}$$

① 原载《大学物理》第 19 卷 (2000 年) 第 11 期，收入时作了少许修改．

比较系数，就可以得出空间任意一点 (r,θ,ϕ) 的静电势

$$u(r,\theta)=\begin{cases}\dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0 a}\left[-\dfrac{r}{a}\mathrm{P}_1(\cos\theta)+\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}\binom{1/2}{l}\left(\dfrac{r}{a}\right)^{2l}\mathrm{P}_{2l}(\cos\theta)\right], & r<a, \quad (11.3a)\\ \dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0 a}\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}\binom{1/2}{l+1}\left(\dfrac{a}{r}\right)^{2l+1}\mathrm{P}_{2l}(\cos\theta), & r>a. \quad (11.3b)\end{cases}$$

上式中 $r<a$ 的结果显然不对. 因为从本题的已知条件，可以断定 $u(r,\theta)$ 应当对于赤道面对称，即 $u(r,\theta)=u(r,\pi-\theta)$，而 (11.3a) 式中的 $\mathrm{P}_1(\cos\theta)$ 项明显违反了这个对称性.

从理论上说，任何比较系数的做法，都必须以相关的 (展开) 唯一性为依据. 对于 (11.1) 式，既可以看成 $u(r,\theta)$ 按本征函数组 $\{\mathrm{P}_l(\cos\theta)\}$ 所作的展开，也可以看成 $u(r,\theta)$ 在 $r=0$ 或 $r=\infty$ 邻域内的 Taylor 展开. 上面的做法，只根据 $u(r,\theta)$ 在特定 θ 值下的表达式比较系数，依据的绝不可能是函数按本征函数展开的唯一性，因为当等式两端均为按同一组本征函数展开的形式，而等式在整个正交区间上均成立时，才能比较系数. 这样，上面依据的只能是幂级数展开的唯一性. 这时，θ 是参数，A_l 和 B_l 是与 r,θ 无关的常系数，根据 Taylor 展开的唯一性，由 $u(r,\theta)$ 在特定 θ 值下的表达式定出 A_l 和 B_l，从而得到 $u(r,\theta)$ 在任意 θ 下的表达式. 正是在这个意义上，不妨把这种方法称为“延拓法”.

在有些文献[①] 中，把延拓法的依据表达为所谓的轴定理，即：**如果轴对称系统的势函数在轴上一点可以表示成以下形式:**

$$\psi(z)=\sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l z^l+B_l z^{-l-1}\right), \tag{11.4}$$

那么，任意一点 (r,θ,ϕ)的势是

$$\psi(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l r^l+B_l r^{-l-1}\right)\mathrm{P}_l(\cos\theta). \tag{11.5}$$

这个定理的内容上存在明显的矛盾. 因为按照 (11.5) 式，当 $\theta=0$ 时，$r=z$, $\mathrm{P}_l(1)=1$，的确 (11.4) 式成立；但当 $\theta=\pi$ 时，$r=-z$，$\mathrm{P}_l(-1)=(-1)^l$，故

$$\psi(r,\theta=\pi)=\sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l z^l-B_l z^{-l-1}\right),$$

与 (11.4) 式并不一致. 这样，正确的结论是：只有对于轴线上任意一点，势函数为

① 例如：C. A. Croxton. *Introductory Eigenphysics*. New York: John Wiley & Sons Ltd., 1974; 中译本：克罗克斯顿. 数学物理方程导论. 戴安英，钱伯初译. 北京：高等教育出版社，1982.

$$\psi\big|_{\text{轴线上}} = \sum_{l=0}^{\infty} \left[A_l z^l + B_l z^{-l-1}\text{sgn}\,(z)\right] \tag{11.6}$$

$(\text{sgn}\,(z) = |z|/z)$ 时，(11.5) 式才成立. 在细圆环的情形下，恰恰是因为满足 (11.6) 式 (而非 (11.4) 式) 的要求，所以能得到正确的结果.

现在考察一下 (11.2) 式. 因为在轴线上 $r = |z|$，故可将 (11.2) 式改写成

$$\begin{aligned} u\big|_{\text{轴线上}} &= \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 a^2}\left(\sqrt{a^2+z^2}-|z|\right) \\ &= \begin{cases} -\dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0 a^2}|z| + \dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0 a}\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}\binom{1/2}{l}\left(\frac{z}{a}\right)^{2l}, & |z|<a, \\ \dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0 a}\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}\binom{1/2}{l+1}\left(\frac{a}{z}\right)^{2l+1}\text{sgn}\,(z), & |z|>a. \end{cases} \end{aligned} \tag{11.7}$$

由此可见，当 $r > a$ 时，采用 $u(r,\theta)$ 在特殊方向 $(\theta = 0, \pi)$ 上的值，就能够正确地定出 $u(r,\theta)$ 的级数表达式中的系数；而当 $r < a$ 时，由于 $|z|$ 项不符合 (11.6) 式的要求 (注意 (11.6) 式中对 z 的正幂项与负幂项有不同的要求)，因此 (11.3a) 式的结果是不正确的.

其实，上面的分析还多少停留在就事论事的层面上. 延拓法失效的根本原因在于轴定理的适用条件，它不仅要求体系具有轴对称性，而且对源 (静电问题中的电荷，引力问题中的质量，$\cdots$) 的分布也有限制. 这从轴定理中最后解的形式(即 (11.5) 式) 可以看出，它一定满足 Laplace 方程. 因此源只能分布在作为体系内部界面的球面上. 均匀细圆环的静电势问题，符合上述要求，所以就能成功地应用延拓法. 而在本问题中，作为静电势的源的电荷，分布在赤道面上的一个圆形区域内. 这样，在 $r > a$ 的范围内，Laplace 方程处处成立，静电势能写成 (11.5) 式的形式，因而也能成功地应用延拓法. 相反，在 $r < a$ 的范围内，Laplace 方程并不处处成立，静电势并不能写成 (11.5) 式的形式，使得延拓法的应用失去了基本前提.

11.1.2 叠加法

既然对于单独的细圆环已经能得到正确的结果，把无穷多个细圆环叠加起来，为什么竟然不能得到正确的结果呢？问题出在叠加方法上. 事实上，取圆环 $\rho - \rho + \mathrm{d}\rho$，电荷为

$$\frac{Q}{\pi a^2}2\pi\rho\mathrm{d}\rho = \frac{2Q}{a^2}\rho\,\mathrm{d}\rho.$$

它产生的静电势为

$$\mathrm{d}u = \begin{cases} \dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0 a^2}\,\mathrm{d}\rho\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}\binom{-1/2}{l}\left(\frac{r}{\rho}\right)^{2l}\mathrm{P}_{2l}(\cos\theta), & r<\rho, \\ \dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0 a^2}\,\mathrm{d}\rho\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}\binom{-1/2}{l}\left(\frac{\rho}{r}\right)^{2l+1}\mathrm{P}_{2l}(\cos\theta), & r>\rho. \end{cases}$$

把这些圆环从 $\rho=0$ 到 $\rho=a$ 叠加起来，就得到均匀圆盘的静电势. 当 $r<a$ 时，

$$\begin{aligned}u_{内}(r,\theta)&=\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 a}\sum_{l=0}^{\infty}\binom{-1/2}{l}\left[\int_0^r\left(\frac{\rho}{r}\right)^{2l+1}\mathrm{d}\rho+\int_r^a\left(\frac{r}{\rho}\right)^{2l}\mathrm{d}\rho\right]\mathrm{P}_{2l}(\cos\theta)\\&=\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 a}\frac{r}{a}\sum_{l=0}^{\infty}\binom{-1/2}{l}\left(\frac{1}{2l+2}+\frac{1}{2l-1}\right)\mathrm{P}_{2l}(\cos\theta)\\&\quad-\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 a}\sum_{l=0}^{\infty}\binom{-1/2}{l}\frac{1}{2l-1}\left(\frac{r}{a}\right)^{2l}\mathrm{P}_{2l}(\cos\theta);\end{aligned}\tag{11.8a}$$

当 $r>a$ 时，

$$\begin{aligned}u_{外}(r,\theta)&=\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 a^2}\sum_{l=0}^{\infty}\binom{-1/2}{l}\mathrm{P}_{2l}(\cos\theta)\int_0^a\left(\frac{\rho}{r}\right)^{2l+1}\mathrm{d}\rho\\&=\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 a}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{2l+2}\binom{-1/2}{l}\left(\frac{a}{r}\right)^{2l+1}\mathrm{P}_{2l}(\cos\theta).\end{aligned}\tag{11.8b}$$

这才是正确的结果. 可以直接验证 $\dfrac{1}{2l+2}\dbinom{-1/2}{l}=\dbinom{1/2}{l+1}$，所以 (11.8b) 式和 (11.3b) 式的结果完全一致.

11.1.3 求解定解问题

按照数理方程的标准解法 (不妨称为“方程法”)，应当在球坐标系中求解定解问题

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)=-\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{Q}{\pi a^2}\frac{1}{r}\delta(\theta-\pi/2)\eta(a-r),\tag{11.9a}$$

$$u\big|_{\theta=0}\text{有界},\qquad u\big|_{\theta=\pi}\text{有界},\tag{11.9b}$$

$$u\big|_{r=0}\text{有界},\qquad u\big|_{r\to\infty}\to 0.\tag{11.9c}$$

当 $r>a$ 时，方程 (11.9a) 为齐次，考虑到边界条件 (11.9b) 及无穷远条件(11.9c)，我们可以写出解的形式为

$$u_{外}(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}A_l\left(\frac{a}{r}\right)^{l+1}\mathrm{P}_l(\cos\theta).$$

而对于球内区域 ($r<a$)，满足非齐次方程 (11.9a) 及有界条件 (11.9b) 的解是

$$u_{内}(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}R_l(r)\mathrm{P}_{2l}(\cos\theta).$$

代入方程 (11.9a)，可以导出 $R_l(r)$ 所应当满足的非齐次常微分方程

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R_l}{\mathrm{d}r}\right)-\frac{l(l+1)}{r^2}R_l=-\frac{Q}{\pi a^2\varepsilon_0}\frac{1}{r}\cdot\frac{2l+1}{2}\mathrm{P}_l\left(0\right).$$

考虑到 $R_l(0)$ 必须有界，故此方程之解为

$$R_l(r)=\frac{Q}{\pi a\varepsilon_0}\,\frac{2l+1}{2}\,\frac{r}{a}\,\mathrm{P}_l\left(0\right)+B_l r^l.$$

再由球面 $r=a$ 处的连接条件

$$u_{内}(a,\theta)=u_{外}(a,\theta),\qquad \left.\frac{\partial u_{内}(r,\theta)}{\partial r}\right|_{r=a}=\left.\frac{\partial u_{外}(r,\theta)}{\partial r}\right|_{r=a},$$

即可求出系数 A_l 与 B_l，从而得到

$$u_{外}(r,\theta)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l+1}\left(\frac{a}{r}\right)^{2l+1}\mathrm{P}_{2l}\left(0\right)\mathrm{P}_{2l}\left(\cos\theta\right), \tag{11.10a}$$

$$\begin{aligned}u_{内}(r,\theta)=\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 a}&\left[\frac{r}{a}\sum_{l=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{2l-1}+\frac{1}{2l+2}\Big)\mathrm{P}_{2l}\left(0\right)\mathrm{P}_{2l}\left(\cos\theta\right)\right.\\&\left.-\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{2l-1}\left(\frac{r}{a}\right)^{2l}\mathrm{P}_{2l}\left(0\right)\mathrm{P}_{2l}\left(\cos\theta\right)\right].\end{aligned} \tag{11.10b}$$

在写出这个结果时，还用到 $\mathrm{P}_{2l+1}\left(0\right)=0$. 解式 (11.10) 中只出现偶次 Legendre 多项式，正确地反映了解应当具有的对称性 (对称于赤道面，$u(r,\theta)=u(r,\pi-\theta)$). 不难验证 $\mathrm{P}_{2l}\left(0\right)=\binom{-1/2}{l}$，因此，这里的结果 (11.10a), (11.10b) 和 (11.8a), (11.8b) 完全相同.

更进一步，根据 (10.4b) 式，有

$$\mathrm{P}_1\left(|\cos\theta|\right)=-\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2l+2}+\frac{1}{2l-1}\right)\mathrm{P}_{2l}\left(0\right)\mathrm{P}_{2l}\left(\cos\theta\right). \tag{11.11}$$

同时，因为

$$\frac{1}{2l-1}\binom{-1/2}{l}=-\binom{1/2}{l}, \tag{11.12}$$

所以 (11.10b) 式又可以改写成

$$u_{内}(r,\theta)=-\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 a}\frac{r}{a}\mathrm{P}_1\left(|\cos\theta|\right)+\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 a}\sum_{l=0}^{\infty}\binom{1/2}{l}\left(\frac{r}{a}\right)^{2l}\mathrm{P}_{2l}\left(\cos\theta\right). \tag{11.13}$$

这样就可以看出 $u_{内}$ 的物理意义，它由两部分叠加而成：第一项是来自均匀带电无穷平面的贡献，面电荷密度为 $Q/\pi a^2$；第二项是来自挖有圆孔的无穷平面的贡献，

平面上仍均匀带电，但面电荷密度为 $-Q/\pi a^2$. 从数学上说，(11.13) 式的第二项在球内 $r<a$ 满足 Laplace 方程，所以第一项一定是非齐次方程 (11.9a) 的特解.

11.1.4 讨论 —— 延拓法则的扩充

上面采用三种不同的方法讨论了均匀带电圆盘的静电势问题. 毫无疑问，求解定解问题的方法 (方程法) 是准确、可靠的方法. 正确运用叠加法，也可以得到正确的结果. 而传统的延拓法 (或轴定理)，由于表述过于简单，对于适用条件和延拓法则需要加以进一步的明确.

前面已经多次提到，在 $r<a$ 的空间范围内，由于圆盘上电荷的存在，使得原始形式的轴定理不再适用. 作为解决的途径之一，可以试图在 $z>0$ 或 $z<0$ 的两个半无界空间内分别采用延拓法. 这时，在半无界空间中，静电势满足 Laplace 方程，而圆盘上的电荷分布则以非齐次的 (第二类) 边界条件

$$\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\bigg|_{\theta=\pi/2}=\frac{1}{2\varepsilon_0}\frac{Q}{\pi a^2}\mathrm{sgn}\,(\cos\theta) \tag{11.14}$$

的面目出现. 为了能由 (11.7) 式 (静电势在特殊方向上的值) 延拓为 (11.13) 式 (静电势在空间任意一点的值)，我们需要将原有的延拓法则

$$z^l\to r^l\mathrm{P}_l\,(\cos\theta)\,,\qquad z^{-l-1}\mathrm{sgn}\,(z)\to r^{-l-1}\mathrm{P}_l\,(\cos\theta) \tag{11.15a}$$

(这里的箭号“→”表示延拓关系) 加以扩充，再补充上

$$|z|^l\to r^l\mathrm{P}_l\,(|\cos\theta|)\,,\qquad |z|^{-l-1}\to r^{-l-1}\mathrm{P}_l\,(|\cos\theta|) \tag{11.15b}$$

即可. 这个做法的根据是，在 $z>0$ 或 $z<0$ 的半无界空间内，当 $r<a$ 时，静电势一定是

$$u_{内}(r,\theta)=u_0(r,\theta)+\sum_{l=0}^{\infty}R_l(r)\mathrm{P}_{2l}\,(\cos\theta)$$

的形式，其中 $u_0(r,\theta)$ 是将非齐次边界条件 (11.14) 齐次化的齐次化函数. 当圆盘上有电荷分布时，能应用延拓法的条件就是：必须能找到一个特别的齐次化函数 $u_0(r,\theta)$，它本身也是 Laplace 方程的解，因而 $u-u_0$ 仍满足 Laplace 方程，使得

$$u_{内}(r,\theta)=u_0(r,\theta)+\sum_{l=0}^{\infty}A_l\left(\frac{r}{a}\right)^{2l}\mathrm{P}_{2l}\,(\cos\theta)\,.$$

(11.13) 式中的第一项恰好是这样的齐次化函数. 一般说来，要找到这样的齐次化函数，只有当圆盘上的径向电荷分布为某些特殊形式时才有可能.

类似的还有均匀带电圆环片 (内外半径分别为 a 和 b) 的静电势问题. 这时在空间区域 $a<r<b$ 内，Laplace 方程也不成立，因此静电势也不能表示成 (11.1) 式的形式.

§11.2 轴对称荷电圆盘的静电势①

本节继续采用延拓法 (根据轴线方向上的特殊值，应用所谓的轴定理而推出空间任意一点的静电势) 和方程法 (直接求解定解问题)，讨论圆盘电荷为任意轴对称分布的情形.

设圆盘的半径为 a，厚度可忽略不计. 取球坐标系，以圆盘中心为原点，极轴垂直于圆盘面. 由于圆盘上的电荷分布呈轴对称状，故空间任意一点 (r, θ, ϕ) 的静电势一定与 ϕ 无关，即 $u = u(r, \theta)$. 显然，$u = u(r, \theta)$ 总依赖于圆盘上的面电荷密度 $\sigma(\rho)$ 的具体形式，其中 $\rho = r\sin\theta$. 为了确定起见，下面不妨只讨论面电荷密度为幂函数的情形. 任意的密度函数 $\sigma(\rho)$，总可以展开为 ρ 的幂级数.

11.2.1 由延拓法求解

先讨论延拓法. 设圆盘上面电荷量密度与 ρ^α 成正比 (不妨设 $\alpha \geqslant 0$，实际上可放宽为 $\alpha \geqslant -1$)，盘上总电量为 Q，则面电荷量密度为

$$\sigma(\rho) = \frac{(\alpha+2)Q}{2\pi a^2}\left(\frac{\rho}{a}\right)^\alpha. \tag{11.16}$$

于是，轴线上任意一点 ($\theta = 0$ 或 π, $z = r\cos\theta$) 的静电势为

$$u\Big|_{\text{轴线上}} = \frac{(\alpha+2)Q}{4\pi\varepsilon_0 a}\int_0^a \left(\frac{\rho}{a}\right)^{\alpha+1}\frac{\mathrm{d}\rho}{\sqrt{z^2+\rho^2}}. \tag{11.17}$$

当 $|z| > a$ 时，

$$\begin{aligned} u_{\text{外}}\Big|_{\text{轴线上}} &= \frac{(\alpha+2)Q}{4\pi\varepsilon_0 a}\frac{1}{|z|}\sum_{l=0}^{\infty}\mathrm{P}_{2l}(0)\int_0^a\left(\frac{\rho}{a}\right)^{\alpha+1}\left(\frac{\rho}{z}\right)^{2l}\mathrm{d}\rho \\ &= \frac{(\alpha+2)Q}{4\pi\varepsilon_0 a}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{2l+\alpha+2}\mathrm{P}_{2l}(0)\left(\frac{a}{z}\right)^{2l+1}\mathrm{sgn}(z), \end{aligned} \tag{11.18}$$

其中 $\mathrm{sgn}(z) = |z|/z$. 由于电荷只分布在圆盘上，所以静电势 $u(r,\theta)$ 在 $r > a$ 的空间内满足 Laplace 方程. 考虑到 $\theta = 0$ 和 π 时 $u(r,\theta)$ 有界及 $r \to \infty$ 时 $u(r,\theta) \to 0$，一定有

$$u_{\text{外}}(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l\left(\frac{a}{r}\right)^{l+1}\mathrm{P}_l(\cos\theta). \tag{11.19}$$

由此也可以得到

$$u_{\text{外}}\Big|_{\text{轴线上}} = \sum_{l=0}^{\infty} A_l\left(\frac{a}{z}\right)^{l+1}\mathrm{sgn}(z).$$

① 原载《大学物理》第 19 卷 (2000 年) 第 12 期，作者为吴崇试、张之翔. 此处作了少许修改.

与 (11.18) 式比较，即可定出系数 A_l，从而求得

$$u_{外}(r,\theta)=\frac{(\alpha+2)Q}{4\pi\varepsilon_0 a}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{2l+\alpha+2}\left(\frac{a}{r}\right)^{2l+1}\mathrm{P}_{2l}(0)\,\mathrm{P}_{2l}(\cos\theta).\tag{11.20}$$

当 $|z|<a$ 时，

$$u_{内}\Big|_{轴线上}=\frac{(\alpha+2)Q}{4\pi\varepsilon_0 a}\sum_{l=0}^{\infty}\mathrm{P}_{2l}(0)\left[\int_0^{|z|}\left(\frac{\rho}{a}\right)^{\alpha+1}\left(\frac{\rho}{z}\right)^{2l}\frac{\mathrm{d}\rho}{|z|}+\int_{|z|}^{a}\left(\frac{\rho}{a}\right)^{\alpha+1}\left(\frac{z}{\rho}\right)^{2l}\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}\right].\tag{11.21}$$

若 α 不为奇数，则有

$$\begin{aligned}u_{内}\Big|_{轴线上}=&\frac{(\alpha+2)Q}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(\frac{|z|}{a}\right)^{\alpha+1}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2l+\alpha+2}+\frac{1}{2l-\alpha-1}\right)\mathrm{P}_{2l}(0)\\&-\frac{(\alpha+2)Q}{4\pi\varepsilon_0 a}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{2l-\alpha-1}\left(\frac{z}{a}\right)^{2l}\mathrm{P}_{2l}(0)\end{aligned}\tag{11.22a}$$

$$=-\frac{(\alpha+2)Q}{4\pi\varepsilon_0 a}\left[\frac{1}{\mathrm{P}'_{\alpha+1}(0)}\left(\frac{|z|}{a}\right)^{\alpha+1}+\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\mathrm{P}_{2l}(0)}{2l-\alpha-1}\left(\frac{z}{a}\right)^{2l}\right].\tag{11.22b}$$

在最后一步，用到了例 10.1 中给出的 (10.4c) 式.

现在，正如上一节中指出的，由于圆盘上有面电荷存在，所以在 $r<a$ 范围内的静电势一定不能写成

$$u(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}B_l\left(\frac{r}{a}\right)^{l}\mathrm{P}_l(\cos\theta)$$

的形式. 因此，从根本上说，我们就失去了由 $u(r,\theta)$ 在轴线上的特殊值 (11.22a) 或 (11.22b) 式导出它在空间任意一点的值的出发点. 即使在 $z>0$ 或 $z<0$ 的半无界空间内单独求解，静电势满足 Laplace 方程，而圆盘上的电荷分布则以非齐次的 (第二类) 边界条件

$$\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}\Big|_{\theta=\pi/2}=\frac{1}{4\varepsilon_0}\frac{(\alpha+2)Q}{\pi a^2}\left(\frac{r}{a}\right)^{\alpha}\operatorname{sgn}(\cos\theta)\tag{11.23}$$

的面目出现. 如果我们令

$$u(r,\theta)=u_1(r,\theta)+u_2(r,\theta),$$

那么，问题就转化为：能否找到一个特别的齐次化函数 $u_1(r,\theta)$，既满足非齐次边界条件 (11.23) 及轴线上的有界条件，它本身也是 Laplace 方程的解，从而保证 $u_2(r,\theta)$ 既满足 Laplace 方程，又满足齐次边界条件

$$\frac{\partial u_2}{\partial\theta}\Big|_{\theta=\pi/2}=0\tag{11.24}$$

及轴线上的有界条件. 正是基于这样的理解，我们不妨从 (11.22a) 或 (11.22b) 式出发，运用延拓法则 (11.15)① 而得到试探解

$$\begin{aligned}u_{内}(r,\theta) &= \frac{(\alpha+2)Q}{4\pi\varepsilon_0 a}\left[\left(\frac{r}{a}\right)^{\alpha+1}\mathrm{P}_{\alpha+1}(|\cos\theta|)\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2l-\alpha-1}+\frac{1}{2l+\alpha+2}\right)\mathrm{P}_{2l}(0)\right.\\&\quad\left.-\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{2l-\alpha-1}\left(\frac{r}{a}\right)^{2l}\mathrm{P}_{2l}(0)\,\mathrm{P}_{2l}(\cos\theta)\right] \qquad (11.25\mathrm{a})\\&= -\frac{(\alpha+2)Q}{4\pi\varepsilon_0 a}\left[\frac{1}{\mathrm{P}'_{\alpha+1}(0)}\left(\frac{r}{a}\right)^{\alpha+1}\mathrm{P}_{\alpha+1}(|\cos\theta|)\right.\\&\quad\left.+\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{2l-\alpha-1}\left(\frac{r}{a}\right)^{2l}\mathrm{P}_{2l}(0)\,\mathrm{P}_{2l}(\cos\theta)\right]. \qquad (11.25\mathrm{b})\end{aligned}$$

容易看出， (11.25a) 或 (11.25b) 式中的第一项的确是 Laplace 方程的解，而且满足边界条件 (11.23) 及有关的有界条件，因此 (11.25a) 或 (11.25b) 式的确是正确的解. 后面直接求解相应定解问题也可以验证这一点.

对于 α 等于奇数 $2k-1$ 的情形，直接计算 (11.21) 式中的积分，或由 (11.22a) (11.22b) 两式按 l'Hôpital 法则取极限，即可得

$$\begin{aligned}u_{内}\Big|_{轴线上} &= \frac{(2k+1)Q}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(\frac{1}{4k+1}-\ln\frac{|z|}{a}\right)\left(\frac{z}{a}\right)^{2k}\mathrm{P}_{2k}(0)\\&\quad+\frac{(2k+1)Q}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(\frac{z}{a}\right)^{2k}\sum_{l=0}^{\infty}{}'\left(\frac{1}{2l+2k+1}+\frac{1}{2l-2k}\right)\mathrm{P}_{2l}(0)\\&\quad-\frac{(2k+1)Q}{4\pi\varepsilon_0 a}\sum_{l=0}^{\infty}{}'\frac{1}{2l-2k}\left(\frac{z}{a}\right)^{2l}\mathrm{P}_{2l}(0) \qquad (11.26\mathrm{a})\\&= -\frac{(2k+1)Q}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(\frac{z}{a}\right)^{2k}\mathrm{P}_{2k}(0)\left\{\ln\frac{|z|}{a}+\frac{1}{2}\left[\psi\left(\frac{1}{2}+k\right)-\psi(1+k)\right]\right\}\\&\quad-\frac{(2k+1)Q}{4\pi\varepsilon_0 a}\sum_{l=0}^{\infty}{}'\frac{1}{2l-2k}\mathrm{P}_{2l}(0)\left(\frac{z}{a}\right)^{2l}, \qquad (11.26\mathrm{b})\end{aligned}$$

其中 $\sum'$ 表示和式中不含 $l=k$ 项，$\psi(z)$ 是函数 $\Gamma(z)$ 的对数微商. (11.26a) 和 (11.26b) 式也可直接互化，只需利用例 10.3 中给出的 (10.10) 式即可.

这里需要注意，(11.26a) 和 (11.26b) 式中出现了 $\ln|z|$ 项，这表明原有的延拓法则不再适用. 为了能够继续运用延拓法，根据轴线上静电势的数值推断出空间任意一点的静电势，就需要补充上新的延拓法则. 在这种情况下，我们必须直接求解相应的定解问题，从而为建立新的延拓法则提供依据.

① 还要假设对于非整数 α，延拓法则 (11.15) 仍然成立.

11.2.2 由方程法求解

容易列出此定解问题为

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)=-\frac{\alpha+2}{2\varepsilon_0}\frac{Q}{\pi a^2}\left(\frac{r}{a}\right)^{\alpha}\frac{1}{r}\delta\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\eta(a-r),\tag{11.27a}$$

$$u\big|_{\theta=0}\text{有界},\qquad u\big|_{\theta=\pi}\text{有界},\tag{11.27b}$$

$$u\big|_{r=0}\text{有界},\qquad u\big|_{r\to\infty}\to 0.\tag{11.27c}$$

根据边界条件 (11.27b) 和 (11.27c)，并考虑到所求的解应当对于赤道面对称，$u(r,\theta) = u(r,\pi-\theta)$，因此，我们可以写出解的形式为

$$u_{外}(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}A_l\left(\frac{a}{r}\right)^{2l+1}\mathrm{P}_{2l}(\cos\theta),\tag{11.28a}$$

$$u_{内}(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}R_l(r)\mathrm{P}_{2l}(\cos\theta),\tag{11.28b}$$

其中的 A_l 和 $R_l(r)$ 分别为待定常数和待定函数. 仿照 §11.1 中关于均匀带电圆盘的标准解法，容易求得

$$A_l=\frac{(\alpha+2)Q}{4\pi\varepsilon_0 a}\frac{1}{2l+\alpha+2}\mathrm{P}_{2l}(0),\tag{11.29}$$

$$\begin{aligned}R_l(r)=&\frac{(\alpha+2)Q}{4\pi\varepsilon_0 a}\frac{1}{2l+\alpha+2}\left(\frac{r}{a}\right)^{\alpha+1}\mathrm{P}_{2l}(0)\\&-\frac{(\alpha+2)Q}{4\pi\varepsilon_0 a}\frac{1}{2l-\alpha-1}\mathrm{P}_{2l}(0)\left[\left(\frac{r}{a}\right)^{2l}-\left(\frac{r}{a}\right)^{\alpha+1}\right].\end{aligned}\tag{11.30}$$

代入 (11.28a) 和 (11.28b) 式，就可以看出，这样解得的 $u_{外}$ 和 $u_{内}$ 正是用延拓法得到的结果 (11.22) 和 (11.25b).

当 α 等于奇数 $2k-1$ 时，我们看到，系数 A_l 仍有意义 (因而上面求得的 $u_{外}$ 仍成立)，但 (11.30) 式中的 $R_l(r)$ 在 $l=k=(\alpha+1)/2$ 时变为不定式，应当按照 l'Hôpital 法则求极限，或者重新求解，从而得到

$$R_k(r)=-\frac{(2k+1)Q}{4\pi\varepsilon_0 a}\mathrm{P}_{2k}(0)\left(\frac{r}{a}\right)^{2k}\ln\frac{r}{a}+\frac{(2k+1)Q}{4\pi\varepsilon_0 a}\frac{1}{4k+1}\mathrm{P}_{2k}(0)\left(\frac{r}{a}\right)^{2k}.\tag{11.31}$$

相应地，$u_{内}$ 就变为

$$u_{内}(r,\theta)=-\frac{(2k+1)Q}{4\pi\varepsilon_0 a}\left[\sum_{l=0}^{\infty}{}'\frac{1}{2l-2k}\left(\frac{r}{a}\right)^{2l}\mathrm{P}_{2l}(0)\,\mathrm{P}_{2l}(\cos\theta)\right.$$

$$+\left(\frac{r}{a}\right)^{2k}\sum_{l=0}^{\infty}{}'\left(\frac{1}{2l-2k}+\frac{1}{2l+2k+1}\right)\mathrm{P}_{2l}(0)\,\mathrm{P}_{2l}(\cos\theta)$$
$$+\left(\frac{1}{4k+1}-\ln\frac{r}{a}\right)\left(\frac{r}{a}\right)^{2k}\mathrm{P}_{2k}(0)\,\mathrm{P}_{2k}(\cos\theta)\Bigg]. \tag{11.32}$$

可以证明，在 (11.25a) 或 (11.25b) 式中令 $\alpha\to 2k-1$，按 l'Hôpital 法则求极限，也可以得到这个结果．在这些计算中，要用到例 10.3 中给出的结果．

11.2.3 讨论 —— 延拓法则的再扩充

除了上面讲的延拓法和方程法求解外，本题还可以根据均匀带电细圆环所产生的静电势，用叠加法 (积分) 求解，所得结果与上面两种方法相同．限于篇幅，本书从略．

前面提到，当 α 等于奇数 $2k-1$ 时，由于因子 $\ln|z|$ 的出现，我们无法根据已有的法则将 (11.26a) 或 (11.26b) 式的结果延拓到 $r<a$ 内的任意一点．但是，仔细分析一下，不难发现

$$\left(\frac{|z|}{a}\right)^{\nu}\ln\frac{|z|}{a}=\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{|z|}{a}\right)^{\nu},$$

因此，如果我们要将 (11.26a) 或 (11.26b) 式作延拓，则除了上节中给出的延拓法则

$$z^{l}\to r^{l}\mathrm{P}_{l}(\cos\theta),\qquad (l\ 为非负整数) \tag{11.33a}$$

$$|z|^{\nu}\to r^{\nu}\mathrm{P}_{\nu}(|\cos\theta|)\qquad (\nu\geqslant 0) \tag{11.33b}$$

(这里用箭号“→”表示延拓关系) 之外，对于 $\ln|z|$ 项，还必须补充上一条新的延拓法则：

$$\left(\frac{|z|}{a}\right)^{\nu}\ln\frac{|z|}{a}\to\frac{\partial}{\partial\nu}\left[\left(\frac{r}{a}\right)^{\nu}\mathrm{P}_{\nu}(|\cos\theta|)\right] \tag{11.33c}$$

$$=\left(\frac{r}{a}\right)^{\nu}\mathrm{P}_{\nu}(|\cos\theta|)\ln\frac{r}{a}+\left(\frac{r}{a}\right)^{\nu}\frac{\partial\mathrm{P}_{\nu}(|\cos\theta|)}{\partial\nu}. \tag{11.33d}$$

按照这种做法，容易验证，将 (11.26a) 或 (11.26b) 式延拓，的确就可以得到 (11.32) 式．当然，由于补充了新的延拓法则 (11.33c)，就增加了延拓法 (原有的优点是简便易行！) 的复杂性，也增加了一定的计算量．这里列出的延拓法则显然只适用于 $r<a$ 的范围．和上节比较，延拓法则 (11.33b) 也可以推广为 $\nu\geqslant 0$ 的一般情形．但是因为受到静电势在轴线方向 ($\theta=0$ 和 π) 上有界的限制，故延拓法则 (11.33a) 不能作此推广．如果涉及 $r>a$ 的无界空间，上述延拓法则应当作相应的修改，不再赘述．

最后需要指出，当圆盘上有任意形式的径向电荷分布 (例如，对于导体圆盘) 时，原则上可以将本节的结果适当叠加即可．但一般说来，不一定能得到比较简单形式的解．

§11.3　圆形面偶极层的静电势①

以上两节讨论了带电圆盘的静电势问题，给出了两种特殊电荷分布 (均匀分布和轴对称分布) 情形下的静电势. 我们比较了常用的两种解法，即延拓法与方程法，澄清了延拓法求解中可能发生的一些错误. 本节仍继续采用这两种方法，讨论圆形面偶极层的静电势问题.

采用延拓法，成败的关键在于必须考察应用条件. 就圆形面偶极层的静电势问题而言，原则上当然可以使用延拓的办法，由偶极层在轴线上的特殊值推出它在空间任意一点的静电势，包括圆形面偶极层在近处和远处的静电势. 下面将从对一种不正确做法的分析 (11.3.1 与 11.3.2 小节) 入手，讨论延拓法的正确做法及其依据 (11.3.3 小节)，并且通过严格求解偏微分方程加以验证 (11.3.4 小节). 作为延拓法的进一步应用，11.3.5 小节还讨论了有限间距的圆形平行板 (分别带有异性面电荷) 的静电势问题. 除了一些具体计算结果外，笔者愿意再次强调延拓法的正确使用.

11.3.1　一种不正确的做法

设有一对均匀带电 (电量分别是 $+q$ 和 $-q$) 的圆盘，半径为 a，两盘共轴放置且相距 $2d$，$d\to 0$ 而 $2qd\to p$. 取球坐标系，极轴 ($\theta=0$) 过两圆盘中心而垂直于盘面，坐标原点分别与圆盘相距 d. 这时空间任意一点 (r,θ,ϕ) 的静电势显然与 ϕ 无关，即 $u=u(r,\theta)$. 一种做法是：在偶极圆盘 (先假设间距 $2d$ 有限) 上取一对同轴圆环，半径为 ρ，环上电量分别为

$$\pm\frac{q}{\pi a^2}\cdot 2\pi\rho\,\mathrm{d}\rho=\pm\frac{2q}{a^2}\rho\,\mathrm{d}\rho.$$

于是，轴线上任意一点 ($\theta=0$ 或 π, $z=r\,\mathrm{sgn}\,(z)$) 的静电势即为

$$\mathrm{d}u\big|_{\text{轴线上}}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2q}{a^2}\rho\,\mathrm{d}\rho\left[\frac{1}{\sqrt{\rho^2+(z-d)^2}}-\frac{1}{\sqrt{\rho^2+(z+d)^2}}\right]. \tag{11.34}$$

将这些圆环叠加起来，得

$$\begin{aligned}u\big|_{\text{轴线上}}&=\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{q}{2\pi a^2}\int_0^a\left[\frac{1}{\sqrt{\rho^2+(z-d)^2}}-\frac{1}{\sqrt{\rho^2+(z+d)^2}}\right]\rho\mathrm{d}\rho\\&=\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{q}{2\pi a^2}\Big[\sqrt{a^2+d^2+z^2-2zd}-|z-d|\\&\qquad-\sqrt{a^2+d^2+z^2+2zd}+|z+d|\Big].\end{aligned} \tag{11.35}$$

① 原载《大学物理》2003 年第 1 期. 现作了少许修改.

再取极限 $d\to 0,\ 2qd\to p$，就得到偶极层在轴线上任意一点的静电势

$$u\Big|_{\text{轴线上}}=\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{p}{2\pi a^2}\left(\operatorname{sgn}(z)-\frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}\right)$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{\varepsilon_0}\dfrac{p}{2\pi a^2}\left(\operatorname{sgn}(z)-\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}\mathrm{P}_{2l}(0)\left(\frac{z}{a}\right)^{2l+1}\right), & |z|<a, \quad (11.36\text{a})\\[2ex] -\dfrac{1}{\varepsilon_0}\dfrac{p}{2\pi a^2}\operatorname{sgn}(z)\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}\mathrm{P}_{2l+2}(0)\left(\frac{a}{z}\right)^{2l+2}, & |z|>a. \quad (11.36\text{b})\end{cases}$$

容易认为，只要不在偶极层面上，则空间任意一点的电势满足 Laplace 方程，因而解为

$$u_{内}(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}A_l\left(\frac{r}{a}\right)^{l}\mathrm{P}_l(\cos\theta),\qquad r<a, \tag{11.37a}$$

$$u_{外}(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}B_l\left(\frac{a}{r}\right)^{l+1}\mathrm{P}_l(\cos\theta),\qquad r>a. \tag{11.37b}$$

也写出 (11.37a) 和 (11.37b) 式在轴线上的特殊形式，分别在 $\theta<\pi/2$ 和 $\theta>\pi/2$ 的空间中定出叠加系数 A_l 和 B_l，最后就给出圆形面偶极层在空间任意一点的电势. 当 $r<a$ 时，

$$u_{内}(r,\theta)=\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{p}{2\pi a^2}\left[\operatorname{sgn}(z)-\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^{2l+1}\mathrm{P}_{2l}(0)\,\mathrm{P}_{2l+1}(\cos\theta)\right]; \tag{11.38a}$$

当 $r>a$ 时，

$$u_{外}(r,\theta)=-\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{p}{2\pi a^2}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^{2l+2}\mathrm{P}_{2l+2}(0)\,\mathrm{P}_{2l+1}(\cos\theta). \tag{11.38b}$$

当 $r>a$ 时，上述计算和结果都是正确的. 但当 $r<a$ 时，计算过程却不正确. 这是因为：

(1) 对于不在偶极层面上的空间任意一点，电势的确满足 Laplace 方程，但这并不足以导出解式 (11.37a). (11.37a) 式成立的条件是在球内 ($r<a$) 无电荷，即电势必须在球内处处 (包括偶极层所在的赤道面上) 满足 Laplace 方程.

(2) 从形式上看，公式 (11.38a) 和 (11.37a) 式也存在明显的矛盾，即 (11.37a) 式并不包含 (11.38a) 式中的第一项.

(3) 由于偶极层面 ($\theta=\pi/2, r<a$) 上存在电荷分布，球内电势 $u_{内}$ 应当满足 Poisson 方程. 它的解当然不能表示成 (11.37a) 式的形式. 在 11.3.3 小节中将讨论这种非齐次方程的求解问题.

(4) 也可以换一种提法：球内电势 $u_{内}$ 在上半球 $(\theta<\pi/2)$ 或下半球 $(\theta>\pi/2)$ 内均满足 Laplace 方程，但在赤道面 $(\theta=\pi/2)$ 上满足非齐次边界条件

$$u_{内}\big|_{\theta=\pi/2}=\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{p}{2\pi a^2}\,\mathrm{sgn}\,(z),\tag{11.39}$$

因此，在求解有关边值问题时，必须先将边界条件齐次化，即令

$$u_{内}(r,\theta)=u_0(r,\theta)+u_1(r,\theta),$$

使

$$u_0\big|_{\theta=\pi/2}=\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{p}{2\pi a^2}\,\mathrm{sgn}\,(z),\tag{11.40a}$$

$$u_1\big|_{\theta=\pi/2}=0.\tag{11.40b}$$

就本题而言，可取

$$u_0(r,\theta)=\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{p}{2\pi a^2}\,\mathrm{sgn}\,(z),\tag{11.41a}$$

相应地，$u_1(r,\theta)$ 在上半球或下半球内仍满足 Laplace 方程. 但这时由于边界条件 (11.40b) 的限制，其一般解只能是

$$u_1(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}A_l\left(\frac{r}{a}\right)^{2l+1}\mathrm{P}_{2l+1}\left(\cos\theta\right),\tag{11.41b}$$

也不是 (11.37a) 式的形式.

(5) 在 $0<\theta<\pi/2$ 或 $\pi/2<\theta<\pi$ 的半空间中，正交完备的本征函数组应当是 $\{\mathrm{P}_{2l+1}\left(\cos\theta\right),l=0,1,2,\cdots\}$ 或 $\{\mathrm{P}_{2l}\left(\cos\theta\right),l=0,1,2,\cdots\}$，视 $\theta=0$ 处的边界条件而定 (相应的本征值问题见第九章例 9.1 — 9.3). 在 $0<\theta<\pi/2$ 或 $\pi/2<\theta<\pi$ 的半空间中，函数组 $\{\mathrm{P}_l\left(\cos\theta\right),l=0,1,2,\cdots\}$ 是**超完备的**. 这表现为 $\mathrm{P}_{2l}\left(\cos\theta\right)$ 与 $\mathrm{P}_{2l+1}\left(\cos\theta\right)$ 之间并不正交：

$$\int_0^{\pi/2}\mathrm{P}_{2k}\left(\cos\theta\right)\,\mathrm{P}_{2l+1}\left(\cos\theta\right)\,\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\neq0,$$

$$\int_{\pi/2}^{\pi}\mathrm{P}_{2k}\left(\cos\theta\right)\,\mathrm{P}_{2l+1}\left(\cos\theta\right)\,\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\neq0.$$

所以，退一步讲，即使把解 $u_1(r,\theta)$ 写成 (11.37a) 式的形式，这个展开也不具有唯一性，不能比较系数.

(6) 就结果而言，(11.38a) 式还是正确的. 但这是两次不正确运算 (不正确的一般解与不正确的比较系数)“抵消”的结果，绝不能当成是计算正确性的佐证.

(7) 可以换一个角度来理解解式 (11.38a) 的正确性. 根据 (11.41a) 与 (11.41b) 式，我们知道，静电势在球内 ($r<a$) 的正确解式应当为

$$u_{内}(r,\theta)=\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{p}{2\pi a^2}\operatorname{sgn}(z)+\sum_{l=0}^{\infty}A_l\left(\frac{r}{a}\right)^{2l+1}\mathrm{P}_{2l+1}(\cos\theta),$$

因此，在轴线上 (注意当 $\theta=0,\pi$ 时 $z=\pm r$)，

$$u_{内}\Big|_{轴线上}=\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{p}{2\pi a^2}\operatorname{sgn}(z)+\sum_{l=0}^{\infty}A_l\left(\frac{z}{a}\right)^{2l+1},$$

与 (11.36a) 式相比较，根据在区间 $0<z<a$ 或 $-a<z<0$ 上 Taylor 展开的唯一性，就能定出

$$A_l=-\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{p}{2\pi a^2}\left(\frac{r}{a}\right)^{2l+1}\mathrm{P}_{2l}(0).$$

11.3.2 延拓法的正确做法

为了正确运用延拓法，最简单的办法是直接引用笔者在前两节中给出的延拓法则 (" →" 表示延拓关系)

$$\begin{aligned} z^l &\to r^l\mathrm{P}_l(\cos\theta), & z^{-l-1} &\to r^{-l-1}\mathrm{P}_l(\cos\theta),\\ |z|^l &\to r^l\mathrm{P}_l(|\cos\theta|), & |z|^{-l-1} &\to r^{-l-1}\mathrm{P}_l(|\cos\theta|), \end{aligned}$$

同时保持 (11.36a) 式中单独出现的 $\operatorname{sgn}(z)$ 在延拓后不变. 这样就能直接由 (11.36a) 和 (11.36b) 式推得 (11.38a) 和 (11.38b) 式. 简单说来，正确的延拓只能施加于偶极圆环而非整个偶极圆盘. 为此，令 $b=\sqrt{\rho^2+d^2}$，由 (11.34) 式即可得

$$\mathrm{d}u\Big|_{轴线上}=\begin{cases}\dfrac{1}{\varepsilon_0}\dfrac{q}{\pi a^2}\dfrac{\rho\mathrm{d}\rho}{b}\cdot\operatorname{sgn}(z)\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{b}{z}\right)^{2l+2}\mathrm{P}_{2l+1}\left(\frac{d}{b}\right), & |z|>b,\\ \dfrac{1}{\varepsilon_0}\dfrac{q}{\pi a^2}\dfrac{\rho\mathrm{d}\rho}{b}\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{z}{b}\right)^{2l+1}\mathrm{P}_{2l+1}\left(\frac{d}{b}\right), & |z|<b.\end{cases}$$

再令 $d\to 0$, $2qd\to p$，于是 $b\to\rho$, $q\mathrm{P}_{2l+1}(d/b)\to\dfrac{p}{2\rho}\mathrm{P}'_{2l+1}(0)$，所以

$$\mathrm{d}u\Big|_{轴线上}=\begin{cases}\dfrac{1}{\varepsilon_0}\dfrac{p}{2\pi a^2}\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\rho}\cdot\operatorname{sgn}(z)\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{\rho}{z}\right)^{2l+2}\mathrm{P}'_{2l+1}(0), & |z|>\rho, & (11.42\text{a})\\ \dfrac{1}{\varepsilon_0}\dfrac{p}{2\pi a^2}\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\rho}\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{z}{\rho}\right)^{2l+1}\mathrm{P}'_{2l+1}(0), & |z|<\rho. & (11.42\text{b})\end{cases}$$

一方面，只要 $r\neq\rho$，此偶极环所产生的电势一定满足 Laplace 方程，因此可以写出它在 $r>\rho$ 和 $r<\rho$ 空间内的一般形式 (类似于 (11.37a) 和 (11.37b) 式). 将它在

轴线上的特殊形式和 (11.42a) 及 (11.42b) 式比较，定出其中的叠加系数，从而就可以求得偶极环在空间任意一点的静电势

$$\mathrm{d}u(r,\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\varepsilon_0}\dfrac{p}{2\pi a^2}\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\rho}\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^{2l+2}\mathrm{P}'_{2l+1}(0)\,\mathrm{P}_{2l+1}(\cos\theta)\,, & r>\rho, \quad (11.43\mathrm{a})\\[2ex] \dfrac{1}{\varepsilon_0}\dfrac{p}{2\pi a^2}\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\rho}\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^{2l+1}\mathrm{P}'_{2l+1}(0)\,\mathrm{P}_{2l+1}(\cos\theta)\,, & r<\rho. \quad (11.43\mathrm{b})\end{cases}$$

将全部圆环的贡献叠加起来，就可以给出整个面偶极层在 $r<a$ 空间内任意一点的静电势

$$\begin{aligned}u_{内}(r,\theta)&=\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{p}{2\pi a^2}\sum_{l=0}^{\infty}r^{-2l-2}\left(\int_0^r\rho^{2l+1}\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{P}'_{2l+1}(0)\,\mathrm{P}_{2l+1}(\cos\theta)\\&\quad+\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{p}{2\pi a^2}\sum_{l=0}^{\infty}r^{2l+1}\left(\int_r^a\rho^{-2l-2}\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{P}'_{2l+1}(0)\,\mathrm{P}_{2l+1}(\cos\theta)\\&=\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{p}{2\pi a^2}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{4l+3}{(2l+1)(l+2)}\mathrm{P}'_{2l+1}(0)\,\mathrm{P}_{2l+1}(\cos\theta)\\&\quad-\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{p}{2\pi a^2}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{2l+1}\left(\frac{r}{a}\right)^{2l+1}\mathrm{P}'_{2l+1}(0)\,\mathrm{P}_{2l+1}(\cos\theta)\,.\end{aligned}\tag{11.44a}$$

容易证明

$$\mathrm{P}'_{2l+1}(0)=(2l+1)\mathrm{P}_{2l}(0)=-(2l+2)\mathrm{P}_{2l+2}(0)=(-1)^l\frac{(2l+1)!}{2^{2l}(l!)^2},\tag{11.45a}$$

$$\operatorname{sgn}(z)=\frac{\cos\theta}{|\cos\theta|}=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{41+3}{(2l+1)(l+2)}\mathrm{P}'_{2l+1}(0)\,\mathrm{P}_{2l+1}(\cos\theta)\,,\tag{11.45b}$$

所以 (11.44a) 式和 (11.38a) 式完全一致.

当然，从 (11.43a) 式也可以叠加出面偶极层在 $r>a$ 空间内任意一点的静电势

$$\begin{aligned}u_{外}(r,\theta)&=\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{p}{2\pi a^2}\sum_{l=0}^{\infty}r^{-2l-2}\left(\int_0^a\rho^{2l+1}\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{P}'_{2l+1}(0)\,\mathrm{P}_{2l+1}(\cos\theta)\\&=\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{p}{2\pi a^2}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{2l+2}\left(\frac{a}{r}\right)^{2l+2}\mathrm{P}'_{2l+1}(0)\,\mathrm{P}_{2l+1}(\cos\theta)\,.\end{aligned}\tag{11.44b}$$

利用 (11.45a) 式，就可以将它化为 (11.38b) 式.

11.3.3 方程法求解

为了验证上述延拓法的结果，可以严格求解相关的边值问题：

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)=-\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{p}{\pi a^2}\frac{1}{r^2}\delta'\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\eta(a-r),\tag{11.46a}$$

$$u\big|_{\theta=0}\ 有界,\qquad u\big|_{\theta=\pi}\ 有界, \tag{11.46b}$$

$$u\big|_{r=0}\ 有界,\qquad u\big|_{r\to\infty}\to 0. \tag{11.46c}$$

当 $r>a$ 时，电势满足 Laplace 方程，在边界条件 (11.46b) 和 (11.46c) 的限制下，一般解为

$$u_{外}(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}A_l\left(\frac{a}{r}\right)^{l+1}\mathrm{P}_l(\cos\theta).$$

当 $r<a$ 时，电势满足 Poisson 方程，因而应按相应齐次问题的本征函数 $\mathrm{P}_l(\cos\theta)$ 展开:

$$u_{内}(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}R_l(r)\mathrm{P}_l(\cos\theta).$$

代入方程 (11.46a)，同时也将 $\delta'(\theta-\pi/2)$ 展开:

$$\delta'\Big(\theta-\frac{\pi}{2}\Big)=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{4l+3}{2}\mathrm{P}'_{2l+1}(0)\ \mathrm{P}_{2l+1}(\cos\theta),$$

就可以导出 $R_l(r)$ 所满足的常微分方程

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r^2\frac{\mathrm{d}R_{2l}(r)}{\mathrm{d}r}\right]-\frac{2l(2l+1)}{r^2}R_{2l}(r)=0,\\
&\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r^2\frac{\mathrm{d}R_{2l+1}(r)}{\mathrm{d}r}\right]-\frac{(2l+1)(l+2)}{r^2}R_{2l+1}(r)=-\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{p}{\pi a^2}\frac{1}{r^2}\frac{4l+3}{2}\mathrm{P}'_{2l+1}(0).
\end{aligned}$$

根据有界条件 (11.46c)，$R_l(0)$ 也应当有界，所以这两个方程的解是

$$\begin{aligned}
&R_{2l}(r)=B_{2l}\left(\frac{r}{a}\right)^{2l},\\
&R_{2l+1}(r)=\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{p}{2\pi a^2}\frac{4l+3}{(2l+1)(l+2)}\mathrm{P}'_{2l+1}(0)+B_{2l+1}\left(\frac{r}{a}\right)^{2l+1}.
\end{aligned}$$

利用连接条件，求出 A_l 和 B_l，最后就可以得到与 (11.38a) 和 (11.38b) 式完全相同的结果. 这就验证了上一节中延拓法的正确性.

11.3.4 其他解法

面偶极层的静电势还可以通过两层间距为 0 的两层均匀带电圆盘的静电势叠加而得. 为了书写的方便，不妨设单层带电圆盘 (电量仍为 q) 在空间任意一点的静电势为 $qv(r,\theta)$，则面偶极层在空间任意一点的静电势

$$\begin{aligned}
u(r,\theta)&=\lim_{d\to 0}\left[q\cdot 2d\cdot\frac{v_{\uparrow}(r,\theta)-v_{\downarrow}(r,\theta)}{2d}\right]\\
&=-p\frac{\partial v(r,\theta)}{\partial z}=-p\left[\frac{\partial v(r,\theta)}{\partial r}\cos\theta+\frac{\partial v(r,\theta)}{\partial(\cos\theta)}\frac{\sin^2\theta}{r}\right],
\end{aligned}\tag{11.47}$$

其中 $v_{\uparrow}(r,\theta)$ 和 $v_{\downarrow}(r,\theta)$ 分别是将圆盘向上和向下移动 d 后的静电势. 在 §11.1 中已经给出了 $v(r,\theta)$ 的形式 (例如，见 (11.10) 式)，将它代入 (11.47) 式求导，并利用 (11.45a) 式及 Legendre 项式的递推关系

$$(2l+1)\cos\theta\,\mathrm{P}_l(\cos\theta) = l\mathrm{P}_{l-1}(\cos\theta) + (l+1)\mathrm{P}_{l+1}(\cos\theta),$$
$$(2l+1)\sin^2\theta\,\mathrm{P}_l'(\cos\theta) = l(l+1)\big[\mathrm{P}_{l-1}(\cos\theta) - \mathrm{P}_{l+1}(\cos\theta)\big],$$

即可得到

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_{内}(r,\theta)}{\partial z} =& \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{1}{2\pi a^2}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2l-1}+\frac{1}{2l+2}\right)\mathrm{P}_{2l}(0)\,\cos\theta\,\mathrm{P}_{2l}(\cos\theta)\\
&+\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{1}{2\pi a^2}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2l-1}+\frac{1}{2l+2}\right)\mathrm{P}_{2l}(0)\,\sin^2\theta\,\mathrm{P}_{2l}'(\cos\theta)\\
&-\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{1}{2\pi a^2}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{2l}{2l-1}\left(\frac{r}{a}\right)^{2l-1}\mathrm{P}_{2l}(0)\,\cos\theta\,\mathrm{P}_{2l}(\cos\theta)\\
&-\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{1}{2\pi a^2}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{2l-1}\left(\frac{r}{a}\right)^{2l-1}\mathrm{P}_{2l}(0)\,\sin^2\theta\,\mathrm{P}_{2l}'(\cos\theta)\\
=&\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{1}{2\pi a^2}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{(2l-1)(l+2)}\mathrm{P}_{2l}(0)\\
&\times\big[2l\,\mathrm{P}_{2l-1}(\cos\theta)+(2l+1)\,\mathrm{P}_{2l+1}(\cos\theta)\big]\\
&+\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{1}{2\pi a^2}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{2l(2l+1)}{(2l-1)(l+2)}\mathrm{P}_{2l}(0)\,\big[\mathrm{P}_{2l-1}(\cos\theta)-\mathrm{P}_{2l+1}(\cos\theta)\big]\\
&-\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{1}{2\pi a^2}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{2l}{(2l-1)\,(4l+1)}\left(\frac{r}{a}\right)^{2l-1}\mathrm{P}_{2l}(0)\\
&\times\big[2l\,\mathrm{P}_{2l-1}(\cos\theta)+(2l+1)\,\mathrm{P}_{2l+1}(\cos\theta)\big]\\
&-\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{1}{2\pi a^2}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{2l(2l+1)}{(2l-1)\,(4l+1)}\left(\frac{r}{a}\right)^{2l-1}\mathrm{P}_{2l}(0)\\
&\times\big[\mathrm{P}_{2l-1}(\cos\theta)-\mathrm{P}_{2l+1}(\cos\theta)\big],
\end{aligned}$$

整理得

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_{内}(r,\theta)}{\partial z} =& \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{1}{2\pi a^2}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{2l}{2l-1}\mathrm{P}_{2l}(0)\,\mathrm{P}_{2l-1}(\cos\theta)\\
&-\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{1}{2\pi a^2}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{2l+1}{2l+2}\mathrm{P}_{2l}(0)\,\mathrm{P}_{2l+1}(\cos\theta)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{1}{2\pi a^2}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{2l}{2l-1}\left(\frac{r}{a}\right)^{2l-1}\mathrm{P}_{2l}(0)\,\mathrm{P}_{2l-1}(\cos\theta)\\
=&\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{1}{2\pi a^2}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{2l+2}{2l+1}\mathrm{P}_{2l+2}(0)\,\mathrm{P}_{2l+1}(\cos\theta)\\
&-\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{1}{2\pi a^2}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{2l+1}{2l+2}\mathrm{P}_{2l}(0)\,\mathrm{P}_{2l+1}(\cos\theta)\\
&-\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{1}{2\pi a^2}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{2l+2}{2l+1}\left(\frac{r}{a}\right)^{2l-1}\mathrm{P}_{2l}(0)\,\mathrm{P}_{2l+1}(\cos\theta)\\
=&-\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{1}{2\pi a^2}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{4l+3}{(2l+1)(l+2)}\mathrm{P}'_{2l+1}(0)\,\mathrm{P}_{2l+1}(\cos\theta)\\
&+\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{1}{2\pi a^2}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{2l+1}\left(\frac{r}{a}\right)^{2l+1}\mathrm{P}'_{2l+1}(0)\,\mathrm{P}_{2l+1}(\cos\theta),
\end{aligned}
$$

因此就得到和延拓法或方程法完全相同的结果，即 (11.44a) 式. 同样

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial v_{外}(r,\theta)}{\partial z}=&-\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{1}{2\pi a^2}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{2l+1}{2l+2}\left(\frac{a}{r}\right)^{2l+2}\mathrm{P}_{2l}(0)\,\cos\theta\,\mathrm{P}_{2l}(\cos\theta)\\
&+\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{1}{2\pi a^2}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{2l+2}\left(\frac{a}{r}\right)^{2l+2}\mathrm{P}_{2l}(0)\,\sin^2\theta\,\mathrm{P}'_{2l}(\cos\theta)\\
=&-\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{1}{2\pi a^2}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{2l+1}{(2l+2)\,(4l+1)}\left(\frac{a}{r}\right)^{2l+2}\mathrm{P}_{2l}(0)\\
&\times\left[2l\,\mathrm{P}_{2l-1}(\cos\theta)+(2l+1)\,\mathrm{P}_{2l+1}(\cos\theta)\right]\\
&+\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{1}{2\pi a^2}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{2l(2l+1)}{(2l+2)\,(4l+1)}\left(\frac{a}{r}\right)^{2l+2}\mathrm{P}_{2l}(0)\\
&\times\left[\mathrm{P}_{2l-1}(\cos\theta)-\mathrm{P}_{2l+1}(\cos\theta)\right]\\
=&-\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{1}{2\pi a^2}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(2l+1)^2}{(2l+2)\,(4l+1)}\left(\frac{a}{r}\right)^{2l+2}\mathrm{P}_{2l}(0)\,\mathrm{P}_{2l+1}(\cos\theta)\\
&-\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{1}{2\pi a^2}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{2l(2l+1)}{(2l+2)\,(4l+1)}\left(\frac{a}{r}\right)^{2l+2}\mathrm{P}_{2l}(0)\,\mathrm{P}_{2l+1}(\cos\theta)\\
=&-\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{1}{2\pi a^2}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{2l+1}{2l+2}\left(\frac{a}{r}\right)^{2l+2}\mathrm{P}_{2l}(0)\,\mathrm{P}_{2l+1}(\cos\theta)\\
=&-\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{1}{2\pi a^2}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{2l+2}\left(\frac{a}{r}\right)^{2l+2}\mathrm{P}'_{2l+1}(0)\,\mathrm{P}_{2l+1}(\cos\theta),
\end{aligned}
$$

因此也可得到 (11.44b) 式.

11.3.5 d 为有限值的情形

d 为有限值 (相当于有限尺寸的圆形平行板电容器) 时，也可以类似地处理. 特别是采用延拓法处理，非常方便. 注意这时 (11.35) 式仍然成立. 令 $c=\sqrt{a^2+d^2}$，则当 $|z|>c$ 时，可以将 (11.35) 式展开为

$$\begin{aligned}u\Big|_{\text{轴线上}}&=\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{q}{2\pi a^2}|z|\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{(l+1)\ (l+2)}\left(\frac{c}{z}\right)^{l+2}\left[1-\left(\frac{d}{c}\right)^2\right]\left[\mathrm{P}'_{l+1}\left(\frac{d}{c}\right)-\mathrm{P}'_{l+1}\left(-\frac{d}{c}\right)\right]\\&=\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{q}{\pi a^2}|z|\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{(2l+2)(l+3)}\left(\frac{c}{z}\right)^{2l+3}\left[1-\left(\frac{d}{c}\right)^2\right]\mathrm{P}'_{2l+2}\left(\frac{d}{c}\right)\\&=\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{qc}{\pi a^2}\mathrm{sgn}(z)\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{(2l+2)(l+3)}\left(\frac{c}{z}\right)^{2l+2}\left[1-\left(\frac{d}{c}\right)^2\right]\mathrm{P}'_{2l+2}\left(\frac{d}{c}\right),\end{aligned}$$

从而可以推出 $r>c$ 范围内任意一点的静电势

$$u(r,\theta)=\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{qc}{\pi a^2}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{(2l+2)(l+3)}\left(\frac{c}{r}\right)^{2l+2}\left[1-\left(\frac{d}{c}\right)^2\right]\mathrm{P}'_{2l+2}\left(\frac{d}{c}\right)\ \mathrm{P}_{2l+1}(\cos\theta).\tag{11.48a}$$

在 $d<|z|<c$ 的条件下，(11.35) 式也可以展开为 z 的幂级数

$$\begin{aligned}u\Big|_{\text{轴线上}}=&\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{qd}{\pi a^2}\mathrm{sgn}\,(z)\\&+\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{qc}{\pi a^2}\left\{-\frac{d}{c}\frac{z}{c}+\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{2l(2l+1)}\left(\frac{z}{c}\right)^{2l+1}\left[1-\left(\frac{d}{c}\right)^2\right]\mathrm{P}'_{2l}\left(\frac{d}{c}\right)\right\}.\end{aligned}$$

运用上面给出的延拓法则，又可以推出 $d<r<c$ 范围内任意一点的静电势

$$\begin{aligned}u(r,\theta)=\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{qd}{\pi a^2}\Bigg\{&\mathrm{sgn}\,(z)-\frac{r}{c}\cos\theta\\&+\frac{c}{d}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{2l(2l+1)}\left(\frac{r}{c}\right)^{2l+1}\left[1-\left(\frac{d}{c}\right)^2\right]\mathrm{P}'_{2l}\left(\frac{d}{c}\right)\mathrm{P}_{2l+1}(\cos\theta)\Bigg\}.\end{aligned}\tag{11.48b}$$

值得注意，在 (11.48b) 式中只有 r 的正幂项而没有 r 的负幂项. 其实这是不难理解的，因为有限尺寸的圆形平行板电容器等价于无穷大的平行板叠加上另一对挖有圆孔且电偶极矩正好反向的无穷大平行板. 前者在板外 (上方与下方) 的电势 (分别) 为 (不同的) 常数 (因此电场强度为 0)，即 (11.48b) 式中的第一项；后者在 $r<c$ 空间内的电势 (即 (11.48b) 式中的其余项) 当然只应当含有 r 的正幂项. 这个解释也可以从下面的 (11.48c) 式得到证实.

不难证明，在 $d\to 0$, $2qd\to p$, $c\to a$ 的极限情形下，(11.48a) 和 (11.48b) 式可以分别化为 (11.38a) 和 (11.38b) 式.

还可以求出平行板内部的静电势. 因为当 $|z|<d$ 时，(11.35) 式也可以展开为

$$u\Big|_{\text{轴线上}}=\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{qz}{\pi a^2}+\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{qc}{\pi a^2}\left\{-\frac{d}{c}\frac{z}{c}+\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{2l(2l+1)}\left(\frac{z}{c}\right)^{2l+1}\left[1-\left(\frac{d}{c}\right)^2\right]\mathrm{P}_{2l}'\left(\frac{d}{c}\right)\right\},$$

所以，在 $r<d$ 内任意一点的静电势就是

$$u(r,\theta)=\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{qd}{\pi a^2}\left\{\frac{r}{d}\cos\theta-\frac{r}{c}\cos\theta\right.$$
$$\left.+\frac{c}{d}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{2l(2l+1)}\left(\frac{r}{c}\right)^{2l+1}\left[1-\left(\frac{d}{c}\right)^2\right]\mathrm{P}_{2l}'\left(\frac{d}{c}\right)\mathrm{P}_{2l+1}(\cos\theta)\right\}.\quad(11.48\text{c})$$

我们看到，这里的第一项与 d 无关，它就是平行板电容器内部的匀强电场项；其余两项又与 (11.48b) 式中的对应项完全相同.

从原则上说，我们当然可以直接求解边值问题

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)$$
$$=-\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{q}{\pi a^2}\left[\delta(r\cos\theta-d)-\delta(r\cos\theta+d)\right]\eta(r-d)\eta(c-r),$$

$u\big|_{\theta=0}$ 有界，　　$u\big|_{\theta=\pi}$ 有界，

$u\big|_{r=0}$ 有界，　　$u\big|_{r\to\infty}\to 0$，

但实际计算相当复杂，结果也难以化成上面的简单形式. 所以看来这并不是一个实际可行的做法. 这个例子告诉我们，在求解静电势问题时，有时也还存在方法简繁的明显差异.

§11.4　有关电磁场的几个例题

11.4.1　针状带电导体的静电势

将针状导体的几何形状简化为长旋转椭球. 取旋转长椭球坐标系 (ξ,η)，它可以通过和柱坐标系 (r,z) 之间的变换关系

$$r=a\sqrt{(\xi^2-1)\,(1-\eta^2)},\qquad z=a\xi\eta\tag{11.49}$$

来定义，其中 $1\leqslant\xi<\infty$, $-1\leqslant\eta\leqslant 1$. 若 ξ 为常数，则坐标面为旋转椭球面

$$\frac{r^2}{\xi^2-1}+\frac{z^2}{\xi^2}=a^2,\tag{11.50}$$

$\xi=1$ 时即退化为 z 轴上的线段 $-a\leqslant z\leqslant a$. 若 η 为常数，则坐标面为旋转抛物面

$$-\frac{r^2}{1-\eta^2}+\frac{z^2}{\eta^2}=a^2,\tag{11.51}$$

$\eta=1$ 和 $\eta=-1$ 时即分别退化为 z 轴上的线段 $z\geqslant a\xi$ 和$z\leqslant -a\xi$. 将坐标原点置于导体中心，针状导体面即为 $\xi=\xi_0$，而其长度为 $2a\xi_0$. 于是，定解问题即为

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left[(\xi^2-1)\frac{\partial u}{\partial\xi}\right]+\frac{\partial}{\partial\eta}\left[(1-\eta^2)\frac{\partial u}{\partial\eta}\right]=0, \tag{11.52a}$$

$$u\big|_{\xi=\xi_0}=u_0, \qquad u\big|_{\xi\to\infty}\to 0, \tag{11.52b}$$

$$u\big|_{\eta=\pm1}\text{ 有界}. \tag{11.52c}$$

令 $u(\xi,\eta)=\Xi(\xi)H(\eta)$，分离变量，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left[(\xi^2-1)\frac{\mathrm{d}\Xi}{\mathrm{d}\xi}\right]-\lambda\Xi=0, \tag{11.53}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\left[(1-\eta^2)\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\eta}\right]+\lambda H=0, \tag{11.54a}$$

$$H(\pm1)\text{ 有界}. \tag{11.54b}$$

解之即得

$$\lambda_l=l(l+1), \qquad l=0,1,2,\cdots, \tag{11.55a}$$

$$H_l(\eta)=\mathrm{P}_l\,(\eta)\,, \tag{11.55b}$$

$$\Xi_l(\xi)=C_l\mathrm{P}_l\,(\xi)+D_l\mathrm{Q}_l(\xi), \tag{11.55c}$$

其中的 $\mathrm{Q}_l(\xi)$ 是第二类 Legendre 函数 (在包含有正实轴 $1<\xi<\infty$ 的区域内的解析延拓)，$\mathrm{P}_l\,(\xi)$ 是多项式，当然在全平面有定义. 在此基础上，可以写出满足偏微分方程 (11.52a) 及有界条件 (11.52c) 的一般解

$$u(\xi,\eta)=\sum_{l=0}^{\infty}\left[C_l\mathrm{P}_l\,(\xi)+D_l\mathrm{Q}_l(\xi)\right]\mathrm{P}_l\,(\eta)\,. \tag{11.56}$$

下面代入边界条件 (11.52b). 首先由于 $u\big|_{\xi=\xi_0}=u_0$，即

$$\sum_{l=0}^{\infty}\left[C_l\mathrm{P}_l\,(\xi_0)+D_l\mathrm{Q}_l(\xi_0)\right]\mathrm{P}_l\,(\eta)=u_0,$$

所以

$$C_l\mathrm{P}_l\,(\xi_0)+D_l\mathrm{Q}_l(\xi_0)=u_0\delta_{l0}.$$

再利用无穷远条件 $u\big|_{\xi\to\infty}\to 0$ 定出

$$C_l=0, \qquad D_l=\frac{u_0}{\mathrm{Q}_0(\xi_0)}\delta_{l0}.$$

最后就求得

$$u(\xi,\eta)=u_0\,\frac{\mathrm{Q}_0(\xi)}{\mathrm{Q}_0(\xi_0)}=u_0\,\frac{\ln(\xi+1)-\ln(\xi-1)}{\ln(\xi_0+1)-\ln(\xi_0-1)}. \tag{11.57}$$

11.4.2 载流圆线圈的静磁场

设圆线圈的半径为 a，上通有电流 I，求空间任意一点的磁矢势 $\boldsymbol{A}$ 和磁感应强度 $\boldsymbol{B}$.

利用 Legendre 函数的加法公式可以求解这一问题[1]. 此处介绍另一种解法.

取球坐标系，坐标原点位于圆心，圆线圈处于赤道面上，电流方向即为 ϕ 增大的方向. 按定义，此电流环在空间 $\boldsymbol{r}=(r,\theta,\phi)$ 处的磁矢势 $\boldsymbol{A}$ 应为

$$\boldsymbol{A}=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_l\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|},\tag{11.58}$$

其中 $\boldsymbol{r}'=(r',\theta',\phi')$ 是圆环 l 上的变点 $(r'=a,\ \theta'=\pi/2)$，$\mathrm{d}\boldsymbol{l}'$ 是圆环上的弧元(矢量). 由对称性可知，磁矢势 $\boldsymbol{A}$ 的大小一定与 ϕ 无关. 而且，成对地考虑 ϕ' 与 $2\phi-\phi'$ 处电流元的贡献，还可以断定 $\boldsymbol{A}$ 只有 $\boldsymbol{e}_\phi$ 分量，即 $A_r=A_\theta=0,\ A_\phi\neq 0$. 因为 $\mu_0\boldsymbol{H}=\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$，进一步由 Maxwell 方程组中的 $\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}$，就得到

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}=\mu_0\boldsymbol{J}.$$

因此，除了电流圈所在处外，

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}=\nabla\times\nabla\times(A_\phi\boldsymbol{e}_\phi)=0.$$

根据球坐标系中的矢量分析公式

$$\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{F}=&\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial(\sin\theta F_\phi)}{\partial\theta}-\frac{\partial F_\theta}{\partial\phi}\right]\boldsymbol{e}_r+\frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial F_r}{\partial\phi}-\frac{\partial(rF_\phi)}{\partial r}\right]\boldsymbol{e}_\theta\\&+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rF_\theta)}{\partial r}-\frac{\partial F_r}{\partial\theta}\right]\boldsymbol{e}_\phi,\end{aligned}$$

注意到 $A_\phi=A_\phi(r,\theta)$ 与 ϕ 无关，即得

$$\nabla\times\nabla\times(A_\phi\boldsymbol{e}_\phi)=-\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta A_\phi)}{\partial\theta}\right]+\frac{1}{r}\frac{\partial^2(rA_\phi)}{\partial r^2}\right\}\boldsymbol{e}_\phi=0,$$

即

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta A_\phi)}{\partial\theta}\right]+\frac{1}{r}\frac{\partial^2(rA_\phi)}{\partial r^2}=0.\tag{11.59}$$

令 $A_\phi(r,\theta)=R(r)\Theta(\theta)$，分离变量，可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(\sin\theta\,\Theta)\right]+\lambda\Theta=0,\tag{11.60a}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}^2(rR)}{\mathrm{d}r^2}-\frac{\lambda}{r^2}R=0.\tag{11.60b}$$

直接演算，可将这两个方程分别化为

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)+\left(\lambda-\frac{1}{\sin^2\theta}\right)\Theta=0,\tag{11.61a}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)-\lambda R=0.\tag{11.61b}$$

[1] 例如，见：吴崇试. 数学物理方法. 第 2 版. 北京：北京大学出版社，2004：246，例 16.5.

考虑到 $A_\phi(r,\theta)$ 应当满足有界条件

$$\begin{aligned}&A_\phi(r,\theta)\big|_{\theta=0}\text{有界},\quad A_\phi(r,\theta)\big|_{\theta=\pi}\text{有界},\\&A_\phi(r,\theta)\big|_{r=0}\text{有界},\quad A_\phi(r,\theta)\big|_{r\to\infty}\to 0,\end{aligned}\qquad\text{即}\qquad\begin{aligned}&\Theta(\theta)\big|_{\theta=0}\text{有界},\quad \Theta(\theta)\big|_{\theta=\pi}\text{有界},\\&R(0)\text{有界},\qquad R(r)\big|_{r\to\infty}\to 0,\end{aligned}$$

所以就求得

$$A_\phi(r,\theta)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{l=1}^{\infty}c_l\left(\frac{r}{a}\right)^l\mathrm{P}_l^1(\cos\theta), & r<a,\\ \displaystyle\sum_{l=1}^{\infty}d_l\left(\frac{a}{r}\right)^{l+1}\mathrm{P}_l^1(\cos\theta), & r>a.\end{cases}\tag{11.62}$$

和均匀带电圆环的静电势问题不同，现在不能通过求出 A_ϕ 在轴线上 ($\theta=0$ 和 π) 的特殊值来定系数 c_l 和 d_l，因为在轴线上显然有 $A_\phi=0$. 为了定出 c_l 和 d_l，可行的办法是先导出磁感应强度 $\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$ 的表达式，特别是径向分量

$$B_r=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta A_\phi)}{\partial\theta}$$

的表达式，而后与 B_r 在轴线上的特殊值 (因为此时 B_r 肯定不为 0) 比较. 注意到

$$\mathrm{P}_l^1(\cos\theta)=\sin\theta\frac{\mathrm{dP}_l(\cos\theta)}{\mathrm{d}(\cos\theta)}=-\frac{\mathrm{dP}_l(\cos\theta)}{\mathrm{d}\theta},\tag{11.63}$$

由 Legendre 方程，就能化得

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left[\sin\theta\,\mathrm{P}_l^1(\cos\theta)\right]=-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left[\sin\theta\frac{\mathrm{dP}_l(\cos\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right]=l(l+1)\mathrm{P}_l(\cos\theta).\tag{11.64}$$

所以

$$B_r(r,\theta)=\begin{cases}\displaystyle\frac{1}{r}\sum_{l=1}^{\infty}c_l\,l(l+1)\left(\frac{r}{a}\right)^l\mathrm{P}_l(\cos\theta), & r<a,\\ \displaystyle\frac{1}{r}\sum_{l=1}^{\infty}d_l\,l(l+1)\left(\frac{a}{r}\right)^{l+1}\mathrm{P}_l(\cos\theta), & r>a.\end{cases}\tag{11.65}$$

特别是，当 $\theta=0$ 时，

$$B_r(r,0)=\begin{cases}\displaystyle\frac{1}{r}\sum_{l=1}^{\infty}c_l\,l(l+1)\left(\frac{r}{a}\right)^l, & r<a,\\ \displaystyle\frac{1}{r}\sum_{l=1}^{\infty}d_l\,l(l+1)\left(\frac{a}{r}\right)^{l+1}, & r>a;\end{cases}\tag{11.66}$$

当 $\theta=\pi$ 时，

$$B_r(r,\pi)=\begin{cases}\displaystyle\frac{1}{r}\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^l c_l\,l(l+1)\left(\frac{r}{a}\right)^l, & r<a,\\ \displaystyle\frac{1}{r}\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^l d_l\,l(l+1)\left(\frac{a}{r}\right)^{l+1}, & r>a.\end{cases}\tag{11.67}$$

同样也可以得到

$$B_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r} = \begin{cases} -\dfrac{1}{r}\displaystyle\sum_{l=1}^{\infty} c_l\, l\left(\frac{r}{a}\right)^l \mathrm{P}_l^1(\cos\theta), & r<a, \\ \dfrac{1}{r}\displaystyle\sum_{l=1}^{\infty} d_l\, l\left(\frac{a}{r}\right)^{l+1} \mathrm{P}_l^1(\cos\theta), & r>a. \end{cases} \tag{11.68}$$

另一方面，由 Biot-Savart 定律：

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}, \tag{11.69}$$

对于轴线上任意一点（$\theta=0$ 或 π），$|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|=\sqrt{r^2+a^2}$ 为常数．由对称性容易判断，由各电流元叠加而得的磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 应沿 $\theta=0$ 方向，其大小为①

$$B_r\Big|_{\text{轴线上}} = \frac{\mu_0 I}{2}\frac{a^2}{(r^2+a^2)^{3/2}}\frac{|z|}{z}. \tag{11.70}$$

这里添加的因子 $|z|/z$ 反映了轴线上 $\theta=0$ 与 $\theta=\pi$ 时 e_r 的方向正好相反．为了将此式作幂级数展开，需要用到 Legendre 多项式的生成函数

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{l=0}^{\infty}\mathrm{P}_l(x)\, t^l, \qquad |t|<1. \tag{11.71}$$

两端对 x 微商，并令 $x=0$，注意到 $\mathrm{P}'_{2l}(0)=0$，就有

$$\frac{1}{(1+t^2)^{3/2}} = \sum_{l=0}^{\infty}\mathrm{P}'_{2l+1}(0)\, t^{2l}, \qquad |t|<1. \tag{11.72}$$

所以

$$B_r\Big|_{\text{轴线上}} = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 I}{2r}\dfrac{|z|}{z}\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}\mathrm{P}'_{2l+1}(0)\left(\frac{r}{a}\right)^{2l+1}, & r<a, \\ \dfrac{\mu_0 I}{2r}\dfrac{|z|}{z}\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}\mathrm{P}'_{2l+1}(0)\left(\frac{a}{r}\right)^{2l+2}, & r>a. \end{cases} \tag{11.73}$$

和前面得到的 $B_r(r,\theta=0)$ 及 $B_r(r,\theta=\pi)$ 相比较，就能定出系数

$$c_{2l}=d_{2l}=0, \qquad c_{2l+1}=d_{2l+1}=\frac{\mu_0 I}{2}\frac{1}{(2l+1)(l+2)}\mathrm{P}'_{2l+1}(0).$$

所以最后就求得

$$A_\phi(r,\theta) = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 I}{2}\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{(2l+1)(l+2)}\left(\frac{r}{a}\right)^{2l+1}\mathrm{P}'_{2l+1}(0)\,\mathrm{P}'_{2l+1}(\cos\theta), & r<a, \\ \dfrac{\mu_0 I}{2}\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{(2l+1)(l+2)}\left(\frac{a}{r}\right)^{2l+2}\mathrm{P}'_{2l+1}(0)\,\mathrm{P}_l^1(\cos\theta), & r>a, \end{cases} \tag{11.74}$$

① 详见文献：赵凯华，陈熙谋．新概念物理教程：电磁学．北京：高等教育出版社．2003: 96 – 97.

$$B_r(r,\theta)=\begin{cases}\dfrac{\mu_0 I}{2r}\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^{2l+1}\mathrm{P}'_{2l+1}(0)\,\mathrm{P}_{2l+1}(\cos\theta)\,, & r<a,\\[2ex] \dfrac{\mu_0 I}{2r}\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^{2l+2}\mathrm{P}'_{2l+1}(0)\,\mathrm{P}_{2l+1}(\cos\theta)\,, & r>a,\end{cases}\tag{11.75}$$

$$B_\theta(r,\theta)=\begin{cases}-\dfrac{\mu_0 I}{2r}\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{2l+1}\left(\frac{r}{a}\right)^{2l+1}\mathrm{P}'_{2l+1}(0)\;\mathrm{P}^1_{2l+1}(\cos\theta)\,, & r<a,\\[2ex] \dfrac{\mu_0 I}{2r}\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{2l+2}\left(\frac{a}{r}\right)^{2l+2}\mathrm{P}'_{2l+1}(0)\;\mathrm{P}^1_{2l+1}(\cos\theta)\,, & r>a.\end{cases}\tag{11.76}$$

11.4.3 环形电流元的静磁场

设有电流元围成的圆环 (如图 11.1 所示)，环的半径为 a，单位宽度上的电流为 I，求空间任意一点的磁矢势 $\boldsymbol{A}$ 和磁感应强度 $\boldsymbol{B}$.

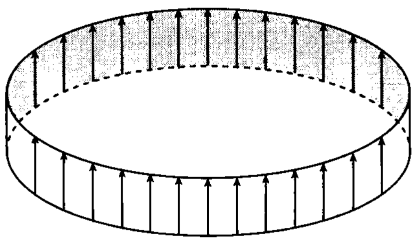


图 11.1 电流元围成的圆环

取球坐标系，坐标原点位于圆心，圆线圈处于赤道面上，电流方向与 z 轴平行. 设圆环高 $h \ll a$. 按定义，此电流环在空间 $\boldsymbol{r}(r,\theta,\phi)$ 处的磁矢势 $\boldsymbol{A}$ 应为

$$\boldsymbol{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\boldsymbol{h}\oint_l\frac{Ia\mathrm{d}\phi'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}=\frac{\mu_0 Ia}{4\pi}\boldsymbol{h}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\phi'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|},\tag{11.77}$$

其中 $\boldsymbol{h}$ 即电流元的方向，$|\boldsymbol{h}|=h$，$\boldsymbol{r}'=(r',\theta',\phi')$ 是圆环上的变点 $(r'=a,\ \theta'=\pi/2)$. 由对称性可知，磁矢势 $\boldsymbol{A}$ 的大小一定与 ϕ 无关. 因此，在下面的计算中不妨取固定值 $\phi=0$. 记径矢 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{r}'$ 间的夹角为 α，则

$$\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}=\frac{1}{\sqrt{r^2+a^2-2ra\cos\alpha}}=\begin{cases}\dfrac{1}{a}\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^{l}\mathrm{P}_l(\cos\alpha)\,, & r<a,\\[2ex] \dfrac{1}{r}\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^{l}\mathrm{P}_l(\cos\alpha)\,, & r>a,\end{cases}\tag{11.78}$$

其中

$$\cos\alpha=\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\phi-\phi')\big|_{\theta'=\pi/2,\,\phi=0}.\tag{11.79}$$

于是，当 $r<a$ 时，有

$$\boldsymbol{A}=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\boldsymbol{h}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^l\int_0^{2\pi}\mathrm{P}_l(\cos\alpha)\,\mathrm{d}\phi'. \tag{11.80}$$

根据连带 Legendre 函数的加法公式

$$\mathrm{P}_l(\cos\alpha)=\mathrm{P}_l(\cos\theta)\,\mathrm{P}_l(\cos\theta')+2\sum_{m=0}^{l}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\,\mathrm{P}_l^m(\cos\theta')\cos m(\phi-\phi') \tag{11.81}$$

及正交关系

$$\int_0^{2\pi}\cos m\phi'\sin\phi'\mathrm{d}\phi'=0,\qquad \int_0^{2\pi}\cos m\phi'\cos\phi'\mathrm{d}\phi'=\pi\delta_{m1}, \tag{11.82}$$

代入 $\theta'=\pi/2,\ \phi=0$，并考虑到 $\mathrm{P}_{2l+1}(\cos\theta')=\mathrm{P}_{2l+1}(0)=0$，就得到

$$\boldsymbol{A}=\frac{\mu_0 I}{2}\boldsymbol{h}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^l\mathrm{P}_l(0)\,\mathrm{P}_l(\cos\theta)=\frac{\mu_0 I}{2}\boldsymbol{h}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^{2l}\mathrm{P}_{2l}(0)\,\mathrm{P}_{2l}(\cos\theta). \tag{11.83}$$

类似地，当 $r>a$ 时，也可以求得

$$\boldsymbol{A}=\frac{\mu_0 I}{2}\boldsymbol{h}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^{2l+1}\mathrm{P}_{2l}(0)\,\mathrm{P}_{2l}(\cos\theta). \tag{11.84}$$

下面求磁感应强度 $\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$. 因为 $\boldsymbol{h}=h(\cos\theta\,\boldsymbol{e}_r-\sin\theta\,\boldsymbol{e}_\theta)$，所以 $\boldsymbol{A}$ 只有 r 和 θ 分量，而且它们的大小也只依赖于 r 和 θ. 这样，由矢量分析公式即得

$$B_r=(\nabla\times A)_r=0, \tag{11.85a}$$

$$B_\theta=(\nabla\times A)_\theta=0, \tag{11.85b}$$

$$B_\phi=(\nabla\times A)_\phi=\frac{1}{r}\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial\theta}. \tag{11.85c}$$

代入上面得到的 $\boldsymbol{A}$，就可以计算出 B_ϕ. 当 $r<a$ 时，有

$$\begin{aligned}B_\phi&=-\frac{\mu_0 I}{2r}h\sum_{l=0}^{\infty}\mathrm{P}_{2l}(0)\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{r^{2l+1}}{a^{2l}}\right)\sin\theta\,\mathrm{P}_{2l}(\cos\theta)+\left(\frac{r}{a}\right)^{2l}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left[\cos\theta\,\mathrm{P}_{2l}(\cos\theta)\right]\right\}\\&=-\frac{\mu_0 I}{2r}h\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^{2l}\mathrm{P}_{2l}(0)\left\{(2l+1)\sin\theta\,\mathrm{P}_{2l}(\cos\theta)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left[\cos\theta\,\mathrm{P}_{2l}(\cos\theta)\right]\right\}.\end{aligned}$$

注意当 $l=0$ 时，

$$(2l+1)\sin\theta\,\mathrm{P}_{2l}(\cos\theta)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left[\cos\theta\,\mathrm{P}_{2l}(\cos\theta)\right]=\sin\theta+\frac{\mathrm{d}\cos\theta}{\mathrm{d}\theta}=0,$$

而当 $l=1,2,3,\cdots$ 时，利用 Legendre 多项式的递推关系 $\mathrm{P}_{l-1}'(x)=x\mathrm{P}_l'(x)-l\mathrm{P}_l(x)$，又可以直接导出

$$(2l+1)\sin\theta\,\mathrm{P}_{2l}(\cos\theta)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left[\cos\theta\,\mathrm{P}_{2l}(\cos\theta)\right]=-\mathrm{P}_{2l-1}^1(\cos\theta),$$

所以

$$B_\phi = \frac{\mu_0 I}{2r} h \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^{2l} \mathrm{P}_{2l}(0)\, \mathrm{P}_{2l-1}^1(\cos\theta)$$
$$= \frac{\mu_0 I}{2r} h \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^{2l+2} \mathrm{P}_{2l+2}(0)\, \mathrm{P}_{2l+1}^1(\cos\theta), \qquad r < a. \tag{11.86}$$

类似地，当 $r > a$ 时，也有

$$B_\phi = -\frac{\mu_0 I}{2r} h \sum_{l=0}^{\infty} \mathrm{P}_{2l}(0) \left\{ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{a^{2l+1}}{r^{2l}}\right) \sin\theta\, \mathrm{P}_{2l}(\cos\theta) + \left(\frac{a}{r}\right)^{2l+1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left[\cos\theta\, \mathrm{P}_{2l}(\cos\theta)\right] \right\}$$
$$= \frac{\mu_0 I}{2r} h \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{2l+1} \mathrm{P}_{2l}(0) \left\{ (2l+1)\sin\theta\, \mathrm{P}_{2l}(\cos\theta) - \cos\theta \frac{\mathrm{d}\mathrm{P}_{2l}(\cos\theta)}{\mathrm{d}\theta} \right\}$$
$$= \frac{\mu_0 I}{2r} h \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{2l+1} \mathrm{P}_{2l}(0) \sin\theta \left\{ (2l+1)\mathrm{P}_{2l}(\cos\theta) + \cos\theta \frac{\mathrm{d}\mathrm{P}_{2l}(\cos\theta)}{\mathrm{d}(\cos\theta)} \right\}$$
$$= \frac{\mu_0 I}{2r} h \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{2l+1} \mathrm{P}_{2l}(0)\, \sin\theta\, \mathrm{P}'_{2l+1}(\cos\theta)$$
$$= \frac{\mu_0 I}{2r} h \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{2l+1} \mathrm{P}_{2l}(0)\, \mathrm{P}_{2l+1}^1(\cos\theta). \tag{11.87}$$

这里用到了 Legendre 多项式的另一个递推关系

$$\mathrm{P}'_{l+1}(x) = x\, \mathrm{P}'_l(x) + (l+1)\, \mathrm{P}_l(x). \tag{11.88}$$

现在分析一下 B_ϕ 的连续性. 当 $r \to a$ 时，显然有

$$B_\phi(r,\theta) \to \begin{cases} \dfrac{\mu_0 I}{2r} h \displaystyle\sum_{l=0}^{\infty} \mathrm{P}_{2l+2}(0)\, \mathrm{P}_{2l+1}^1(\cos\theta), & r \to a-0, \\ \dfrac{\mu_0 I}{2r} h \displaystyle\sum_{l=0}^{\infty} \mathrm{P}_{2l}(0)\, \mathrm{P}_{2l+1}^1(\cos\theta), & r \to a+0, \end{cases} \tag{11.89}$$

所以

$$B_\phi(r,\theta)\Big|_{r=a-}^{r=a+} = \frac{\mu_0 I}{2r} h \sum_{l=0}^{\infty} \left[\mathrm{P}_{2l}(0) - \mathrm{P}_{2l+2}(0)\right] \mathrm{P}_{2l+1}^1(\cos\theta).$$

再利用 (11.49) 式，就得到

$$B_\phi(r,\theta)\Big|_{r=a-}^{r=a+} = \frac{\mu_0 I}{2r} h \sum_{l=0}^{\infty} \frac{4l+3}{(2l+1)(l+2)} \mathrm{P}_{2l+1}^1(0)\, \mathrm{P}_{2l+1}^1(\cos\theta)$$
$$= \frac{\mu_0 I}{r} h \delta(\theta - \pi/2). \tag{11.90}$$

所以除 $\theta = \pi/2$ 外，B_ϕ 在 $r = a$ 的球面上是处处连续的. 上面的最后一步可以通过将 $\delta(\theta - \pi/2)$ 按本征函数组 $\{\mathrm{P}_l^1(x), l = 1, 2, 3, \cdots\}$ 展开而直接验证.

第十二章　球函数的 Christoffel 型求和公式

§12.1　Legendre 多项式的求和公式

12.1.1 Legendre 多项式的 Christoffel 求和公式

推导 Christoffel 求和公式的出发点是 Legendre 多项式的递推关系

$$(2l+1)\,x\,\mathrm{P}_l(x) = (l+1)\,\mathrm{P}_{l+1}(x) + l\,\mathrm{P}_{l-1}(x). \tag{12.1}$$

将 (12.1) 式两端同乘以 $\mathrm{P}_l(y)$，有

$$(2l+1)\,x\,\mathrm{P}_l(x)\,\mathrm{P}_l(y) = (l+1)\,\mathrm{P}_{l+1}(x)\,\mathrm{P}_l(y) + l\,\mathrm{P}_{l-1}(x)\,\mathrm{P}_l(y). \tag{12.2a}$$

再将变量 x, y 互换，又有

$$(2l+1)\,y\,\mathrm{P}_l(x)\,\mathrm{P}_l(y) = (l+1)\,\mathrm{P}_{l+1}(y)\,\mathrm{P}_l(x) + l\,\mathrm{P}_{l-1}(y)\,\mathrm{P}_l(x). \tag{12.2b}$$

两式相减，得

$$\begin{aligned}&(2l+1)\,(x-y)\,\mathrm{P}_l(x)\,\mathrm{P}_l(y)\\&\quad= (l+1)\big[\mathrm{P}_{l+1}(x)\,\mathrm{P}_l(y) - \mathrm{P}_{l+1}(y)\,\mathrm{P}_l(x)\big] - l\big[\mathrm{P}_l(x)\,\mathrm{P}_{l-1}(y) - \mathrm{P}_l(y)\,\mathrm{P}_{l-1}(x)\big].\end{aligned} \tag{12.3}$$

注意如果令

$$\gamma_l = l, \qquad g_l(x,y) = \mathrm{P}_l(x)\,\mathrm{P}_{l-1}(y) - \mathrm{P}_l(y)\,\mathrm{P}_{l-1}(x),$$

则 (12.3) 式可改写为

$$(2l+1)(x-y)\mathrm{P}_l(x)\,\mathrm{P}_l(y) = \gamma_{l+1}g_{l+1}(x,y) - \gamma_l g_l(x,y). \tag{12.3$'$}$$

于是，对 l 求和，就得到 Legendre 多项式的 Christoffel (第一) 求和公式

$$\begin{aligned}\sum_{l=0}^{n}(2l+1)\,\mathrm{P}_l(x)\,\mathrm{P}_l(y) &= \frac{1}{x-y}\sum_{l=0}^{n}\big[\gamma_{l+1}\,g_{l+1}(x,y) - \gamma_l g_l(x,y)\big]\\&= \frac{1}{x-y}\big[\gamma_{n+1}\,g_{n+1}(x,y) - \gamma_0\,g_0(x,y)\big]\\&= \frac{n+1}{x-y}\,\big[\mathrm{P}_{n+1}(x)\,\mathrm{P}_n(y) - \mathrm{P}_{n+1}(y)\,\mathrm{P}_n(x)\big].\end{aligned} \tag{12.4}$$

上面出现的

$$g_0(x,y) \equiv \mathrm{P}_0(x)\,\mathrm{P}_{-1}(y) - \mathrm{P}_0(y)\,\mathrm{P}_{-1}(x)$$

项，来源于在递推关系 (12.1) 中代入 $l = 0$. 就 Legendre 多项式而言，因为 $\mathrm{P}_{-l-1}(x) = \mathrm{P}_l(x)$，所以即使出现了负整数阶 Legendre 多项式，可以发现此递推关系仍然成立，并且能够导出

$$g_0(x,y) \equiv \mathrm{P}_0(x)\,\mathrm{P}_{-1}(y) - \mathrm{P}_0(y)\,\mathrm{P}_{-1}(x) = 0.$$

作为求和公式 (12.4) 的特殊情形，还可以令 $y \to x$，则得

$$\sum_{l=0}^{n}(2l+1)\big[\mathrm{P}_l(x)\big]^2 = (n+1)\big[\mathrm{P}'_{n+1}(x)\,\mathrm{P}_n(x) - \mathrm{P}_{n+1}(x)\,\mathrm{P}'_n(x)\big] \tag{12.5a}$$

$$= (n+1)^2\Big\{\big[\mathrm{P}_n(x)\big]^2 + \big[\mathrm{P}_{n+1}(x)\big]^2\Big\} + (n+1)\,x\big[\mathrm{P}_n(x)\,\mathrm{P}'_n(x) - \mathrm{P}_{n+1}(x)\,\mathrm{P}'_{n+1}(x)\big]. \tag{12.5b}$$

☞ **讨论** 以上的推导过程可归纳为下列一般步骤:

1. 列出 (相邻三个) 相关特殊函数 $u_l(x)$ 的递推关系

$$\alpha_l(x)\,u_l(x) + \beta_l(x)u'_l(x) = \gamma_{l+1}\,u_{l+1}(x) + \gamma_l\,u_{l-1}(x) \tag{12.6a}$$

或

$$\alpha_l(x)\,u_l(x) + \beta_l(x)u'_l(x) = \gamma_{l+1}\,u'_{l+1}(x) + \gamma_l\,u'_{l-1}(x). \tag{12.6b}$$

$\alpha_l(x)$ 与 $\beta_l(x)$ 可以是 x 的函数 (例如，是 x 的一次或二次函数)，也可以是常系数. 在多数情况下，它们之中只有一个不为 0.

2. 将 (12.6a) 式两端同乘以 $u_l(y)$，即

$$\alpha_l(x)\,u_l(x)\,u_l(y) + \beta_l(x)\,u'_l(x)\,u_l(y) = \gamma_{l+1}\,u_{l+1}(x)\,u_l(y) + \gamma_l\,u_l(x)\,u_{l-1}(y), \tag{12.7a}$$

或者将 (12.6b) 式两端同乘以 $u'_l(y)$，即

$$\alpha_l(x)\,u_l(x)\,u'_l(y) + \beta_l(x)\,u'_l(x)\,u'_l(y) = \gamma_{l+1}\,u'_{l+1}(x)\,u'_l(y) + \gamma_l\,u'_l(x)\,u'_{l-1}(y). \tag{12.7b}$$

3. 将 (12.7a) 或 (12.7b) 式中的变量 x, y 互换，而后与原式相减，于是有

$$\big[\alpha_l(x) - \alpha_l(y)\big]\,u_l(x)\,u_l(y) + \big[\beta_l(x)\,u'_l(x)\,u_l(y) - \beta_l(y)\,u'_l(y)\,u_l(x)\big] = \gamma_{l+1}\,g_{l+1}(x,y) - \gamma_l\,g_l(x,y) \tag{12.8a}$$

或

$$\begin{aligned}&\big[\alpha_l(x)\,u_l(x)\,u_l'(y)-\alpha_l(y)\,u_l(y)\,u_l'(x)\big]+\big[\beta_l(x)-\beta_l(x)\big]u_l'(x)\,u_l\,u_l'(y)\big]\\&\qquad=\gamma_{l+1}\,h_{l+1}(x,y)-\gamma_l\,h_l(x,y),\end{aligned}\tag{12.8b}$$

其中

$$\begin{aligned}g_l(x,y)&=u_l(x)\,u_{l-1}(y)-u_l(y)\,u_{l-1}(x),\\h_l(x,y)&=u_l'(x)\,u_{l-1}'(y)-u_l'(y)\,u_{l-1}'(x).\end{aligned}$$

4. 对 l 求和，即得 Christoffel 求和公式

$$\begin{aligned}&\sum_{l=0}^{n}\big[\alpha_l(x)-\alpha_l(y)\big]\,u_l(x)\,u_l(y)+\sum_{l=0}^{n}\big[\beta_l(x)\,u_l'(x)\,u_l(y)-\beta_l(y)\,u_l'(y)\,u_l(x)\big]\\&\qquad=\gamma_{n+1}\,g_{n+1}(x,y)-\gamma_0\,g_0(x,y)\end{aligned}\tag{12.9a}$$

或

$$\begin{aligned}&\sum_{l=0}^{n}\big[\alpha_l(x)\,u_l(x)\,u_l'(y)-\alpha_l(y)\,u_l(y)\,u_l'(x)\big]+\sum_{l=0}^{n}\big[\beta_l(x)-\beta_l(x)\big]u_l'(x)\,u_l\,u_l'(y)\big]\\&\qquad=\gamma_{n+1}\,h_{n+1}(x,y)-\gamma_0\,h_0(x,y).\end{aligned}\tag{12.9b}$$

这里的求和，涉及 $l=0$ 项，前提是：(1) 等式左端有意义，即 α_0 与 β_0 为有限值；(2) γ_0 及 $g_0(x,y)$, $h_0(x,y)$ 有意义，包括递推关系 (12.6a) 与 (12.6b) 也能适用于 $l=0$. 否则上面的求和公式就应当不包含 $l=0$ 项.

从特殊函数的相关递推关系 (需要而且只需要符合 (12.6) 式的要求) 出发，按照这样的办法，就能得到相应的求和公式.

12.1.2 Legendre 多项式的其他求和公式

Legendre 多项式还有其他一些递推关系，例如

$$(2l+1)\,x\,\mathrm{P}_l'(x)=l\,\mathrm{P}_{l+1}'(x)+(l+1)\,\mathrm{P}_{l-1}'(x),\tag{12.10}$$

$$\mathrm{P}_l(x)=\mathrm{P}_{l+1}'(x)-2x\,\mathrm{P}_l'(x)+\mathrm{P}_{l-1}'(x),\tag{12.11}$$

$$(2l+1)\,\mathrm{P}_l(x)=\mathrm{P}_{l+1}'(x)-\mathrm{P}_{l-1}'(x),\tag{12.12}$$

$$\frac{2l+1}{l(l+1)}\,(x^2-1)\,\mathrm{P}_l'(x)=\mathrm{P}_{l+1}(x)-\mathrm{P}_{l-1}(x),\tag{12.13}$$

也都可以用来推导相应的求和公式. 这里需要说明，通常标明递推关系 (12.10) — (12.13) 的成立条件是 $l=1,2,3,\cdots$，但由于 $\mathrm{P}_{-l-1}(x)=\mathrm{P}_l(x)$，所以实际上可以去掉 l 为正整数这一限制. 对于任意 (整数，包括负整数) 次 Legendre 多项式，这些递推关系均成立.

首先考察 (12.10) 式. 它还不符合 (12.6) 式的形式. 但是，可以看出 $\gamma_{l+1}/\gamma_l = l/(l+1)$，因此，若规定 $\gamma_1 = 1$，就能定出

$$\gamma_{l+1} = \prod_{k=1}^{l} \frac{\gamma_{k+1}}{\gamma_k} = \frac{1}{l+1}.$$

这就告诉我们，应当将递推关系 (12.10) 式的两端同除以 $l(l+1)$，

$$\frac{2l+1}{l(l+1)}\, x\, \mathrm{P}_l'(x) = \frac{1}{l+1}\, \mathrm{P}_{l+1}'(x) + \frac{1}{l}\, \mathrm{P}_{l-1}'(x), \tag{12.10$'$}$$

从而符合 (12.6) 式的要求. 现在，两端同乘以 $\mathrm{P}_l'(y)$:

$$\frac{2l+1}{l(l+1)}\, x\, \mathrm{P}_l'(x)\, \mathrm{P}_l'(y) = \frac{1}{l+1}\, \mathrm{P}_{l+1}'(x)\, \mathrm{P}_l'(y) + \frac{1}{l}\, \mathrm{P}_{l-1}'(x)\, \mathrm{P}_l'(y). \tag{12.14a}$$

再将变量 x, y 互换:

$$\frac{2l+1}{l(l+1)}\, y\, \mathrm{P}_l'(x)\, \mathrm{P}_l'(y) = \frac{1}{l+1}\, \mathrm{P}_{l+1}'(y)\, \mathrm{P}_l'(x) + \frac{1}{l}\, \mathrm{P}_{l-1}'(y)\, \mathrm{P}_l'(x). \tag{12.14b}$$

(12.14a) 与 (12.14b) 两式相减，得

$$\begin{aligned}\frac{2l+1}{l(l+1)}\,(x-y)\, \mathrm{P}_l'(x)\, \mathrm{P}_l'(y) &= \frac{1}{l+1}\big[\mathrm{P}_{l+1}'(x)\, \mathrm{P}_l'(y) - \mathrm{P}_{l+1}'(y)\, \mathrm{P}_l'(x)\big] \\ &\quad - \frac{1}{l}\big[\mathrm{P}_l'(x)\, \mathrm{P}_{l-1}'(y) - \mathrm{P}_l'(y)\, \mathrm{P}_{l-1}'(x)\big].\end{aligned} \tag{12.15}$$

最后对 l 求和，就得到 Legendre 多项式的另一个求和公式:

$$\sum_{l=1}^{n} \frac{2l+1}{l(l+1)}\, \mathrm{P}_l'(x)\, \mathrm{P}_l'(y) = \frac{1}{n+1} \frac{\mathrm{P}_{n+1}'(x)\, \mathrm{P}_n'(y) - \mathrm{P}_{n+1}'(y)\, \mathrm{P}_n'(x)}{x-y}. \tag{12.16}$$

取极限 $y \to x$，也能求得 (12.16) 式的特殊情形:

$$\sum_{l=1}^{n} \frac{2l+1}{l(l+1)}\, \big[\mathrm{P}_l'(x)\big]^2 = \frac{1}{n+1}\big[\mathrm{P}_{n+1}''(x)\, \mathrm{P}_n'(x) - \mathrm{P}_{n+1}'(x)\, \mathrm{P}_n''(x)\big], \tag{12.17a}$$

更可以进一步利用 Legendre 方程化简，得

$$\sum_{l=1}^{n} \frac{2l+1}{l(l+1)}\, \big[\mathrm{P}_l'(x)\big]^2 = \frac{1}{1-x^2}\big[n\, \mathrm{P}_n(x)\, \mathrm{P}_{n+1}'(x) - (n+2)\, \mathrm{P}_n'(x)\, \mathrm{P}_{n+1}(x)\big]. \tag{12.17b}$$

再来考察递推关系 (12.11). 不妨改写成

$$\mathrm{P}_l(x) + 2x\, \mathrm{P}_l'(x) = \mathrm{P}_{l+1}'(x) + \mathrm{P}_{l-1}'(x), \tag{12.11$'$}$$

这里 $\gamma_l \equiv 1$. 它已经符合 (12.6) 式的要求，所以，两端同乘以 $\mathrm{P}_l'(y)$，可得

$$\mathrm{P}_l(x)\,\mathrm{P}_l'(y)+2x\,\mathrm{P}_l'(x)\,\mathrm{P}_l'(y)=\mathrm{P}_{l+1}'(x)\,\mathrm{P}_l'(y)+\mathrm{P}_{l-1}'(x)\,\mathrm{P}_l'(y),$$

然后将变量 x, y 互换，即

$$\mathrm{P}_l(y)\,\mathrm{P}_l'(x)+2y\,\mathrm{P}_l'(y)\,\mathrm{P}_l'(x)=\mathrm{P}_{l+1}'(y)\,\mathrm{P}_l'(x)+\mathrm{P}_{l-1}'(y)\,\mathrm{P}_l'(x),$$

再两式相减，并对 l 求和，就得到

$$\begin{aligned}\sum_{l=0}^{n}\Big[\mathrm{P}_l(x)\,\mathrm{P}_l'(y)-\mathrm{P}_l(y)\,\mathrm{P}_l'(x)\Big]&+2(x-y)\sum_{l=0}^{n}\mathrm{P}_l'(x)\,\mathrm{P}_l'(y)\\&=\mathrm{P}_{n+1}'(x)\,\mathrm{P}_n'(y)-\mathrm{P}_{n+1}'(y)\,\mathrm{P}_n'(x),\end{aligned}\tag{12.18a}$$

或者写成

$$\begin{aligned}\sum_{l=0}^{n}\frac{\mathrm{P}_l(x)\,\mathrm{P}_l'(y)-\mathrm{P}_l(y)\,\mathrm{P}_l'(x)}{x-y}&+2\sum_{l=0}^{n}\mathrm{P}_l'(x)\,\mathrm{P}_l'(y)\\&=\frac{\mathrm{P}_{n+1}'(x)\,\mathrm{P}_n'(y)-\mathrm{P}_{n+1}'(y)\,\mathrm{P}_n'(x)}{x-y}.\end{aligned}\tag{12.18b}$$

作为它的特殊情形，同样可以令 $y\to x$，于是就有

$$\begin{aligned}\sum_{l=0}^{n}\Big\{3(1-x^2)\big[\mathrm{P}_l'(x)\big]^2-2x\,\mathrm{P}_l(x)\,\mathrm{P}_l'(x)+l(l+1)\big[\mathrm{P}_l(x)\big]^2\Big\}&\\=n(n+1)\,\mathrm{P}_n(x)\,\mathrm{P}_{n+1}'(x)-(n+1)(n+2)\,\mathrm{P}_n'(x)\,\mathrm{P}_{n+1}(x).&\end{aligned}\tag{12.19}$$

对于递推关系 (12.12)，因为 $\gamma_{l+1}/\gamma_l=-1$，所以可取 $\gamma_l=(-1)^l$. 于是，就应当将 (12.12) 式改写为

$$(-1)^{l+1}(2l+1)\,\mathrm{P}_l(x)=(-1)^{l+1}\mathrm{P}_{l+1}'(x)+(-1)^l\mathrm{P}_{l-1}'(x).\tag{12.12$'$}$$

仿照上面的步骤，两端同乘以 $\mathrm{P}_l'(y)$:

$$(-1)^{l+1}(2l+1)\,\mathrm{P}_l(x)\,\mathrm{P}_l'(y)=(-1)^{l+1}\mathrm{P}_{l+1}'(x)\,\mathrm{P}_l'(y)+(-1)^l\mathrm{P}_{l-1}'(x)\,\mathrm{P}_l'(y),$$

将 x, y 互换:

$$(-1)^{l+1}(2l+1)\,\mathrm{P}_l(y)\,\mathrm{P}_l'(x)=(-1)^{l+1}\mathrm{P}_{l+1}'(y)\,\mathrm{P}_l'(x)+(-1)^l\mathrm{P}_{l-1}'(y)\,\mathrm{P}_l'(x),$$

两式相减，再对 l 求和，就得到 Legendre 多项式的又一个求和公式:

$$\sum_{l=0}^{n}(-1)^{n-l}(2l+1)\Big[\mathrm{P}_l(x)\,\mathrm{P}_l'(y)-\mathrm{P}_l(y)\,\mathrm{P}_l'(x)\Big]$$
$$=\mathrm{P}_{n+1}'(x)\,\mathrm{P}_n'(y)-\mathrm{P}_{n+1}'(y)\,\mathrm{P}_n'(x). \tag{12.20}$$

它在 $y\to x$ 的特殊形式是

$$\sum_{l=0}^{n}(-1)^{n-l}(2l+1)\Big\{(1-x^2)\big[\mathrm{P}_l'(x)\big]^2-2x\,\mathrm{P}_l(x)\,\mathrm{P}_l'(x)+l(l+1)\big[\mathrm{P}_l(x)\big]^2\Big\}$$
$$=n(n+1)\,\mathrm{P}_n(x)\,\mathrm{P}_{n+1}'(x)-(n+1)(n+2)\,\mathrm{P}_n'(x)\,\mathrm{P}_{n+1}(x). \tag{12.21}$$

至于递推关系 (12.13)，也可以类似地导出

$$\sum_{l=1}^{n}(-1)^l\frac{2l+1}{l(l+1)}\Big[(x^2-1)\mathrm{P}_l'(x)\,\mathrm{P}_l(y)-(y^2-1)\mathrm{P}_l'(y)\,\mathrm{P}_l(x)\Big]$$
$$=(-1)^n\Big[\mathrm{P}_{n+1}(x)\,\mathrm{P}_n(y)-\mathrm{P}_n(x)\,\mathrm{P}_{n+1}(y)\Big]-(x-y) \tag{12.22}$$

及其特殊情形

$$\sum_{l=1}^{n}(-1)^l(2l+1)\bigg\{\frac{1-x^2}{l(l+1)}\big[\mathrm{P}_l'(x)\big]^2+\big[\mathrm{P}_l(x)\big]^2\bigg\}$$
$$=(-1)^n\Big[\mathrm{P}_n(x)\,\mathrm{P}_{n+1}'(x)-\mathrm{P}_n'(x)\,\mathrm{P}_{n+1}(x)\Big]-1. \tag{12.23}$$

12.1.3 第二类 Legendre 函数 $\mathrm{Q}_l(x)$ 的求和公式

因为第二类 Legendre 函数 $\mathrm{Q}_l(x)$ 与 Legendre 多项式 $\mathrm{P}_l(x)$ 有相同形式的递推关系：

$$(2l+1)\,x\,\mathrm{Q}_l(x)=(l+1)\,\mathrm{Q}_{l+1}(x)+l\,\mathrm{Q}_{l-1}(x), \tag{12.24}$$
$$(2l+1)\,x\,\mathrm{Q}_l'(x)=l\,\mathrm{Q}_{l+1}'(x)+(l+1)\,\mathrm{Q}_{l-1}'(x), \tag{12.25}$$
$$\mathrm{Q}_l(x)=\mathrm{Q}_{l+1}'(x)-2x\,\mathrm{Q}_l'(x)+\mathrm{Q}_{l-1}'(x), \tag{12.26}$$
$$(2l+1)\,\mathrm{Q}_l(x)=\mathrm{Q}_{l+1}'(x)-\mathrm{Q}_{l-1}'(x), \tag{12.27}$$
$$\frac{2l+1}{l(l+1)}\,(x^2-1)\,\mathrm{Q}_l'(x)=\mathrm{Q}_{l+1}(x)-\mathrm{Q}_{l-1}(x), \tag{12.28}$$

所以上面得到的关于 $\mathrm{P}_l(x)$ 的求和公式原则上也都可以移植到 $\mathrm{Q}_l(x)$ 上，但有下列两点不同：

(1) $\mathrm{Q}_l(x)$ 的具体表达式不同于 $\mathrm{P}_l(x)$，例如

$$\mathrm{Q}_0(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x},\qquad\qquad \mathrm{Q}_0'(x)=\frac{1}{1-x^2},$$

$$\mathrm{Q}_1(x)=\frac{x}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}-1,\qquad \mathrm{Q}_1'(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{x}{1-x^2}.$$

因此求和公式中涉及 $\gamma_0\, g_0(x,y)$ 或 $\gamma_1\, g_1(x,y)$ 时需作相应修改.

(2) 递推关系 (12.24) — (12.27) 只对于正整数次第二类 Legendre 函数才成立. 换言之，(12.24) — (12.27) 诸式在 $l=0$ 时并不成立，而需代之以[①]

$$x\,\mathrm{Q}_0(x)=\mathrm{Q}_1(x)+1, \tag{12.24$'$}$$

$$x\,\mathrm{Q}_0'(x)=\frac{x}{1-x^2}. \tag{12.25$'$}$$

同样，(12.28) 式也只在 $l=1,2,3,\cdots$ 才成立，对于 $l=0$ 的情形，正确的关系式是

$$\mathrm{Q}_0(x)=\mathrm{Q}_1'(x)-2x\,\mathrm{Q}_0'(x)+\frac{x}{1-x^2}, \tag{12.28$'$}$$

$$\mathrm{Q}_0(x)=\mathrm{Q}_1'(x)-\frac{x}{1-x^2}. \tag{12.28$''$}$$

采用与上面类似的步骤，就能得到关于 $\mathrm{Q}_l(x)$ 的求和公式. 结果有：

$$\begin{aligned}&\sum_{l=0}^{n}(2l+1)\,\mathrm{Q}_l(x)\,\mathrm{Q}_l(y)\\&\quad=\frac{n+1}{x-y}\left[\mathrm{Q}_{n+1}(x)\,\mathrm{Q}_n(y)-\mathrm{Q}_{n+1}(y)\,\mathrm{Q}_n(x)\right]-\frac{1}{2}\,\frac{1}{x-y}\Big(\ln\frac{1+x}{1-x}-\ln\frac{1+y}{1-y}\Big),\end{aligned} \tag{12.29}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{l=1}^{n}\frac{2l+1}{l(l+1)}\,\mathrm{Q}_l'(x)\,\mathrm{Q}_l'(y)\\&\quad=\frac{1}{n+1}\,\frac{\mathrm{Q}_{n+1}'(x)\,\mathrm{Q}_n'(y)-\mathrm{Q}_{n+1}'(y)\,\mathrm{Q}_n'(x)}{x-y}\\&\qquad-\frac{1}{2}\,\frac{1}{x-y}\Big(\frac{1}{1-y^2}\ln\frac{1+x}{1-x}-\frac{1}{1-x^2}\ln\frac{1+y}{1-y}\Big)-\frac{1}{(1-x^2)(1-y^2)},\end{aligned} \tag{12.30}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{l=0}^{n}\frac{\mathrm{Q}_l(x)\,\mathrm{Q}_l'(y)-\mathrm{Q}_l(y)\,\mathrm{Q}_l'(x)}{x-y}+2\sum_{l=0}^{n}\mathrm{Q}_l'(x)\,\mathrm{Q}_l'(y)\\&\quad=\frac{\mathrm{Q}_{n+1}'(x)\,\mathrm{Q}_n'(y)-\mathrm{Q}_{n+1}'(y)\,\mathrm{Q}_n'(x)}{x-y}+\frac{1}{(1-x^2)(1-y^2)},\end{aligned} \tag{12.31}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{l=0}^{n}(-1)^l(2l+1)\frac{\mathrm{Q}_l(x)\,\mathrm{Q}_l'(y)-\mathrm{Q}_l(y)\,\mathrm{Q}_l'(x)}{x-y}\\&\quad=(-1)^n\,\frac{\mathrm{Q}_{n+1}'(x)\,\mathrm{Q}_n'(y)-\mathrm{Q}_{n+1}'(y)\,\mathrm{Q}_n'(x)}{x-y}-\frac{1}{(1-x^2)(1-y^2)},\end{aligned} \tag{12.32}$$

① 这里并未讨论 (12.28) 式在 $l=0$ 时的替代公式，因为下面的求和不涉及 $l=0$ 项.

$$\sum_{l=1}^{n}(-1)^l \frac{2l+1}{l(l+1)} \frac{(x^2-1)\mathrm{Q}_l'(x)\,\mathrm{Q}_l(y)-(y^2-1)\mathrm{Q}_l'(y)\,\mathrm{Q}_l(x)}{x-y}$$
$$=(-1)^n \frac{\mathrm{Q}_{n+1}(x)\,\mathrm{Q}_n(y)-\mathrm{Q}_n(x)\,\mathrm{Q}_{n+1}(y)}{x-y}$$
$$-\left[\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}\ln\frac{1+y}{1-y}+\frac{1}{2}\frac{1}{x-y}\left[\ln\frac{1+x}{1-x}-\ln\frac{1+y}{1-y}\right]\right]. \tag{12.33}$$

也可以讨论这些公式在 $y\to x$ 时的极限情形:

$$\sum_{l=0}^{n}(2l+1)\left[\mathrm{Q}_l(x)\right]^2$$
$$=(n+1)\left[\mathrm{Q}_{n+1}'(x)\,\mathrm{Q}_n(x)-\mathrm{Q}_{n+1}(x)\,\mathrm{Q}_n'(x)\right]-\frac{1}{1-x^2}$$
$$=(n+1)^2\left\{\left[\mathrm{Q}_n(x)\right]^2+\left[\mathrm{Q}_{n+1}(x)\right]^2\right\}$$
$$+(n+1)\,x\left[\mathrm{Q}_n(x)\,\mathrm{Q}_n'(x)-\mathrm{Q}_{n+1}(x)\,\mathrm{Q}_{n+1}'(x)\right]-\frac{1}{1-x^2}, \tag{12.34}$$

$$\sum_{n=1}^{n}\frac{2l+1}{l(l+1)}(1-x^2)\left[\mathrm{Q}_l'(x)\right]^2$$
$$=\left[n\,\mathrm{Q}_n(x)\,\mathrm{Q}_{n+1}'(x)-(n+2)\,\mathrm{Q}_{n+1}(x)\,\mathrm{Q}_n'(x)\right]$$
$$-\frac{2}{1-x^2}+\frac{x}{1-x^2}\ln\frac{1+x}{1-x}, \tag{12.35}$$

$$\sum_{l=0}^{n}\left\{3(1-x^2)\left[\mathrm{Q}_l'(x)\right]^2-\mathrm{Q}_l(x)\left[2x\mathrm{Q}_l'(x)-l(l+1)\mathrm{Q}_l(x)\right]\right\}$$
$$=\left[n(n+1)\,\mathrm{Q}_n(x)\,\mathrm{Q}_{n+1}'(x)-(n+1)(n+2)\,\mathrm{Q}_{n+1}(x)\,\mathrm{Q}_n'(x)\right]+\frac{1}{1-x^2}, \tag{12.36}$$

$$\sum_{l=0}^{n}(-1)^l(2l+1)\left[(1-x^2)\left[\mathrm{Q}_l'(x)\right]^2-\mathrm{Q}_l(x)\left[2x\,\mathrm{Q}_l'(x)-l(l+1)\mathrm{Q}_l(x)\right]\right]$$
$$=(-1)^n\left[n(n+1)\,\mathrm{Q}_n(x)\,\mathrm{Q}_{n+1}'(x)-(n+1)(n+2)\,\mathrm{Q}_n'(x)\,\mathrm{Q}_{n+1}(x)\right]$$
$$+\frac{1}{1-x^2}, \tag{12.37}$$

$$\sum_{l=1}^{n}(-1)^l(2l+1)\left\{\frac{1-x^2}{l(l+1)}\left[\mathrm{Q}_l'(x)\right]^2+\left[\mathrm{Q}_l(x)\right]^2\right\}$$
$$=(-1)^n\left[\mathrm{Q}_n(x)\,\mathrm{Q}_{n+1}'(x)-\mathrm{Q}_n'(x)\,\mathrm{Q}_{n+1}(x)\right]-\left(\frac{1}{4}\ln^2\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{1-x^2}\right). \tag{12.38}$$

12.1.4 $\mathrm{P}_l(x)$ 与 $\mathrm{Q}_l(x)$ 组成的混合型求和公式

也正因为 $\mathrm{P}_l(x)$ 与 $\mathrm{Q}_l(x)$ 递推关系形式完全相同，所以还可以导出由它们组成的混合型求和公式.

例如，将 (12.1) 式乘以 $\mathrm{Q}_l(y)$，将 (12.24) 式中的变量 x 改为 y，再乘以 $\mathrm{P}_l(x)$，而后两式相减，并求和，就得到 Christoffel (第二) 求和公式

$$\sum_{l=0}^{n}(2l+1)\,\mathrm{P}_l(x)\,\mathrm{Q}_l(y) = \frac{1}{x-y}\Big\{1-(n+1)\big[\mathrm{P}_{n+1}(x)\,\mathrm{Q}_n(y)-\mathrm{P}_n(x)\,\mathrm{Q}_{n+1}(y)\big]\Big\}. \tag{12.39}$$

在得到这个结果时，需要用到递推关系 (12.24) 在 $l=0$ 时的替代形式 (12.24′).

类似地，将递推关系 (12.10) — (12.13) 与 (12.25) — (12.28) 对应地组合起来，也能得到

$$\sum_{l=1}^{n}\frac{2l+1}{l(l+1)}\,\mathrm{P}_l'(x)\,\mathrm{Q}_l'(y) = \frac{1}{x-y}\left[\frac{\mathrm{P}_{n+1}'(x)\,\mathrm{Q}_n'(y)-\mathrm{P}_n'(x)\,\mathrm{Q}_{n+1}'(y)}{n+1}-\frac{1}{1-y^2}\right], \tag{12.40}$$

$$\sum_{l=0}^{n}\frac{\mathrm{P}_l(x)\,\mathrm{Q}_l'(y)-\mathrm{P}_l'(x)\,\mathrm{Q}_l(y)}{x-y}+2\sum_{l=0}^{n}\mathrm{P}_l'(x)\,\mathrm{Q}_l'(y) = \frac{\mathrm{P}_{n+1}'(x)\,\mathrm{Q}_n'(y)-\mathrm{P}_n'(x)\,\mathrm{Q}_{n+1}(y)}{x-y}, \tag{12.41}$$

$$\sum_{l=0}^{n}(-1)^{n-l}(2l+1)\big[\mathrm{P}_l(x)\,\mathrm{Q}_l'(y)-\mathrm{P}_l'(x)\,\mathrm{Q}_l(y)\big] = \mathrm{P}_{n+1}'(x)\,\mathrm{Q}_n'(y)-\mathrm{P}_n'(x)\,\mathrm{Q}_{n+1}'(y), \tag{12.42}$$

$$\sum_{l=1}^{n}(-1)^l\frac{2l+1}{l(l+1)}\big[\big(1-x^2\big)\,\mathrm{P}_l'(x)\,\mathrm{Q}_l(y)-\big(1-y^2\big)\mathrm{P}_l(x)\,\mathrm{Q}_l'(y)\big] = (-1)^n\big[\mathrm{P}_n(x)\,\mathrm{Q}_{n+1}(y)-\mathrm{P}_{n+1}(x)\,\mathrm{Q}_n(y)\big]+\frac{x-y}{2}\ln\frac{1+y}{1-y}+1. \tag{12.43}$$

相应地，公式 (12.39) — (12.41) 在 $y\to x$ 时的极限形式为

$$\sum_{l=0}^{n}(2l+1)\,\mathrm{P}_l(x)\,\mathrm{Q}_l(x) = (n+1)^2\big[\mathrm{P}_n(x)\,\mathrm{Q}_n(x)+\mathrm{P}_{n+1}(x)\,\mathrm{Q}_{n+1}(x)\big] + (n+1)x\big[\mathrm{P}_n(x)\,\mathrm{Q}_n'(x)+\mathrm{P}_{n+1}(x)\,\mathrm{Q}_{n+1}'(x)\big], \tag{12.44}$$

$$\sum_{l=1}^{n}\frac{2l+1}{l(l+1)}\big(1-x^2\big)\,\mathrm{P}_l'(x)\,\mathrm{Q}_l'(x) = n\,\mathrm{P}_{n+1}'(x)\,\mathrm{Q}_n(x)-(n+2)\,\mathrm{P}_n(x)\,\mathrm{Q}_{n+1}'(x), \tag{12.45}$$

$$\sum_{l=0}^{n}\big[3\big(1-x^2\big)\,\mathrm{P}_l'(x)\,\mathrm{Q}_l'(x)-2x\,\mathrm{P}_l(x)\,\mathrm{Q}_l'(x)+l(l+1)\,\mathrm{P}_l(x)\,\mathrm{Q}_l(x)\big]$$

$$
\begin{aligned}
&= \left[n(n+1)\,\mathrm{P}'_{n+1}(x)\,\mathrm{Q}_n(x) - (n+1)(n+2)\,\mathrm{P}'_n(x)\,\mathrm{Q}_{n+1}(x)\right] \\
&\quad - (n+1)\,\frac{2x}{1-x^2}.
\end{aligned}
\tag{12.46}
$$

在导出 (12.45) 与 (12.46) 式时用到了 (见第九章 (9.17) 式)

$$
\mathrm{P}'_{n+1}(x)\,\mathrm{Q}'_n(x) - \mathrm{P}'_n(x)\,\mathrm{Q}'_{n+1}(x) = \frac{n+1}{1-x^2}.
$$

对于 (12.42) 与 (12.43) 式，若直接令 $y=x$，则因为

$$
\mathrm{P}_l(x)\,\mathrm{Q}'_l(x) - \mathrm{P}'_l(x)\,\mathrm{Q}_l(x) = \begin{vmatrix} \mathrm{P}_l(x) & \mathrm{Q}_l(x) \\ \mathrm{P}'_l(x) & \mathrm{Q}'_l(x) \end{vmatrix} = \frac{1}{1-x^2},
$$

导出的结果将只是初等数学意义下的恒等式. 所以，这时应当将此二式同除以 $x-y$ 后再取极限，因而有

$$
\begin{aligned}
&\sum_{l=0}^{n}(-1)^{n-l}(2l+1)\left[\left(1-x^2\right)\mathrm{P}'_l(x)\,\mathrm{Q}'_l(x) - 2x\,\mathrm{P}_l(x)\,\mathrm{Q}'_l(x) + l(l+1)\mathrm{P}_l(x)\,\mathrm{Q}_l(x)\right] \\
&\qquad = (n+1)\left\{\left[n\,\mathrm{P}'_{n+1}(x)\,\mathrm{Q}_n(x) - (n+2)\,\mathrm{P}'_n(x)\,\mathrm{Q}_{n+1}(x)\right] - \frac{2x}{1-x^2}\right\},
\end{aligned}
\tag{12.47}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{l=1}^{n}(-1)^{l}(2l+1)\left[\mathrm{P}_l(x)\,\mathrm{Q}_l(x) + \frac{1-x^2}{l(l+1)}\,\mathrm{P}'_l(x)\,\mathrm{Q}'_l(x)\right] \\
&\qquad = (-1)^n\left[\mathrm{P}_n(x)\,\mathrm{Q}'_{n+1}(x) - \mathrm{P}_{n+1}(x)\,\mathrm{Q}'_n(x)\right] - \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}.
\end{aligned}
\tag{12.48}
$$

12.1.5 $\mathrm{P}_l(x)$ 与 $\mathrm{Q}_l(x)$ 的另一种求和公式

从特殊函数 $u_l(x)$ 的递推关系 (12.6a) 或 (12.6b) 出发，还能得到另一种求和公式. 这只需将 (12.6a) 式两端同乘以$(-1)^l u_l(x)$，或将 (12.6b) 式两端同乘以 $(-1)^l u'_l(x)$，而后求和即可. 得到的求和公式为

$$
\begin{aligned}
&\sum_{l=0}^{n}(-1)^l\left[\alpha_l(x)\,u_l(x) + \beta_l(x)u'_l(x)\right]u_l(x) \\
&\qquad = (-1)^n\gamma_{n+1}\,u_{n+1}(x)\,u_n(x) + \gamma_0\,u_0(x)\,u_{-1}(x)
\end{aligned}
\tag{12.49a}
$$

或

$$
\begin{aligned}
&\sum_{l=0}^{n}(-1)^l\left[\alpha_l(x)\,u_l(x) + \beta_l(x)u'_l(x)\right]u'_l(x) \\
&\qquad = (-1)^{n+1}\gamma_{n+1}\,u'_{n+1}(x)\,u'_n(x) + \delta_0\,u'_0(x)\,u'_{-1}(x).
\end{aligned}
\tag{12.49b}
$$

例如，由递推关系 (12.1) 出发，按照上面的办法，就可以导出

$$\sum_{l=0}^{n}(-1)^{n-l}(2l+1)\big[\mathrm{P}_l(x)\big]^2 = \frac{n+1}{x}\,\mathrm{P}_{n+1}(x)\,\mathrm{P}_n(x). \tag{12.50}$$

其实，因为 Legendre 多项式具有奇偶性，$\mathrm{P}_l(-x)=(-1)^l\mathrm{P}_l(x)$，在 (12.4) 式中代入 $y=-x$ 也能导出此公式.

类似地，根据递推关系 (12.10) — (12.13)，也有

$$\sum_{l=1}^{n}(-1)^{n-l}\frac{2l+1}{l(l+1)}\left[\mathrm{P}_l'(x)\right]^2 = \frac{1}{n+1}\,\frac{\mathrm{P}_n'(x)\,\mathrm{P}_{n+1}'(x)}{x}, \tag{12.51}$$

$$\sum_{l=0}^{n}(-1)^{n-l}\mathrm{P}_l'(x)\left[\mathrm{P}_l(x)+2x\,\mathrm{P}_l'(x)\right] = \mathrm{P}_n'(x)\,\mathrm{P}_{n+1}'(x), \tag{12.52}$$

$$\sum_{l=0}^{n}(2l+1)\,\mathrm{P}_l(x)\,\mathrm{P}_l'(x) = \mathrm{P}_n'(x)\,\mathrm{P}_{n+1}'(x), \tag{12.53}$$

$$\sum_{l=1}^{n}\frac{2l+1}{l(l+1)}\left(1-x^2\right)\mathrm{P}_l(x)\,\mathrm{P}_l'(x) = x-\mathrm{P}_n(x)\,\mathrm{P}_{n+1}(x). \tag{12.54}$$

对于第二类 Legendre 函数，同样有类似的结果：

$$\sum_{l=0}^{n}(-1)^l(2l+1)\big[\mathrm{Q}_l(x)\big]^2 = (-1)^n\frac{n+1}{x}\,\mathrm{Q}_n(x)\,\mathrm{Q}_{n+1}(x)+\frac{1}{2x}\ln\frac{1+x}{1-x}, \tag{12.55}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{l=1}^{n}(-1)^l\frac{2l+1}{l(l+1)}\left[\mathrm{Q}_l'(x)\right]^2\\ &\quad=\frac{(-1)^n}{n+1}\,\frac{\mathrm{Q}_n'(x)\,\mathrm{Q}_{n+1}'(x)}{x}-\left[\frac{1}{(1-x^2)^2}+\frac{1}{2x}\,\frac{1}{1-x^2}\ln\frac{1+x}{1-x}\right],\end{aligned} \tag{12.56}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{l=0}^{n}(-1)^l\,\mathrm{Q}_l(x)\,\mathrm{Q}_l'(x)+2x\sum_{l=0}^{n}(-1)^l\left[\mathrm{Q}_l'(x)\right]^2\\ &\quad=(-1)^n\mathrm{Q}_n'(x)\,\mathrm{Q}_{n+1}'(x)-\frac{x}{(1-x^2)^2},\end{aligned} \tag{12.57}$$

$$\sum_{l=0}^{n}(2l+1)\,\mathrm{Q}_l(x)\,\mathrm{Q}_l'(x) = \mathrm{Q}_n'(x)\,\mathrm{Q}_{n+1}'(x)-\frac{x}{(1-x^2)^2}, \tag{12.58}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{l=1}^{n}(-1)^l(2l+1)\left\{\big[\mathrm{Q}_l(x)\big]^2+\frac{1-x^2}{l(l+1)}\left[\mathrm{Q}_l'(x)\right]^2\right\}\\ &\quad=(-1)^n\left[\mathrm{Q}_n(x)\,\mathrm{Q}_{n+1}'(x)-\mathrm{Q}_n'(x)\,\mathrm{Q}_{n+1}(x)\right]-\frac{1}{4}\ln^2\frac{1+x}{1-x}-\frac{1}{1-x^2},\end{aligned} \tag{12.59}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{l=1}^{n}\frac{2l+1}{l(l+1)}(x^2-1)\,\mathrm{Q}_l(x)\,\mathrm{Q}_l'(x)\\ &\quad=\mathrm{Q}_n(x)\,\mathrm{Q}_{n+1}(x)-\frac{x}{4}\ln^2\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}.\end{aligned} \tag{12.60}$$

稍作变化，也能得到混合型的求和公式：

$$\sum_{l=0}^{n}(-1)^l(2l+1)\,\mathrm{P}_l(x)\,\mathrm{Q}_l(x)$$
$$= (-1)^n\frac{n+1}{2x}\left[\mathrm{P}_n(x)\,\mathrm{Q}_{n+1}(x)+\mathrm{P}_{n+1}(x)\,\mathrm{Q}_n(x)\right]+\frac{1}{2x}, \tag{12.61}$$

$$\sum_{l=1}^{n}(-1)^l\frac{2l+1}{l(l+1)}\,\mathrm{P}_l'(x)\,\mathrm{Q}_l'(x)$$
$$= \frac{(-1)^n}{n+1}\,\frac{\mathrm{P}_n'(x)\,\mathrm{Q}_{n+1}'(x)+\mathrm{P}_{n+1}'(x)\,\mathrm{Q}_n'(x)}{2x}-\frac{1}{2x}\,\frac{1}{1-x^2}, \tag{12.62}$$

$$\sum_{l=0}^{n}(-1)^l\left[\mathrm{P}_l(x)\,\mathrm{Q}_l'(x)+\mathrm{P}_l'(x)\,\mathrm{Q}_l(x)\right]+4x\sum_{l=0}^{n}(-1)^l\mathrm{P}_l'(x)\,\mathrm{Q}_l'(x)$$
$$= (-1)^n\left[\mathrm{P}_n'(x)\,\mathrm{Q}_{n+1}'(x)+\mathrm{P}_{n+1}'(x)\,\mathrm{Q}_n'(x)\right], \tag{12.63}$$

$$\sum_{l=0}^{n}(2l+1)\left[\mathrm{P}_l(x)\,\mathrm{Q}_l'(x)+\mathrm{P}_l'(x)\,\mathrm{Q}_l(x)\right]=\mathrm{P}_n'(x)\,\mathrm{Q}_{n+1}'(x)+\mathrm{P}_{n+1}'(x)\,\mathrm{Q}_n'(x), \tag{12.64}$$

$$\sum_{l=1}^{n}\frac{2l+1}{l(l+1)}(x^2-1)\left[\mathrm{P}_l(x)\,\mathrm{Q}_l'(x)+\mathrm{P}_l'(x)\,\mathrm{Q}_l(x)\right]$$
$$= \left[\mathrm{P}_n(x)\,\mathrm{Q}_{n+1}(x)+\mathrm{P}_{n+1}(x)\,\mathrm{Q}_n(x)\right]-x\ln\frac{1+x}{1-x}+1. \tag{12.65}$$

最后或许值得提到，上面导出的这些求和公式，除了 (12.4) 及 (12.39) 二式外，笔者在几本主要专著和工具书中都没有检索到.

12.1.6 $n\to\infty$ 的极限情形

以上得到的求和公式，可以看成相应无穷级数的部分和．在部分和序列收敛的条件下，就可以求得相应无穷级数的和．这时需要用到 Legendre 函数 $\mathrm{P}_\nu(x)$ 及 $\mathrm{Q}_\nu(x)$ 的渐近表达式：

$$\mathrm{P}_\nu(\cos\theta)=\sqrt{\frac{2}{\nu\pi\sin\theta}}\cos\left[\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\theta-\frac{\pi}{4}\right]+O\left(\nu^{-3/2}\right),\qquad 0<\varepsilon\leqslant\theta\leqslant\pi-\varepsilon,$$

$$\mathrm{Q}_\nu(\cos\theta)=\sqrt{\frac{\pi}{2\nu\sin\theta}}\cos\left[\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\theta+\frac{\pi}{4}\right]+O\left(\nu^{-3/2}\right),\qquad 0<\varepsilon\leqslant\theta\leqslant\pi-\varepsilon,$$

$$\mathrm{P}_\nu'(\cos\theta)=\sqrt{\frac{2\nu}{\pi\sin^3\theta}}\sin\left[\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\theta-\frac{\pi}{4}\right]+O\left(\nu^{-1/2}\right),\qquad 0<\varepsilon\leqslant\theta\leqslant\pi-\varepsilon,$$

$$\mathrm{Q}_\nu'(\cos\theta)=\sqrt{\frac{\nu\pi}{2\sin^3\theta}}\sin\left[\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\theta+\frac{\pi}{4}\right]+O\left(\nu^{-1/2}\right),\qquad 0<\varepsilon\leqslant\theta\leqslant\pi-\varepsilon.$$

容易判断，在 $-1<x<1$ 的条件下，当 $n\to\infty$ 时，(12.22)，(12.33)，(12.43)，(12.54)，(12.60) 及 (12.65) 诸式的极限存在，从而我们可以得到

$$\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^{l-1}\frac{2l+1}{l(l+1)}\frac{(x^2-1)\mathrm{P}_l'(x)\,\mathrm{P}_l(y)-(y^2-1)\mathrm{P}_l'(y)\,\mathrm{P}_l(x)}{x-y}=1, \tag{12.66a}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^{l-1}\frac{2l+1}{l(l+1)}\frac{(x^2-1)\mathrm{Q}_l'(x)\,\mathrm{Q}_l(y)-(y^2-1)\mathrm{Q}_l'(y)\,\mathrm{Q}_l(x)}{x-y}\\&\qquad=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}\ln\frac{1+y}{1-y}+\frac{1}{2}\frac{1}{x-y}\left(\ln\frac{1+x}{1-x}-\ln\frac{1+y}{1-y}\right),\end{aligned} \tag{12.67a}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^{l}\frac{2l+1}{l(l+1)}\left[\left(1-x^2\right)\mathrm{P}_l'(x)\,\mathrm{Q}_l(y)-\left(1-y^2\right)\mathrm{P}_l(x)\,\mathrm{Q}_l(y)\right]\\&\qquad=\frac{x-y}{2}\ln\frac{1+y}{1-y}+1,\end{aligned} \tag{12.68}$$

$$\sum_{l=1}^{\infty}\frac{2l+1}{l(l+1)}\left(1-x^2\right)\mathrm{P}_l(x)\,\mathrm{P}_l'(x)=x, \tag{12.69}$$

$$\sum_{l=1}^{\infty}\frac{2l+1}{l(l+1)}(x^2-1)\mathrm{Q}_l(x)\,\mathrm{Q}_l'(x)=-\frac{x}{4}\ln^2\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}, \tag{12.70}$$

$$\sum_{l=1}^{\infty}\frac{2l+1}{l(l+1)}(x^2-1)\left[\mathrm{P}_l(x)\,\mathrm{Q}_l'(x)+\mathrm{P}_l'(x)\,\mathrm{Q}_l(x)\right]=-x\ln\frac{1+x}{1-x}+1. \tag{12.71}$$

更进一步，还可以在 (12.66a) 和 (12.67a) 两式中取极限 $y\to x$，所得结果为

$$\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^{l-1}\frac{2l+1}{l(l+1)}\left\{(1-x^2)\left[\mathrm{P}_l'(x)\right]^2+l(l+1)\left[\mathrm{P}_l(x)\right]^2\right\}=1, \tag{12.66b}$$

$$\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^{l-1}(2l+1)\left\{\frac{1-x^2}{l(l+1)}\left[\mathrm{Q}_l'(x)\right]^2+\left[\mathrm{Q}_l(x)\right]^2\right\}=\frac{1}{4}\ln^2\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{1-x^2}. \tag{12.67b}$$

§12.2 连带 Legendre 函数的求和公式

对于一般的连带 Legendre 函数，也有类似的其递推关系，例如

$$(2\nu+1)\,x\,\mathrm{P}_\nu^\mu(x)=(\nu-\mu+1)\,\mathrm{P}_{\nu+1}^\mu(x)+(\nu+\mu)\,\mathrm{P}_{\nu-1}^\mu(x), \tag{12.72}$$

$$(2\nu+1)\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{P}_\nu^{\mu-1}(x)=-\mathrm{P}_{\nu+1}^\mu(x)+\mathrm{P}_{\nu-1}^\mu(x), \tag{12.73}$$

$$(2\nu+1)\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{dP}_\nu^\mu(x)}{\mathrm{d}x}=-\nu(\nu-\mu+1)\,\mathrm{P}_{\nu+1}^\mu(x)+(\nu+1)(\nu+\mu)\,\mathrm{P}_{\nu-1}^\mu(x), \tag{12.74}$$

$$\begin{aligned}&(2\nu+1)\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{P}_\nu^{\mu+1}(x)\\&\qquad=(\nu-\mu)(\nu-\mu+1)\,\mathrm{P}_{\nu+1}^\mu(x)-(\nu+\mu)(\nu+\mu+1)\,\mathrm{P}_{\nu-1}^\mu(x),\end{aligned} \tag{12.75}$$

$$-2\mu x\,\mathrm{P}_\nu^\mu(x)=\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{P}_\nu^{\mu+1}(x)+(\nu-\mu+1)(\nu+\mu)\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{P}_\nu^{\mu-1}(x), \tag{12.76}$$

$$\mathrm{P}_{\nu-1}^{\mu}(x) - x\,\mathrm{P}_{\nu}^{\mu}(x) = (\nu-\mu+1)\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{P}_{\nu}^{\mu-1}(x), \tag{12.77}$$

$$x\,\mathrm{P}_{\nu}^{\mu}(x) - \mathrm{P}_{\nu+1}^{\mu}(x) = (\nu+\mu)\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{P}_{\nu}^{\mu-1}(x), \tag{12.78}$$

$$(\nu-\mu+1)\,x\,\mathrm{P}_{\nu+1}^{\mu}(x) - (\nu+\mu+1)\,\mathrm{P}_{\nu}^{\mu}(x) = \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{P}_{\nu+1}^{\mu+1}(x), \tag{12.79}$$

$$(\nu-\mu)\,\mathrm{P}_{\nu}^{\mu}(x) - (\nu+\mu)\,x\,\mathrm{P}_{\nu-1}^{\mu}(x) = \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{P}_{\nu-1}^{\mu+1}(x). \tag{12.80}$$

可以预期，从这些递推关系出发，也将能得到相应的求和公式．例如，对于递推关系 (12.72)，首先需要将它改写为

$$\begin{aligned}&(2\nu+2k+1)\,\frac{\Gamma(\nu+k-\mu+1)}{\Gamma(\nu+k+\mu+1)}\,x\,\mathrm{P}_{\nu+k}^{\mu}(x)\\&\qquad=\frac{\Gamma(\nu+k-\mu+2)}{\Gamma(\nu+k+\mu+1)}\,\mathrm{P}_{\nu+k+1}^{\mu}(x)+\frac{\Gamma(\nu+k-\mu+1)}{\Gamma(\nu+k+\mu)}\,\mathrm{P}_{\nu+k-1}^{\mu}(x),\end{aligned} \tag{12.72$'$}$$

再重复 §12.1 中的做法，就有

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n}(2\nu+2k+1)\,\frac{\Gamma(\nu+k-\mu+1)}{\Gamma(\nu+k+\mu+1)}\,\mathrm{P}_{\nu+k}^{\mu}(x)\,\mathrm{P}_{\nu+k}^{\mu}(y)\\&\qquad=\frac{\Gamma(\nu+n-\mu+2)}{\Gamma(\nu+n+\mu+1)}\,\frac{\mathrm{P}_{\nu+n+1}^{\mu}(x)\,\mathrm{P}_{\nu+n}^{\mu}(y)-\mathrm{P}_{\nu+n}^{\mu}(x)\,\mathrm{P}_{\nu+n+1}^{\mu}(y)}{x-y}\\&\qquad\quad-\frac{\Gamma(\nu-\mu+1)}{\Gamma(\nu+\mu)}\,\frac{\mathrm{P}_{\nu}^{\mu}(x)\,\mathrm{P}_{\nu-1}^{\mu}(y)-\mathrm{P}_{\nu-1}^{\mu}(x)\,\mathrm{P}_{\nu}^{\mu}(y)}{x-y}.\end{aligned} \tag{12.81}$$

类似地，由 (12.73) — (12.75) 式，也能得到

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(2\nu+2k+1)\Big[\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{P}_{\nu+k}^{\mu-1}(x)\,\mathrm{P}_{\nu+k}^{\mu}(y)-\sqrt{1-y^2}\,\mathrm{P}_{\nu+k}^{\mu}(x)\,\mathrm{P}_{\nu+k}^{\mu-1}(y)\Big]\\&\quad=(-1)^{n+1}\Big[\mathrm{P}_{\nu+n+1}^{\mu}(x)\,\mathrm{P}_{\nu+n}^{\mu}(y)-\mathrm{P}_{\nu+n}^{\mu}(x)\,\mathrm{P}_{\nu+n+1}^{\mu}(y)\Big]\\&\qquad-\Big[\mathrm{P}_{\nu}^{\mu}(x)\,\mathrm{P}_{\nu-1}^{\mu}(y)-\mathrm{P}_{\nu-1}^{\mu}(x)\,\mathrm{P}_{\nu}^{\mu}(y)\Big],\end{aligned} \tag{12.82}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\,\frac{2\nu+2k+1}{(\nu+k)(\nu+k+1)}\,\frac{\Gamma(\nu+k-\mu+1)}{\Gamma(\nu+k+\mu+1)}\\&\qquad\times\left[\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{dP}_{\nu+k}^{\mu}(x)}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{P}_{\nu+k}^{\mu}(y)-\left(1-y^2\right)\mathrm{P}_{\nu+k}^{\mu}(x)\,\frac{\mathrm{dP}_{\nu+k}^{\mu}(y)}{\mathrm{d}y}\right]\\&\quad=\frac{(-1)^{n+1}}{\nu+n+1}\,\frac{\Gamma(\nu+n-\mu+2)}{\Gamma(\nu+n+\mu+1)}\Big[\mathrm{P}_{\nu+n+1}^{\mu}(x)\,\mathrm{P}_{\nu+n}^{\mu}(y)-\mathrm{P}_{\nu+n}^{\mu}(x)\,\mathrm{P}_{\nu+n+1}^{\mu}(y)\Big]\\&\qquad-\frac{1}{\nu}\,\frac{\Gamma(\nu-\mu+1)}{\Gamma(\nu+\mu)}\Big[\mathrm{P}_{\nu}^{\mu}(x)\,\mathrm{P}_{\nu-1}^{\mu}(y)-\mathrm{P}_{\nu-1}^{\mu}(x)\,\mathrm{P}_{\nu}^{\mu}(y)\Big],\end{aligned} \tag{12.83}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{2\nu+2k+1}{(\nu+k-\mu)(\nu+k+\mu+1)}\left[\frac{\Gamma(\nu+k-\mu+1)}{\Gamma(\nu+k+\mu+1)}\right]^2\\&\qquad\times\left[\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{P}_{\nu+k}^{\mu+1}(x)\,\mathrm{P}_{\nu+k}^{\mu}(y)-\sqrt{1-y^2}\,\mathrm{P}_{\nu+k}^{\mu}(x)\,\mathrm{P}_{\nu+k}^{\mu+1}(y)\right]\\&=(-1)^n\,\frac{\nu+n-\mu+1}{\nu+n+\mu+1}\left[\frac{\Gamma(\nu+n-\mu+1)}{\Gamma(\nu+n+\mu+1)}\right]^2\\&\qquad\times\left[\mathrm{P}_{\nu+n+1}^{\mu}(x)\,\mathrm{P}_{\nu+n}^{\mu}(y)-\mathrm{P}_{\nu+n}^{\mu}(x)\,\mathrm{P}_{\nu+n+1}^{\mu}(y)\right]\\&\qquad+\frac{\nu-\mu}{\nu+\mu}\left[\frac{\Gamma(\nu-\mu)}{\Gamma(\nu+\mu)}\right]^2\left[\mathrm{P}_{\nu}^{\mu}(x)\,\mathrm{P}_{\nu-1}^{\mu}(y)-\mathrm{P}_{\nu-1}^{\mu}(x)\,\mathrm{P}_{\nu}^{\mu}(y)\right].\end{aligned}\tag{12.84}$$

至于 (12.76) 式，则应当将 μ 改写为 $\mu+k$，即

$$-2(\mu+k)\,\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{P}_{\nu}^{\mu+k}(x)=\mathrm{P}_{\nu}^{\mu+k+1}(x)+(\nu-\mu-k+1)(\nu+\mu+k)\,\mathrm{P}_{\nu}^{\mu+k-1}(x),$$

由此导出的求和公式为

$$\begin{aligned}&2\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\right)\sum_{k=0}^{n}(\mu+k)\frac{\Gamma(\nu-\mu-k+1)}{\Gamma(\nu+\mu+k+1)}\mathrm{P}_{\nu}^{\mu+k}(x)\,\mathrm{P}_{\nu}^{\mu+k}(y)\\&\quad=\frac{\Gamma(\nu-\mu-n+1)}{\Gamma(\nu+\mu+n+1)}\left[\mathrm{P}_{\nu}^{\mu+n}(x)\,\mathrm{P}_{\nu}^{\mu+n+1}(y)-\mathrm{P}_{\nu}^{\mu+n+1}(x)\,\mathrm{P}_{\nu}^{\mu+n}(y)\right]\\&\qquad-\frac{\Gamma(\nu-\mu+2)}{\Gamma(\nu+\mu)}\left[\mathrm{P}_{\nu}^{\mu-1}(x)\,\mathrm{P}_{\nu}^{\mu}(y)-\mathrm{P}_{\nu}^{\mu}(x)\,\mathrm{P}_{\nu}^{\mu-1}(y)\right].\end{aligned}\tag{12.85}$$

对于递推关系 (12.77) 与 (12.78)，应当分别将此二式中的 $\nu-1$ 或 $\nu+1$ 写为 ν，并消去 $\mathrm{P}_{\nu}^{\mu}(x)$，从而得到

$$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\left[\mathrm{P}_{\nu-1}^{\mu}(x)-\mathrm{P}_{\nu+1}^{\mu}(x)\right]=(\nu-\mu+2)\,\mathrm{P}_{\nu+1}^{\mu-1}(x)+(\nu+\mu-1)\,\mathrm{P}_{\nu-1}^{\mu-1}(x).$$

再将 μ 改写为 $\mu+1$，进而将上式改写成

$$\begin{aligned}&\frac{\Gamma(\nu+k-\mu+1)}{\Gamma(\nu+k+\mu)}\,\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\left[\mathrm{P}_{\nu+k-1}^{\mu+1}(x)-\mathrm{P}_{\nu+k+1}^{\mu+1}(x)\right]\\&\quad=\frac{\Gamma(\nu+k-\mu+2)}{\Gamma(\nu+k+\mu+1)}\,\mathrm{P}_{\nu+k+1}^{\mu}(x)+\frac{\Gamma(\nu+k-\mu+1)}{\Gamma(\nu+k+\mu)}\,\mathrm{P}_{\nu+k-1}^{\mu}(x)\end{aligned}\tag{12.86a}$$

或

$$\begin{aligned}&(-1)^k(\nu+k-\mu+1)\,\mathrm{P}_{\nu+k+1}^{\mu}(x)+(\nu+k+\mu)\,\mathrm{P}_{\nu-1}^{\mu}(x)\\&\quad=(-1)^k\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\left[\mathrm{P}_{\nu+k-1}^{\mu+1}(x)+(-1)^{k-1}\mathrm{P}_{\nu+k+1}^{\mu+1}(x)\right].\end{aligned}\tag{12.86b}$$

由 (12.86a) 式能够得到

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{\Gamma(\nu+k-\mu+1)}{\Gamma(\nu+k+\mu+1)}\left\{\left[\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{P}_{\nu+k-1}^{\mu+1}(x)\,\mathrm{P}_{\nu+k}^{\mu}(y)-\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{P}_{\nu+k}^{\mu}(x)\,\mathrm{P}_{\nu+k-1}^{\mu+1}(y)\right]\right.$$
$$\left.-\left[\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{P}_{\nu+k+1}^{\mu+1}(x)\,\mathrm{P}_{\nu+k}^{\mu}(y)-\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{P}_{\nu+k}^{\mu}(x)\,\mathrm{P}_{\nu+k+1}^{\mu+1}(y)\right]\right\}$$
$$=\frac{\Gamma(\nu+n-\mu+2)}{\Gamma(\nu+n+\mu+1)}\left[\mathrm{P}_{\nu+n+1}^{\mu}(x)\,\mathrm{P}_{\nu+n}^{\mu}(y)-\mathrm{P}_{\nu+n}^{\mu}(x)\,\mathrm{P}_{\nu+n+1}^{\mu}(x)\right]$$
$$-\frac{\Gamma(\nu-\mu+1)}{\Gamma(\nu+\mu)}\left[\mathrm{P}_{\nu}^{\mu}(x)\,\mathrm{P}_{\nu-1}^{\mu}(y)-\mathrm{P}_{\nu-1}^{\mu}(x)\,\mathrm{P}_{\nu}^{\mu}(x)\right].\tag{12.87}$$

而由 (12.86b) 式，则有

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left\{(\nu+k-\mu+1)\left[\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{P}_{\nu+k}^{\mu+1}(x)\,\mathrm{P}_{\nu+k+1}^{\mu}(y)-\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{P}_{\nu+k+1}^{\mu}(x)\,\mathrm{P}_{\nu+k}^{\mu+1}(y)\right]\right.$$
$$\left.+(\nu+k+\mu)\left[\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{P}_{\nu+k}^{\mu+1}(x)\,\mathrm{P}_{\nu+k-1}^{\mu}(y)-\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{P}_{\nu+k-1}^{\mu}(x)\,\mathrm{P}_{\nu+k}^{\mu+1}(y)\right]\right\}$$
$$=(-1)^n\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\left[\mathrm{P}_{\nu+n+1}^{\mu}(x)\,\mathrm{P}_{\nu+n}^{\mu}(y)-\mathrm{P}_{\nu+n}^{\mu}(x)\,\mathrm{P}_{\nu+n+1}^{\mu}(y)\right]$$
$$+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\left[\mathrm{P}_{\nu}^{\mu+1}(x)\,\mathrm{P}_{\nu-1}^{\mu+1}(y)-\mathrm{P}_{\nu-1}^{\mu+1}(x)\,\mathrm{P}_{\nu}^{\mu+1}(y)\right].\tag{12.88}$$

同样，将 (12.79) 与 (12.80) 式联立，消去 $\mathrm{P}_{\nu}^{\mu}(x)$，则得

$$(\nu-\mu)(\nu-\mu+1)\,x\,\mathrm{P}_{\nu+1}^{\mu}(x)-(\nu+\mu)(\nu+\mu+1)\,x\,\mathrm{P}_{\nu-1}^{\mu}(x)$$
$$=(\nu-\mu)\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{P}_{\nu+1}^{\mu+1}(x)+(\nu+\mu+1)\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{P}_{\nu-1}^{\mu+1}(x),$$

更进一步改写成

$$\frac{\Gamma(\nu+k-\mu+2)}{\Gamma(\nu+k+\mu+2)}\,\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{P}_{\nu+k+1}^{\mu}(x)-\frac{\Gamma(\nu+k-\mu)}{\Gamma(\nu+k+\mu)}\,\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{P}_{\nu+k-1}^{\mu}(x)$$
$$=\frac{\Gamma(\nu+k-\mu+1)}{\Gamma(\nu+k+\mu+2)}\,\mathrm{P}_{\nu+k+1}^{\mu+1}(x)+\frac{\Gamma(\nu+k-\mu)}{\Gamma(\nu+k+\mu+1)}\,\mathrm{P}_{\nu+k-1}^{\mu+1}(x)\tag{12.89a}$$

或

$$(-1)^k\left[\frac{\Gamma(\nu+k-\mu+1)}{\Gamma(\nu+k+\mu+1)}\right]^2\left[\frac{1}{\nu+k+\mu+1}\,\mathrm{P}_{\nu+k+1}^{\mu+1}(x)+\frac{1}{\nu+k-\mu}\,\mathrm{P}_{\nu+k-1}^{\mu+1}(x)\right]$$
$$=(-1)^k\frac{\nu+k-\mu+1}{\nu+k+\mu+1}\left[\frac{\Gamma(\nu+k-\mu+1)}{\Gamma(\nu+k+\mu+1)}\right]^2\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{P}_{\nu+k+1}^{\mu}(x)$$
$$+(-1)^{k-1}\frac{\nu+k-\mu}{\nu+k+\mu}\left[\frac{\Gamma(\nu+k-\mu)}{\Gamma(\nu+k+\mu)}\right]^2\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{P}_{\nu+k-1}^{\mu}(x),\tag{12.89b}$$

也能得到两个和式:

$$\sum_{k=0}^{n}\left\{\frac{\Gamma(\nu+k-\mu+2)}{\Gamma(\nu+k+\mu+2)}\left[\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{P}_{\nu+k+1}^{\mu}(x)\,\mathrm{P}_{\nu+k}^{\mu+1}(y)-\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{P}_{\nu+k}^{\mu+1}(x)\,\mathrm{P}_{\nu+k+1}^{\mu}(y)\right]\right.$$
$$\left.-\frac{\Gamma(\nu+k-\mu)}{\Gamma(\nu+k+\mu)}\left[\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{P}_{\nu+k-1}^{\mu}(x)\,\mathrm{P}_{\nu+k}^{\mu+1}(y)-\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{P}_{\nu+k}^{\mu+1}(x)\,\mathrm{P}_{\nu+k-1}^{\mu}(y)\right]\right\}$$
$$=\frac{\Gamma(\nu+n-\mu+1)}{\Gamma(\nu+n+\mu+2)}\left[\mathrm{P}_{\nu+n+1}^{\mu+1}(x)\,\mathrm{P}_{\nu+n}^{\mu+1}(y)-\mathrm{P}_{\nu+n}^{\mu+1}(x)\,\mathrm{P}_{\nu+n+1}^{\mu+1}(y)\right]$$
$$-\frac{\Gamma(\nu-\mu)}{\Gamma(\nu+\mu+1)}\left[\mathrm{P}_{\nu}^{\mu+1}(x)\,\mathrm{P}_{\nu-1}^{\mu+1}(y)-\mathrm{P}_{\nu-1}^{\mu+1}(x)\,\mathrm{P}_{\nu}^{\mu+1}(y)\right],\tag{12.90}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left[\frac{\Gamma(\nu+k-\mu+1)}{\Gamma(\nu+k+\mu+1)}\right]^2$$
$$\times\left\{\frac{1}{\nu+k+\mu+1}\left[\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{P}_{\nu+k}^{\mu}(x)\,\mathrm{P}_{\nu+k+1}^{\mu+1}(y)-\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{P}_{\nu+k+1}^{\mu+1}(x)\,\mathrm{P}_{\nu+k}^{\mu}(y)\right]\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\nu+k-\mu}\left[\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{P}_{\nu+k}^{\mu}(x)\,\mathrm{P}_{\nu+k-1}^{\mu+1}(y)-\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{P}_{\nu+k-1}^{\mu+1}(x)\,\mathrm{P}_{\nu+k}^{\mu}(y)\right]\right\}$$
$$=(-1)^n\frac{\nu+n-\mu+1}{\nu+n+\mu+1}\left[\frac{\Gamma(\nu+n-\mu+1)}{\Gamma(\nu+n+\mu+1)}\right]^2$$
$$\times\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\left[\mathrm{P}_{\nu+n}^{\mu}(x)\,\mathrm{P}_{\nu+n+1}^{\mu}(y)-\mathrm{P}_{\nu+n+1}^{\mu}(x)\,\mathrm{P}_{\nu+n}^{\mu}(y)\right]$$
$$+\frac{\nu-\mu}{\nu+\mu}\left[\frac{\Gamma(\nu-\mu)}{\Gamma(\nu+\mu)}\right]^2\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\left[\mathrm{P}_{\nu-1}^{\mu}(x)\,\mathrm{P}_{\nu}^{\mu}(y)-\mathrm{P}_{\nu}^{\mu}(x)\,\mathrm{P}_{\nu-1}^{\mu}(y)\right].\tag{12.91}$$

对于第二类连带 Legendre 函数 $\mathrm{Q}_{\nu}^{\mu}(x)$，因为它们的递推关系形式与 $\mathrm{P}_{\nu}^{\mu}(x)$ 完全相同，所以重复上面的讨论，也应当有下列求和公式:

$$\sum_{k=0}^{n}(2\nu+2k+1)\frac{\Gamma(\nu+k-\mu+1)}{\Gamma(\nu+k+\mu+1)}\,\mathrm{Q}_{\nu+k}^{\mu}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu+k}^{\mu}(y)$$
$$=\frac{\Gamma(\nu+n-\mu+2)}{\Gamma(\nu+n+\mu+1)}\,\frac{\mathrm{Q}_{\nu+n+1}^{\mu}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu+k}^{\mu}(y)-\mathrm{Q}_{\nu+k}^{\mu}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu+n+1}^{\mu}(y)}{x-y}$$
$$-\frac{\Gamma(\nu-\mu+1)}{\Gamma(\nu+\mu)}\,\frac{\mathrm{Q}_{\nu}^{\mu}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu-1}^{\mu}(y)-\mathrm{Q}_{\nu-1}^{\mu}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu}^{\mu}(y)}{x-y},\tag{12.92}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(2\nu+2k+1)\left[\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{Q}_{\nu+k}^{\mu-1}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu+k}^{\mu}(y)-\sqrt{1-y^2}\,\mathrm{Q}_{\nu+k}^{\mu}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu+k}^{\mu-1}(y)\right]$$
$$=(-1)^{n+1}\left[\mathrm{Q}_{\nu+n+1}^{\mu}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu+n}^{\mu}(y)-\mathrm{Q}_{\nu+n}^{\mu}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu+n+1}^{\mu}(y)\right]$$
$$-\left[\mathrm{Q}_{\nu}^{\mu}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu-1}^{\mu}(y)-\mathrm{Q}_{\nu-1}^{\mu}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu}^{\mu}(y)\right],\tag{12.93}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{2\nu+2k+1}{(\nu+k)(\nu+k+1)}\,\frac{\Gamma(\nu+k-\mu+1)}{\Gamma(\nu+k+\mu+1)}$$
$$\times\left[\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{d}Q^{\mu}_{\nu+k}(x)}{\mathrm{d}x}\,Q^{\mu}_{\nu+k}(y)-\left(1-y^2\right)Q^{\mu}_{\nu+k}(x)\,\frac{\mathrm{d}Q^{\mu}_{\nu+k}(y)}{\mathrm{d}y}\right]$$
$$=\frac{(-1)^{n+1}}{\nu+n+1}\,\frac{\Gamma(\nu+n-\mu+2)}{\Gamma(\nu+n+\mu+1)}\left[Q^{\mu}_{\nu+n+1}(x)\,Q^{\mu}_{\nu+n}(y)-Q^{\mu}_{\nu+n}(x)\,Q^{\mu}_{\nu+n+1}(y)\right]$$
$$-\frac{1}{\nu}\,\frac{\Gamma(\nu-\mu+1)}{\Gamma(\nu+\mu)}\left[Q^{\mu}_{\nu}(x)\,Q^{\mu}_{\nu-1}(y)-Q^{\mu}_{\nu-1}(x)\,Q^{\mu}_{\nu}(y)\right],\tag{12.94}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{2\nu+2k+1}{(\nu+k-\mu)(\nu+k+\mu+1)}\left[\frac{\Gamma(\nu+k-\mu+1)}{\Gamma(\nu+k+\mu+1)}\right]^2$$
$$\times\left[\sqrt{1-x^2}\,Q^{\mu+1}_{\nu+k}(x)\,Q^{\mu}_{\nu+k}(y)-\sqrt{1-y^2}\,Q^{\mu}_{\nu+k}(x)\,Q^{\mu+1}_{\nu+k}(y)\right]$$
$$=(-1)^n\,\frac{\nu+n-\mu+1}{\nu+n+\mu+1}\left[\frac{\Gamma(\nu+n-\mu+1)}{\Gamma(\nu+n+\mu+1)}\right]^2$$
$$\times\left[Q^{\mu}_{\nu+n+1}(x)\,Q^{\mu}_{\nu+n}(y)-Q^{\mu}_{\nu+n}(x)\,Q^{\mu}_{\nu+n+1}(y)\right]$$
$$+\frac{\nu-\mu}{\nu+\mu}\left[\frac{\Gamma(\nu-\mu)}{\Gamma(\nu+\mu)}\right]^2\left[Q^{\mu}_{\nu}(x)\,Q^{\mu}_{\nu-1}(y)-Q^{\mu}_{\nu-1}(x)\,Q^{\mu}_{\nu}(y)\right],\tag{12.95}$$

$$2\left[\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\right]\sum_{k=0}^{n}(\mu+k)\frac{\Gamma(\nu-\mu-k+1)}{\Gamma(\nu+\mu+k+1)}Q^{\mu+k}_{\nu}(x)\,Q^{\mu+k}_{\nu}(y)$$
$$=\frac{\Gamma(\nu-\mu-n+1)}{\Gamma(\nu+\mu+n+1)}\left[Q^{\mu+n}_{\nu}(x)\,Q^{\mu+n+1}_{\nu}(y)-Q^{\mu+n+1}_{\nu}(x)\,Q^{\mu+n}_{\nu}(y)\right]$$
$$-\frac{\Gamma(\nu-\mu+2)}{\Gamma(\nu+\mu)}\left[Q^{\mu-1}_{\nu}(x)\,Q^{\mu}_{\nu}(y)-Q^{\mu}_{\nu}(x)\,Q^{\mu-1}_{\nu}(y)\right],\tag{12.96}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{\Gamma(\nu+k-\mu+1)}{\Gamma(\nu+k+\mu+1)}\left\{\left[\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}Q^{\mu+1}_{\nu+k-1}(x)\,Q^{\mu}_{\nu+k}(y)-\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}Q^{\mu+1}_{\nu+k-1}(x)\,Q^{\mu+1}_{\nu+k-1}(x)\right]\right.$$
$$\left.-\left[\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}Q^{\mu+1}_{\nu+k+1}(x)\,Q^{\mu}_{\nu+k}(y)-\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}Q^{\mu+1}_{\nu+k-1}(x)\,Q^{\mu+1}_{\nu+k+1}(x)\right]\right\}$$
$$=\frac{\Gamma(\nu+n-\mu+2)}{\Gamma(\nu+n+\mu+1)}\left[Q^{\mu}_{\nu+n+1}(x)\,Q^{\mu}_{\nu+n}(y)-Q^{\mu}_{\nu+n}(x)\,Q^{\mu}_{\nu+n+1}(x)\right]$$
$$-\frac{\Gamma(\nu-\mu+1)}{\Gamma(\nu+\mu)}\left[Q^{\mu}_{\nu}(x)\,Q^{\mu}_{\nu-1}(y)-Q^{\mu}_{\nu-1}(x)\,Q^{\mu}_{\nu}(x)\right],\tag{12.97}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left\{(\nu+k-\mu+1)\left[\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,Q^{\mu+1}_{\nu+k}(x)\,Q^{\mu}_{\nu+k+1}(y)-\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\,Q^{\mu}_{\nu+k+1}(x)\,Q^{\mu+1}_{\nu+k}(y)\right]\right.$$
$$\left.+(\nu+k+\mu)\left[\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,Q^{\mu+1}_{\nu+k}(x)\,Q^{\mu}_{\nu+k-1}(y)-\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\,Q^{\mu}_{\nu+k-1}(x)\,Q^{\mu+1}_{\nu+k}(y)\right]\right\}$$

$$= (-1)^n \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} \left[\mathrm{Q}_{\nu+n+1}^{\mu+1}(x)\, \mathrm{Q}_{\nu+n}^{\mu+1}(y) - \mathrm{Q}_{\nu+n}^{\mu+1}(x)\, \mathrm{Q}_{\nu+n+1}^{\mu+1}(y) \right]$$
$$+ \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} \left[\mathrm{Q}_{\nu}^{\mu+1}(x)\, \mathrm{Q}_{\nu-1}^{\mu+1}(y) - \mathrm{Q}_{\nu-1}^{\mu+1}(x)\, \mathrm{Q}_{\nu}^{\mu+1}(y) \right], \tag{12.98}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \left\{ \frac{\Gamma(\nu+k-\mu+2)}{\Gamma(\nu+k+\mu+2)} \left[\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{Q}_{\nu+k+1}^{\mu}(x)\, \mathrm{Q}_{\nu+k}^{\mu+1}(y) - \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} \mathrm{Q}_{\nu+k}^{\mu+1}(x)\, \mathrm{Q}_{\nu+k+1}^{\mu}(y) \right] \right.$$
$$\left. - \frac{\Gamma(\nu+k-\mu)}{\Gamma(\nu+k+\mu)} \left[\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{Q}_{\nu+k-1}^{\mu}(x)\, \mathrm{Q}_{\nu+k}^{\mu+1}(y) - \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} \mathrm{Q}_{\nu+k}^{\mu+1}(x)\, \mathrm{Q}_{\nu+k-1}^{\mu}(y) \right] \right\}$$
$$= \frac{\Gamma(\nu+n-\mu+1)}{\Gamma(\nu+n+\mu+2)} \left[\mathrm{Q}_{\nu+n+1}^{\mu+1}(x)\, \mathrm{Q}_{\nu+n}^{\mu+1}(y) - \mathrm{Q}_{\nu+n}^{\mu+1}(x)\, \mathrm{Q}_{\nu+n+1}^{\mu+1}(y) \right]$$
$$- \frac{\Gamma(\nu-\mu)}{\Gamma(\nu+\mu+1)} \left[\mathrm{Q}_{\nu}^{\mu+1}(x)\, \mathrm{Q}_{\nu-1}^{\mu+1}(y) - \mathrm{Q}_{\nu-1}^{\mu+1}(x)\, \mathrm{Q}_{\nu}^{\mu+1}(y) \right], \tag{12.99}$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left[\frac{\Gamma(\nu+k-\mu+1)}{\Gamma(\nu+k+\mu+1)} \right]^2$$
$$\times \left\{ \frac{1}{\nu+k+\mu+1} \left[\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{Q}_{\nu+k}^{\mu}(x)\, \mathrm{Q}_{\nu+k+1}^{\mu+1}(y) - \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} \mathrm{Q}_{\nu+k+1}^{\mu+1}(x)\, \mathrm{Q}_{\nu+k}^{\mu}(y) \right] \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\nu+k-\mu} \left[\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{Q}_{\nu+k}^{\mu}(x)\, \mathrm{Q}_{\nu+k-1}^{\mu+1}(y) - \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} \mathrm{Q}_{\nu+k-1}^{\mu+1}(x)\, \mathrm{Q}_{\nu+k}^{\mu}(y) \right] \right\}$$
$$= (-1)^n \frac{\nu+n-\mu+1}{\nu+n+\mu+1} \left[\frac{\Gamma(\nu+n-\mu+1)}{\Gamma(\nu+n+\mu+1)} \right]^2$$
$$\times \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} \left[\mathrm{Q}_{\nu+n}^{\mu}(x)\, \mathrm{Q}_{\nu+n+1}^{\mu}(y) - \mathrm{Q}_{\nu+n+1}^{\mu}(x)\, \mathrm{Q}_{\nu+n}^{\mu}(y) \right]$$
$$+ \frac{\nu-\mu}{\nu+\mu} \left[\frac{\Gamma(\nu-\mu)}{\Gamma(\nu+\mu)} \right]^2 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} \left[\mathrm{Q}_{\nu-1}^{\mu}(x)\, \mathrm{Q}_{\nu}^{\mu}(y) - \mathrm{Q}_{\nu}^{\mu}(x)\, \mathrm{Q}_{\nu-1}^{\mu}(y) \right]. \tag{12.100}$$

与此同时，还应当有混合型求和公式：

$$\sum_{k=0}^{n} (2\nu+2k+1) \frac{\Gamma(\nu+k-\mu+1)}{\Gamma(\nu+k+\mu+1)} \mathrm{P}_{\nu+k}^{\mu}(x)\, \mathrm{Q}_{\nu+k}^{\mu}(y)$$
$$= \frac{\Gamma(\nu+n-\mu+2)}{\Gamma(\nu+n+\mu+1)} \frac{\mathrm{P}_{\nu+n+1}^{\mu}(x)\, \mathrm{Q}_{\nu+n}^{\mu}(y) - \mathrm{P}_{\nu+n}^{\mu}(x)\, \mathrm{Q}_{\nu+n+1}^{\mu}(y)}{x-y}$$
$$- \frac{\Gamma(\nu-\mu+1)}{\Gamma(\nu+\mu)} \frac{\mathrm{P}_{\nu}^{\mu}(x)\, \mathrm{Q}_{\nu-1}^{\mu}(y) - \mathrm{P}_{\nu-1}^{\mu}(x)\, \mathrm{Q}_{\nu}^{\mu}(y)}{x-y}, \tag{12.101}$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k (2\nu+2k+1) \left[\sqrt{1-x^2}\, \mathrm{P}_{\nu+k}^{\mu-1}(x)\, \mathrm{Q}_{\nu+k}^{\mu}(y) - \sqrt{1-y^2}\, \mathrm{P}_{\nu+k}^{\mu}(x)\, \mathrm{Q}_{\nu+k}^{\mu-1}(y) \right]$$
$$= (-1)^{n+1} \left[\mathrm{P}_{\nu+n+1}^{\mu}(x)\, \mathrm{Q}_{\nu+n}^{\mu}(y) - \mathrm{P}_{\nu+n}^{\mu}(x)\, \mathrm{Q}_{\nu+n+1}^{\mu}(y) \right]$$

$$-\left[\mathrm{P}_\nu^\mu(x)\,\mathrm{Q}_{\nu-1}^\mu(y)-\mathrm{P}_{\nu-1}^\mu(x)\,\mathrm{Q}_\nu^\mu(y)\right], \tag{12.102}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{2\nu+2k+1}{(\nu+k)(\nu+k+1)}\,\frac{\Gamma(\nu+k-\mu+1)}{\Gamma(\nu+k+\mu+1)}\\&\quad\times\left[\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{dP}_{\nu+k}^\mu(x)}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{Q}_{\nu+k}^\mu(y)-\left(1-y^2\right)\mathrm{P}_{\nu+k}^\mu(x)\,\frac{\mathrm{dQ}_{\nu+k}^\mu(y)}{\mathrm{d}y}\right]\\&=\frac{(-1)^{n+1}}{\nu+n+1}\,\frac{\Gamma(\nu+n-\mu+2)}{\Gamma(\nu+n+\mu+1)}\left[\mathrm{P}_{\nu+n+1}^\mu(x)\,\mathrm{Q}_{\nu+n}^\mu(y)-\mathrm{P}_{\nu+n}^\mu(x)\,\mathrm{Q}_{\nu+n+1}^\mu(y)\right]\\&\quad-\frac{1}{\nu}\,\frac{\Gamma(\nu-\mu+1)}{\Gamma(\nu+\mu)}\left[\mathrm{P}_\nu^\mu(x)\,\mathrm{Q}_{\nu-1}^\mu(y)-\mathrm{P}_{\nu-1}^\mu(x)\,\mathrm{Q}_\nu^\mu(y)\right],\end{aligned} \tag{12.103}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{2\nu+2k+1}{(\nu+k-\mu)(\nu+k+\mu+1)}\left[\frac{\Gamma(\nu+k-\mu+1)}{\Gamma(\nu+k+\mu+1)}\right]^2\\&\quad\times\left[\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{P}_{\nu+k}^{\mu+1}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu+k}^\mu(y)-\sqrt{1-y^2}\,\mathrm{P}_{\nu+k}^\mu(x)\,\mathrm{Q}_{\nu+k}^{\mu+1}(y)\right]\\&=(-1)^n\frac{\nu+n-\mu+1}{\nu+n+\mu+1}\left[\frac{\Gamma(\nu+n-\mu+1)}{\Gamma(\nu+n+\mu+1)}\right]^2\\&\quad\times\left[\mathrm{P}_{\nu+n+1}^\mu(x)\,\mathrm{Q}_{\nu+n}^\mu(y)-\mathrm{P}_{\nu+n}^\mu(x)\,\mathrm{Q}_{\nu+n+1}^\mu(y)\right]\\&\quad+\frac{\nu-\mu}{\nu+\mu}\left[\frac{\Gamma(\nu-\mu)}{\Gamma(\nu+\mu)}\right]^2\left[\mathrm{P}_\nu^\mu(x)\,\mathrm{Q}_{\nu-1}^\mu(y)-\mathrm{P}_{\nu-1}^\mu(x)\,\mathrm{Q}_\nu^\mu(y)\right],\end{aligned} \tag{12.104}$$

$$\begin{aligned}&2\left[\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\right]\sum_{k=0}^{n}(\mu+k)\frac{\Gamma(\nu-\mu-k+1)}{\Gamma(\nu+\mu+k+1)}\mathrm{P}_\nu^{\mu+k}(x)\,\mathrm{Q}_\nu^{\mu+k}(y)\\&=\frac{\Gamma(\nu-\mu-n+1)}{\Gamma(\nu+\mu+n+1)}\left[\mathrm{P}_\nu^{\mu+n}(x)\,\mathrm{Q}_\nu^{\mu+n+1}(y)-\mathrm{P}_\nu^{\mu+n+1}(x)\,\mathrm{Q}_\nu^{\mu+n}(y)\right]\\&\quad-\frac{\Gamma(\nu-\mu+2)}{\Gamma(\nu+\mu)}\left[\mathrm{P}_\nu^{\mu-1}(x)\,\mathrm{Q}_\nu^\mu(y)-\mathrm{P}_\nu^\mu(x)\,\mathrm{Q}_\nu^{\mu-1}(y)\right],\end{aligned} \tag{12.105}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n}\frac{\Gamma(\nu+k-\mu+1)}{\Gamma(\nu+k+\mu+1)}\left\{\left[\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{P}_{\nu+k-1}^{\mu+1}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu+k}^\mu(y)-\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{P}_{\nu+k}^\mu(x)\,\mathrm{Q}_{\nu+k-1}^{\mu+1}(y)\right]\right.\\&\quad\left.-\left[\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{P}_{\nu+k+1}^{\mu+1}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu+k}^\mu(y)-\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{P}_{\nu+k}^\mu(x)\,\mathrm{Q}_{\nu+k+1}^{\mu+1}(y)\right]\right\}\\&=\frac{\Gamma(\nu+n-\mu+2)}{\Gamma(\nu+n+\mu+1)}\left[\mathrm{P}_{\nu+n+1}^\mu(x)\,\mathrm{Q}_{\nu+n}^\mu(y)-\mathrm{P}_{\nu+n}^\mu(x)\,\mathrm{P}_{\nu+n+1}^\mu(x)\right]\\&\quad-\frac{\Gamma(\nu-\mu+1)}{\Gamma(\nu+\mu)}\left[\mathrm{P}_\nu^\mu(x)\,\mathrm{Q}_{\nu-1}^\mu(y)-\mathrm{P}_{\nu-1}^\mu(x)\,\mathrm{P}_\nu^\mu(x)\right],\end{aligned} \tag{12.106}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\bigg\{(\nu+k-\mu+1)\\
&\qquad\times\left[\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{P}_{\nu+k}^{\mu+1}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu+k+1}^{\mu}(y)-\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{P}_{\nu+k+1}^{\mu}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu+k}^{\mu+1}(y)\right]\\
&\qquad+(\nu+k+\mu)\left[\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{P}_{\nu+k}^{\mu+1}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu+k-1}^{\mu}(y)-\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{P}_{\nu+k-1}^{\mu}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu+k}^{\mu+1}(y)\right]\bigg\}\\
&\quad=(-1)^n\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\left[\mathrm{P}_{\nu+n+1}^{\mu+1}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu+n}^{\mu+1}(y)-\mathrm{P}_{\nu+n}^{\mu+1}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu+n+1}^{\mu+1}(y)\right]\\
&\qquad+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\left[\mathrm{P}_{\nu}^{\mu+1}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu-1}^{\mu+1}(y)-\mathrm{P}_{\nu-1}^{\mu+1}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu}^{\mu+1}(y)\right],
\end{aligned}\tag{12.107}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n}\bigg\{\frac{\Gamma(\nu+k-\mu+2)}{\Gamma(\nu+k+\mu+2)}\left[\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{P}_{\nu+k+1}^{\mu}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu+k}^{\mu+1}(y)-\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{P}_{\nu+k}^{\mu+1}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu+k+1}^{\mu}(y)\right]\\
&\qquad-\frac{\Gamma(\nu+k-\mu)}{\Gamma(\nu+k+\mu)}\\
&\qquad\times\left[\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{P}_{\nu+k-1}^{\mu}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu+k}^{\mu+1}(y)-\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{P}_{\nu+k}^{\mu+1}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu+k-1}^{\mu}(y)\right]\bigg\}\\
&\quad=\frac{\Gamma(\nu+n-\mu+1)}{\Gamma(\nu+n+\mu+2)}\left[\mathrm{P}_{\nu+n+1}^{\mu+1}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu+n}^{\mu+1}(y)-\mathrm{P}_{\nu+n}^{\mu+1}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu+n+1}^{\mu+1}(y)\right]\\
&\qquad-\frac{\Gamma(\nu-\mu)}{\Gamma(\nu+\mu+1)}\left[\mathrm{P}_{\nu}^{\mu+1}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu-1}^{\mu+1}(y)-\mathrm{P}_{\nu-1}^{\mu+1}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu}^{\mu+1}(y)\right],
\end{aligned}\tag{12.108}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left[\frac{\Gamma(\nu+k-\mu+1)}{\Gamma(\nu+k+\mu+1)}\right]^2\\
&\qquad\times\bigg\{\frac{1}{\nu+k+\mu+1}\left[\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{P}_{\nu+k}^{\mu}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu+k+1}^{\mu+1}(y)-\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{P}_{\nu+k+1}^{\mu+1}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu+k}^{\mu}(y)\right]\\
&\qquad+\frac{1}{\nu+k-\mu}\left[\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{P}_{\nu+k}^{\mu}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu+k-1}^{\mu+1}(y)-\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{P}_{\nu+k-1}^{\mu+1}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu+k}^{\mu}(y)\right]\bigg\}\\
&\quad=\frac{\nu-\mu}{\nu+\mu}\left[\frac{\Gamma(\nu-\mu)}{\Gamma(\nu+\mu)}\right]^2\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\left[\mathrm{P}_{\nu-1}^{\mu}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu}^{\mu}(y)-\mathrm{P}_{\nu}^{\mu}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu-1}^{\mu}(y)\right]\\
&\qquad+(-1)^n\frac{\nu+n-\mu+1}{\nu+n+\mu+1}\left[\frac{\Gamma(\nu+n-\mu+1)}{\Gamma(\nu+n+\mu+1)}\right]^2\\
&\qquad\times\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\left[\mathrm{P}_{\nu+n}^{\mu}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu+n+1}^{\mu}(y)-\mathrm{P}_{\nu+n+1}^{\mu}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu+n}^{\mu}(y)\right].
\end{aligned}\tag{12.109}$$

以上共得到了 27 个求和公式，即 (12.81) — (12.85)，(12.87) — (12.89) 及 (12.91) — (12.109) 等和式．也还可以讨论它们在 $y\to x$ 之下的极限形式，但一般难以化为比较简单的公式，故从略．

此外，对应于 (12.50) 等公式的求和形式，对于连带 Legendre 函数 $\mathrm{P}_{\nu}^{\mu}(x)$ 与

$\mathrm{Q}_\nu^\mu(x)$，也有相应的一系列求和公式. 例如，将 (12.72′) 式两端同乘以 $(-1)^k\mathrm{P}_{\nu+k}^\mu(x)$，并对 k 求和，即得

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(2\nu+2k+1)\frac{\Gamma(\nu+k-\mu+1)}{\Gamma(\nu+k+\mu+1)}\left[\mathrm{P}_{\nu+k}^\mu(x)\right]^2$$
$$=(-1)^n\frac{\Gamma(\nu+n-\mu+2)}{\Gamma(\nu+n+\mu+1)}\frac{\mathrm{P}_{\nu+n+1}^\mu(x)\,\mathrm{P}_{\nu+n}^\mu(x)}{x}+\frac{\Gamma(\nu-\mu+1)}{\Gamma(\nu+\mu)}\frac{\mathrm{P}_\nu^\mu(x)\,\mathrm{P}_{\nu-1}^\mu(x)}{x}. \tag{12.110}$$

类似地，也可以得到

$$\sqrt{1-x^2}\sum_{k=0}^{n}(2\nu+2k+1)\,\mathrm{P}_{\nu+k}^\mu(x)\,\mathrm{P}_{\nu+k}^{\mu-1}(x)$$
$$=-\mathrm{P}_{\nu+k+1}^\mu(x)\,\mathrm{P}_{\nu+k}^\mu(x)+\mathrm{P}_\nu^\mu(x)\,\mathrm{P}_{\nu-1}^\mu(x), \tag{12.111}$$

$$(1-x^2)\sum_{k=0}^{n}\frac{2\nu+2k+1}{(\nu+k)(\nu+k+1)}\frac{\Gamma(\nu+k-\mu+1)}{\Gamma(\nu+k+\mu+1)}\mathrm{P}_{\nu+k}^\mu(x)\frac{\mathrm{dP}_{\nu+k}^\mu(x)}{\mathrm{d}x}$$
$$=-\frac{1}{\nu+n+1}\frac{\Gamma(\nu+n-\mu+2)}{\Gamma(\nu+n+\mu+1)}\mathrm{P}_{\nu+n+1}^\mu(x)\,\mathrm{P}_{\nu+n}^\mu(x)$$
$$+\frac{1}{\nu}\frac{\Gamma(\nu-\mu+1)}{\Gamma(\nu+\mu)}\mathrm{P}_\nu^\mu(x)\,\mathrm{P}_{\nu-1}^\mu(x), \tag{12.112}$$

$$\sqrt{1-x^2}\sum_{k=0}^{n}\frac{2\nu+2k+1}{(\nu+k-\mu)(\nu+k+\mu+1)}\left[\frac{\Gamma(\nu+k-\mu+1)}{\Gamma(\nu+k+\mu+1)}\right]^2\mathrm{P}_{\nu+k}^{\mu+1}(x)\,\mathrm{P}_{\nu+k}^\mu(x)$$
$$=\frac{\nu+n-\mu+1}{\nu+n+\mu+1}\left[\frac{\Gamma(\nu+n-\mu+1)}{\Gamma(\nu+n+\mu+1)}\right]^2\mathrm{P}_{\nu+n+1}^\mu(x)\,\mathrm{P}_{\nu+n}^\mu(x)$$
$$-\frac{\nu-\mu}{\nu+\mu}\left[\frac{\Gamma(\nu-\mu)}{\Gamma(\nu+\mu)}\right]^2\mathrm{P}_\nu^\mu(x)\,\mathrm{P}_{\nu-1}^\mu(x), \tag{12.113}$$

$$\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}(\mu+k)\frac{\Gamma(\nu-\mu-k+1)}{\Gamma(\nu+\mu+k+1)}\left[\mathrm{P}_\nu^{\mu+k}(x)\right]^2$$
$$=(-1)^n\frac{\Gamma(\nu-\mu-n+1)}{\Gamma(\nu+\mu+n+1)}\mathrm{P}_\nu^{\mu+n+1}(x)\,\mathrm{P}_\nu^{\mu+n}(x)+\frac{\Gamma(\nu-\mu+2)}{\Gamma(\nu+\mu)}\mathrm{P}_\nu^\mu(x)\,\mathrm{P}_\nu^{\mu-1}(x), \tag{12.114}$$

$$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{\Gamma(\nu+k-\mu+1)}{\Gamma(\nu+k+\mu+1)}\left[\mathrm{P}_{\nu+k-1}^{\mu+1}(x)-\mathrm{P}_{\nu+k+1}^{\mu+1}(x)\right]\mathrm{P}_{\nu+k}^\mu(x)$$
$$=(-1)^n\frac{\Gamma(\nu+n-\mu+2)}{\Gamma(\nu+n+\mu+1)}\mathrm{P}_{\nu+n+1}^\mu(x)\,\mathrm{P}_{\nu+n}^\mu(x)+\frac{\Gamma(\nu-\mu+1)}{\Gamma(\nu+\mu)}\mathrm{P}_\nu^\mu(x)\,\mathrm{P}_{\nu-1}^\mu(x), \tag{12.115}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\Big[(\nu+k-\mu+1)\,\mathrm{P}_{\nu+k+1}^{\mu}(x)+(\nu+k+\mu)\,\mathrm{P}_{\nu+k-1}^{\mu}(x)\Big]\mathrm{P}_{\nu+k}^{\mu+1}(x)$$
$$=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{P}_{\nu+n+1}^{\mu+1}(x)\,\mathrm{P}_{\nu+n}^{\mu+1}(x)+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{P}_{\nu}^{\mu+1}(x)\,\mathrm{P}_{\nu-1}^{\mu+1}(x),\tag{12.116}$$

$$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left[\frac{\Gamma(\nu+k-\mu+2)}{\Gamma(\nu+k+\mu+2)}\,\mathrm{P}_{\nu+k+1}^{\mu}(x)-\frac{\Gamma(\nu+k-\mu)}{\Gamma(\nu+k+\mu)}\,\mathrm{P}_{\nu+k-1}^{\mu}(x)\right]\mathrm{P}_{\nu+k}^{\mu+1}(x)$$
$$=(-1)^n\frac{\Gamma(\nu+n-\mu+1)}{\Gamma(\nu+n+\mu+2)}\,\mathrm{P}_{\nu+n+1}^{\mu+1}(x)\,\mathrm{P}_{\nu+n}^{\mu+1}(x)+\frac{\Gamma(\nu-\mu)}{\Gamma(\nu+\mu+1)}\,\mathrm{P}_{\nu}^{\mu+1}(x)\,\mathrm{P}_{\nu-1}^{\mu+1}(x),\tag{12.117}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{\Gamma(\nu+k-\mu+1)}{\Gamma(\nu+k+\mu+1)}\right]^2\left[\frac{1}{\nu+k+\mu+1}\,\mathrm{P}_{\nu+k+1}^{\mu+1}(x)+\frac{1}{\nu+k-\mu}\,\mathrm{P}_{\nu+k-1}^{\mu+1}(x)\right]\mathrm{P}_{\nu+k}^{\mu}(x)$$
$$=\frac{\Gamma(\nu+n-\mu+2)\;\Gamma(\nu+n-\mu+1)}{\Gamma(\nu+n+\mu+2)\;\Gamma(\nu+n+\mu+1)}\,\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{P}_{\nu+n+1}^{\mu}(x)\,\mathrm{P}_{\nu+n}^{\mu}(x)$$
$$-\frac{\Gamma(\nu-\mu+1)\;\Gamma(\nu-\mu)}{\Gamma(\nu+\mu+1)\;\Gamma(\nu+\mu)}\,\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{P}_{\nu}^{\mu}(x)\,\mathrm{P}_{\nu-1}^{\mu}(x).\tag{12.118}$$

同样因为 $\mathrm{Q}_{\nu}^{\mu}(x)$ 与 $\mathrm{P}_{\nu}^{\mu}(x)$ 有相同形式的递推关系，所以又能直接列出关于 $\mathrm{Q}_{\nu}^{\mu}(x)$ 的求和公式：

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(2\nu+2k+1)\,\frac{\Gamma(\nu+k-\mu+1)}{\Gamma(\nu+k+\mu+1)}\Big[\mathrm{Q}_{\nu+k}^{\mu}(x)\Big]^2$$
$$=(-1)^n\frac{\Gamma(\nu+n-\mu+2)}{\Gamma(\nu+n+\mu+1)}\,\frac{\mathrm{Q}_{\nu+n+1}^{\mu}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu+n}^{\mu}(x)}{x}+\frac{\Gamma(\nu-\mu+1)}{\Gamma(\nu+\mu)}\,\frac{\mathrm{Q}_{\nu}^{\mu}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu-1}^{\mu}(x)}{x},\tag{12.119}$$

$$\sqrt{1-x^2}\sum_{k=0}^{n}(2\nu+2k+1)\,\mathrm{Q}_{\nu+k}^{\mu}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu+k}^{\mu-1}(x)=-\mathrm{Q}_{\nu+k+1}^{\mu}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu+k}^{\mu}(x)+\mathrm{Q}_{\nu}^{\mu}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu-1}^{\mu}(x),\tag{12.120}$$

$$(1-x^2)\sum_{k=0}^{n}\frac{2\nu+2k+1}{(\nu+k)(\nu+k+1)}\,\frac{\Gamma(\nu+k-\mu+1)}{\Gamma(\nu+k+\mu+1)}\,\mathrm{Q}_{\nu+k}^{\mu}(x)\,\frac{\mathrm{d}\mathrm{Q}_{\nu+k}^{\mu}(x)}{\mathrm{d}x}$$
$$=-\frac{1}{\nu+n+1}\,\frac{\Gamma(\nu+n-\mu+2)}{\Gamma(\nu+n+\mu+1)}\,\mathrm{Q}_{\nu+n+1}^{\mu}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu+n}^{\mu}(x)$$
$$+\frac{1}{\nu}\,\frac{\Gamma(\nu-\mu+1)}{\Gamma(\nu+\mu)}\,\mathrm{Q}_{\nu}^{\mu}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu-1}^{\mu}(x),\tag{12.121}$$

$$\sqrt{1-x^2}\sum_{k=0}^{n}\frac{2\nu+2k+1}{(\nu+k-\mu)(\nu+k+\mu+1)}\left[\frac{\Gamma(\nu+k-\mu+1)}{\Gamma(\nu+k+\mu+1)}\right]^2\mathrm{Q}_{\nu+k}^{\mu+1}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu+k}^{\mu}(x)$$
$$=\frac{\nu+n-\mu+1}{\nu+n+\mu+1}\left[\frac{\Gamma(\nu+n-\mu+1)}{\Gamma(\nu+n+\mu+1)}\right]^2\mathrm{Q}_{\nu+n+1}^{\mu}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu+n}^{\mu}(x)$$

$$-\frac{\nu-\mu}{\nu+\mu}\left[\frac{\Gamma(\nu-\mu)}{\Gamma(\nu+\mu)}\right]^2 \mathrm{Q}_\nu^\mu(x)\,\mathrm{Q}_{\nu-1}^\mu(x), \tag{12.122}$$

$$\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}(\mu+k)\,\frac{\Gamma(\nu-\mu-k+1)}{\Gamma(\nu+\mu+k+1)}\left[\mathrm{Q}_\nu^{\mu+k}(x)\right]^2$$
$$=(-1)^n\frac{\Gamma(\nu-\mu-n+1)}{\Gamma(\nu+\mu+n+1)}\,\mathrm{Q}_\nu^{\mu+n+1}(x)\,\mathrm{Q}_\nu^{\mu+k}(x)+\frac{\Gamma(\nu-\mu+2)}{\Gamma(\nu+\mu)}\,\mathrm{Q}_\nu^\mu(x)\,\mathrm{Q}_\nu^{\mu-1}(x), \tag{12.123}$$

$$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{\Gamma(\nu+k-\mu+1)}{\Gamma(\nu+k+\mu+1)}\left[\mathrm{Q}_{\nu+k-1}^{\mu+1}(x)-\mathrm{Q}_{\nu+k+1}^{\mu+1}(x)\right]\mathrm{Q}_{\nu+k}^\mu(x)$$
$$=(-1)^n\frac{\Gamma(\nu+n-\mu+2)}{\Gamma(\nu+n+\mu+1)}\,\mathrm{Q}_{\nu+n+1}^\mu(x)\,\mathrm{Q}_{\nu+n}^\mu(x)+\frac{\Gamma(\nu-\mu+1)}{\Gamma(\nu+\mu)}\,\mathrm{Q}_\nu^\mu(x)\,\mathrm{Q}_{\nu-1}^\mu(x), \tag{12.124}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\left[(\nu+k-\mu+1)\,\mathrm{Q}_{\nu+k+1}^\mu(x)+(\nu+k+\mu)\,\mathrm{Q}_{\nu+k-1}^\mu(x)\right]\mathrm{Q}_{\nu+k}^{\mu+1}(x)$$
$$=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{Q}_{\nu+n+1}^{\mu+1}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu+n}^{\mu+1}(x)+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{Q}_\nu^{\mu+1}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu-1}^{\mu+1}(x), \tag{12.125}$$

$$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left[\frac{\Gamma(\nu+k-\mu+2)}{\Gamma(\nu+k+\mu+2)}\,\mathrm{Q}_{\nu+k+1}^\mu(x)-\frac{\Gamma(\nu+k-\mu)}{\Gamma(\nu+k+\mu)}\,\mathrm{Q}_{\nu+k-1}^\mu(x)\right]\mathrm{Q}_{\nu+k}^{\mu+1}(x)$$
$$=(-1)^n\frac{\Gamma(\nu+n-\mu+1)}{\Gamma(\nu+n+\mu+2)}\,\mathrm{Q}_{\nu+n+1}^{\mu+1}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu+n}^{\mu+1}(x)+\frac{\Gamma(\nu-\mu)}{\Gamma(\nu+\mu+1)}\,\mathrm{Q}_\nu^{\mu+1}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu-1}^{\mu+1}(x), \tag{12.126}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{\Gamma(\nu+k-\mu+1)}{\Gamma(\nu+k+\mu+1)}\right]^2\left[\frac{1}{\nu+k+\mu+1}\,\mathrm{Q}_{\nu+k+1}^{\mu+1}(x)+\frac{1}{\nu+k-\mu}\,\mathrm{Q}_{\nu+k-1}^{\mu+1}(x)\right]\mathrm{Q}_{\nu+k}^\mu(x)$$
$$=\frac{\Gamma(\nu+n-\mu+2)\,\Gamma(\nu+n-\mu+1)}{\Gamma(\nu+n+\mu+2)\,\Gamma(\nu+n+\mu+1)}\,\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{Q}_{\nu+n+1}^\mu(x)\,\mathrm{Q}_{\nu+n}^\mu(x)$$
$$-\frac{\Gamma(\nu-\mu+1)\,\Gamma(\nu-\mu)}{\Gamma(\nu+\mu+1)\,\Gamma(\nu+\mu)}\,\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{Q}_\nu^\mu(x)\,\mathrm{Q}_{\nu-1}^\mu(x). \tag{12.127}$$

同样也能得到混合型的求和公式：

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(2\nu+2k+1)\,\frac{\Gamma(\nu+k-\mu+1)}{\Gamma(\nu+k+\mu+1)}\mathrm{P}_{\nu+k}^\mu(x)\,\mathrm{Q}_{\nu+k}^\mu(x)$$
$$=(-1)^n\frac{\Gamma(\nu+n-\mu+2)}{\Gamma(\nu+n+\mu+1)}\,\frac{\mathrm{P}_{\nu+n+1}^\mu(x)\,\mathrm{Q}_{\nu+n}^\mu(x)+\mathrm{P}_{\nu+n}^\mu(x)\,\mathrm{Q}_{\nu+n+1}^\mu(x)}{2x}$$
$$+\frac{\Gamma(\nu-\mu+1)}{\Gamma(\nu+\mu)}\,\frac{\mathrm{P}_\nu^\mu(x)\,\mathrm{Q}_{\nu-1}^\mu(x)+\mathrm{P}_{\nu-1}^\mu(x)\,\mathrm{Q}_\nu^\mu(x)}{2x}, \tag{12.128}$$

$$\sqrt{1-x^2}\sum_{k=0}^{n}(2\nu+2k+1)\Big[\mathrm{P}_{\nu+k}^{\mu}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu+k}^{\mu-1}(x)+\mathrm{P}_{\nu+k}^{\mu-1}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu+k}^{\mu}(x)\Big]$$
$$=-\Big[\mathrm{P}_{\nu+n+1}^{\mu}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu+n}^{\mu}(x)+\mathrm{P}_{\nu+n}^{\mu}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu+n+1}^{\mu}(x)\Big]$$
$$+\Big[\mathrm{P}_{\nu}^{\mu}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu-1}^{\mu}(x)+\mathrm{P}_{\nu-1}^{\mu}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu}^{\mu}(x)\Big], \tag{12.129}$$

$$\big(1-x^2\big)\sum_{k=0}^{n}\frac{2\nu+2k+1}{(\nu+k)(\nu+k+1)}\,\frac{\Gamma(\nu+k-\mu+1)}{\Gamma(\nu+k+\mu+1)}$$
$$\times\left[\mathrm{P}_{\nu+k}^{\mu}(x)\,\frac{\mathrm{d}\mathrm{Q}_{\nu+k}^{\mu}(x)}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}\mathrm{P}_{\nu+k}^{\mu}(x)}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{Q}_{\nu+k}^{\mu}(x)\right]$$
$$=-\frac{1}{\nu+n+1}\,\frac{\Gamma(\nu+n-\mu+2)}{\Gamma(\nu+n+\mu+1)}\Big[\mathrm{P}_{\nu+n+1}^{\mu}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu+n}^{\mu}(x)+\mathrm{P}_{\nu+n}^{\mu}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu+n+1}^{\mu}(x)\Big]$$
$$+\frac{1}{\nu}\,\frac{\Gamma(\nu-\mu+1)}{\Gamma(\nu+\mu)}\Big[\mathrm{P}_{\nu}^{\mu}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu-1}^{\mu}(x)+\mathrm{P}_{\nu-1}^{\mu}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu}^{\mu}(x)\Big], \tag{12.130}$$

$$\sqrt{1-x^2}\sum_{k=0}^{n}\frac{2\nu+2k+1}{(\nu+k-\mu)(\nu+k+\mu+1)}\left[\frac{\Gamma(\nu+k-\mu+1)}{\Gamma(\nu+k+\mu+1)}\right]^2$$
$$\times\Big[\mathrm{P}_{\nu+k}^{\mu+1}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu+k}^{\mu}(x)+\mathrm{P}_{\nu+k}^{\mu}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu+k}^{\mu+1}(x)\Big]$$
$$=\frac{\nu+n-\mu+1}{\nu+n+\mu+1}\left[\frac{\Gamma(\nu+n-\mu+1)}{\Gamma(\nu+n+\mu+1)}\right]^2$$
$$\times\Big[\mathrm{P}_{\nu+n+1}^{\mu}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu+n}^{\mu}(x)+\mathrm{P}_{\nu+n}^{\mu}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu+n+1}^{\mu}(x)\Big]$$
$$-\frac{\nu-\mu}{\nu+\mu}\left[\frac{\Gamma(\nu-\mu)}{\Gamma(\nu+\mu)}\right]^2\Big[\mathrm{P}_{\nu}^{\mu}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu-1}^{\mu}(x)+\mathrm{P}_{\nu-1}^{\mu}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu}^{\mu}(x)\Big], \tag{12.131}$$

$$\frac{4x}{\sqrt{1-x^2}}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}(\mu+k)\,\frac{\Gamma(\nu-\mu-k+1)}{\Gamma(\nu+\mu+k+1)}\,\mathrm{P}_{\nu}^{\mu+k}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu}^{\mu+k}(x)$$
$$=(-1)^n\frac{\Gamma(\nu-\mu-n+1)}{\Gamma(\nu+\mu+n+1)}\Big[\mathrm{P}_{\nu}^{\mu+n+1}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu}^{\mu+n}(x)+\mathrm{P}_{\nu}^{\mu+n}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu}^{\mu+n+1}(x)\Big]$$
$$+\frac{\Gamma(\nu-\mu+2)}{\Gamma(\nu+\mu)}\Big[\mathrm{P}_{\nu}^{\mu}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu}^{\mu-1}(x)+\mathrm{P}_{\nu}^{\mu-1}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu}^{\mu}(x)\Big], \tag{12.132}$$

$$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{\Gamma(\nu+k-\mu+1)}{\Gamma(\nu+k+\mu+1)}\Big\{\Big[\mathrm{P}_{\nu+k-1}^{\mu+1}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu+k}^{\mu}(x)+\mathrm{P}_{\nu+k}^{\mu}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu+k-1}^{\mu+1}(x)\Big]$$
$$-\Big[\mathrm{P}_{\nu+k+1}^{\mu+1}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu+k}^{\mu}(x)+\mathrm{P}_{\nu+k}^{\mu}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu+k+1}^{\mu+1}(x)\Big]\Big\}$$
$$=(-1)^n\frac{\Gamma(\nu+n-\mu+2)}{\Gamma(\nu+n+\mu+1)}\Big[\mathrm{P}_{\nu+n+1}^{\mu}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu+n}^{\mu}(x)+\mathrm{P}_{\nu+n}^{\mu}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu+n+1}^{\mu}(x)\Big]$$
$$+\frac{\Gamma(\nu-\mu+1)}{\Gamma(\nu+\mu)}\Big[\mathrm{P}_{\nu}^{\mu}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu-1}^{\mu}(x)+\mathrm{P}_{\nu-1}^{\mu}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu}^{\mu}(x)\Big], \tag{12.133}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\Big\{(\nu+k-\mu+1)\Big[\mathrm{P}_{\nu+k+1}^{\mu}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu+k}^{\mu+1}(x)+\mathrm{P}_{\nu+k}^{\mu+1}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu+k+1}^{\mu}(x)\Big]$$
$$+(\nu+k+\mu+1)\Big[\mathrm{P}_{\nu+k-1}^{\mu}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu+k}^{\mu+1}(x)+\mathrm{P}_{\nu+k}^{\mu+1}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu+k-1}^{\mu}(x)\Big]\Big\}$$
$$=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\Big[\mathrm{P}_{\nu+n+1}^{\mu+1}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu+n}^{\mu+1}(x)+\mathrm{P}_{\nu+n}^{\mu+1}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu+n+1}^{\mu+1}(x)\Big]$$
$$+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\Big[\mathrm{P}_{\nu}^{\mu}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu-1}^{\mu}(x)+\mathrm{P}_{\nu-1}^{\mu}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu}^{\mu}(x)\Big], \tag{12.134}$$

$$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\Big\{\frac{\Gamma(\nu+k-\mu+2)}{\Gamma(\nu+k+\mu+2)}\Big[\mathrm{P}_{\nu+k+1}^{\mu}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu+k}^{\mu+1}(x)+\mathrm{P}_{\nu+k}^{\mu+1}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu+k+1}^{\mu}(x)\Big]$$
$$-\frac{\Gamma(\nu+k-\mu)}{\Gamma(\nu+k+\mu)}\Big[\mathrm{P}_{\nu+k-1}^{\mu}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu+k}^{\mu+1}(x)+\mathrm{P}_{\nu+k}^{\mu+1}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu+k-1}^{\mu}(x)\Big]\Big\}$$
$$=(-1)^n\frac{\Gamma(\nu+n-\mu+1)}{\Gamma(\nu+n+\mu+2)}\Big[\mathrm{P}_{\nu+n+1}^{\mu+1}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu+n}^{\mu+1}(x)+\mathrm{P}_{\nu+n}^{\mu+1}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu+n+1}^{\mu+1}(x)\Big]$$
$$+\frac{\Gamma(\nu-\mu)}{\Gamma(\nu+\mu+1)}\Big[\mathrm{P}_{\nu}^{\mu+1}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu-1}^{\mu+1}(x)+\mathrm{P}_{\nu-1}^{\mu+1}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu}^{\mu+1}(x)\Big], \tag{12.135}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{\Gamma(\nu+k-\mu+1)}{\Gamma(\nu+k+\mu+1)}\right]^2\Big\{\frac{1}{\nu+k+\mu+1}\Big[\mathrm{P}_{\nu+k+1}^{\mu+1}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu+k}^{\mu}(x)+\mathrm{P}_{\nu+k}^{\mu}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu+k+1}^{\mu+1}(x)\Big]$$
$$+\frac{1}{\nu+k-\mu}\Big[\mathrm{P}_{\nu+k-1}^{\mu+1}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu+k}^{\mu}(x)+\mathrm{P}_{\nu+k}^{\mu}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu+k-1}^{\mu+1}(x)\Big]\Big\}$$
$$=\frac{\Gamma(\nu+n-\mu+2)\;\Gamma(\nu+n-\mu+1)}{\Gamma(\nu+n+\mu+2)\;\Gamma(\nu+n+\mu+1)}\,\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$\times\Big[\mathrm{P}_{\nu+n+1}^{\mu}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu+n}^{\mu}(x)+\mathrm{P}_{\nu+n}^{\mu}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu+n+1}^{\mu}(x)\Big]$$
$$-\frac{\Gamma(\nu-\mu+1)\;\Gamma(\nu-\mu)}{\Gamma(\nu+\mu+1)\;\Gamma(\nu+\mu)}\,\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\Big[\mathrm{P}_{\nu}^{\mu}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu-1}^{\mu}(x)+\mathrm{P}_{\nu-1}^{\mu}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu}^{\mu}(x)\Big]. \tag{12.136}$$

其实，在得到求和公式 (12.128) — (12.136) 的同时，我们还应当可以得到另外几个公式. 例如，为了导出 (12.128) 式，我们需要将递推关系 (12.72′) 两端同乘以 $(-1)^k\mathrm{Q}_{\nu+k}^{\mu}(x)$，同时将 $\mathrm{Q}_{\nu+k}^{\mu}(x)$ 满足的相应递推关系

$$(2\nu+2k+1)\frac{\Gamma(\nu+k-\mu+1)}{\Gamma(\nu+k+\mu+1)}\,x\,\mathrm{Q}_{\nu+k}^{\mu}(x)$$
$$=\frac{\Gamma(\nu+k-\mu+2)}{\Gamma(\nu+k+\mu+1)}\,\mathrm{Q}_{\nu+k+1}^{\mu}(x)+\frac{\Gamma(\nu+k-\mu+1)}{\Gamma(\nu+k+\mu)}\,\mathrm{Q}_{\nu+k-1}^{\mu}(x) \tag{12.72''}$$

两端同乘以 $(-1)^k\mathrm{P}_{\nu+k}^{\mu}(x)$，而后两式相加再求和即可. 但是，也可以只将 (12.72′) 与 (12.72″) 两式分别乘以 $\mathrm{Q}_{\nu+k}^{\mu}(x)$ 与 $\mathrm{P}_{\nu+k}^{\mu}(x)$，而后相减，则有

$$\begin{aligned}&\frac{\Gamma(\nu+k-\mu+2)}{\Gamma(\nu+k+\mu+1)}\Big[\mathrm{P}_{\nu+k+1}^{\mu}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu+k}^{\mu}(x)-\mathrm{P}_{\nu+k}^{\mu}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu+k+1}^{\mu}(x)\Big]\\&\qquad=\frac{\Gamma(\nu+k-\mu+1)}{\Gamma(\nu+k+\mu)}\Big[\mathrm{P}_{\nu+k}^{\mu}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu+k-1}^{\mu}(x)-\mathrm{P}_{\nu+k-1}^{\mu}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu+k}^{\mu}(x)\Big].\end{aligned}$$

甚至可以将 $\nu+k$ 改写为 ν，则上式变为

$$\begin{aligned}&\frac{\Gamma(\nu-\mu+2)}{\Gamma(\nu+\mu+1)}\Big[\mathrm{P}_{\nu+1}^{\mu}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu}^{\mu}(x)-\mathrm{P}_{\nu}^{\mu}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu+1}^{\mu}(x)\Big]\\&\qquad=\frac{\Gamma(\nu-\mu+1)}{\Gamma(\nu+\mu)}\Big[\mathrm{P}_{\nu}^{\mu}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu-1}^{\mu}(x)-\mathrm{P}_{\nu-1}^{\mu}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu}^{\mu}(x)\Big].\end{aligned}\tag{12.137}$$

类似地还有下列 (然而事实上并不独立的) 关系式:

$$\begin{aligned}&(2\nu+1)\sqrt{1-x^2}\Big[\mathrm{P}_{\nu}^{\mu}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu}^{\mu-1}(x)-\mathrm{P}_{\nu}^{\mu-1}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu}^{\mu}(x)\Big]\\&\quad=\Big[\mathrm{P}_{\nu+1}^{\mu}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu}^{\mu}(x)-\mathrm{P}_{\nu}^{\mu}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu+1}^{\mu}(x)\Big]+\Big[\mathrm{P}_{\nu}^{\mu}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu-1}^{\mu}(x)-\mathrm{P}_{\nu-1}^{\mu}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu}^{\mu}(x)\Big],\end{aligned}\tag{12.138}$$

$$\begin{aligned}&\frac{2\nu+1}{\nu(\nu+1)}\frac{\Gamma(\nu-\mu+1)}{\Gamma(\nu+\mu+1)}(1-x^2)\Big[\mathrm{P}_{\nu}^{\mu}(x)\frac{\mathrm{d}\mathrm{Q}_{\nu}^{\mu}(x)}{\mathrm{d}x}-\frac{\mathrm{d}\mathrm{P}_{\nu}^{\mu}(x)}{\mathrm{d}x}\mathrm{Q}_{\nu}^{\mu}(x)\Big]\\&\quad=\frac{1}{\nu+1}\frac{\Gamma(\nu-\mu+2)}{\Gamma(\nu+\mu+1)}\Big[\mathrm{P}_{\nu+1}^{\mu}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu}^{\mu}(x)-\mathrm{P}_{\nu}^{\mu}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu+1}^{\mu}(x)\Big]\\&\qquad+\frac{1}{\nu}\frac{\Gamma(\nu-\mu+1)}{\Gamma(\nu+\mu)}\Big[\mathrm{P}_{\nu}^{\mu}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu-1}^{\mu}(x)-\mathrm{P}_{\nu-1}^{\mu}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu}^{\mu}(x)\Big],\end{aligned}\tag{12.139}$$

$$\begin{aligned}&\frac{2\nu+1}{(\nu-\mu)(\nu+\mu+1)}\left[\frac{\Gamma(\nu-\mu+1)}{\Gamma(\nu+\mu+1)}\right]^2\sqrt{1-x^2}\Big[\mathrm{P}_{\nu}^{\mu+1}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu}^{\mu}(x)-\mathrm{P}_{\nu}^{\mu}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu}^{\mu+1}(x)\Big]\\&\quad=\frac{\nu-\mu+1}{\nu+\mu+1}\left[\frac{\Gamma(\nu-\mu+1)}{\Gamma(\nu+\mu+1)}\right]^2\Big[\mathrm{P}_{\nu+1}^{\mu}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu}^{\mu}(x)-\mathrm{P}_{\nu}^{\mu}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu+1}^{\mu}(x)\Big]\\&\qquad+\frac{\nu-\mu}{\nu+\mu}\left[\frac{\Gamma(\nu-\mu)}{\Gamma(\nu+\mu)}\right]^2\Big[\mathrm{P}_{\nu}^{\mu}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu-1}^{\mu}(x)-\mathrm{P}_{\nu-1}^{\mu}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu}^{\mu}(x)\Big],\end{aligned}\tag{12.140}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\Gamma(\nu-\mu+1)}{\Gamma(\nu+\mu+1)}\Big[\mathrm{P}_{\nu}^{\mu+1}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu}^{\mu}(x)-\mathrm{P}_{\nu}^{\mu}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu}^{\mu+1}(x)\Big]\\&\quad=\frac{\Gamma(\nu-\mu+2)}{\Gamma(\nu+\mu)}\Big[\mathrm{P}_{\nu}^{\mu}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu}^{\mu-1}(x)-\mathrm{P}_{\nu}^{\mu-1}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu}^{\mu}(x)\Big],\end{aligned}\tag{12.141}$$

$$\begin{aligned}&\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\frac{\Gamma(\nu-\mu+1)}{\Gamma(\nu+\mu+1)}\Big\{\Big[\mathrm{P}_{\nu-1}^{\mu+1}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu}^{\mu}(x)-\mathrm{P}_{\nu}^{\mu}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu-1}^{\mu+1}(x)\Big]\\&\qquad-\Big[\mathrm{P}_{\nu+1}^{\mu+1}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu}^{\mu}(x)-\mathrm{P}_{\nu}^{\mu}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu+1}^{\mu+1}(x)\Big]\Big\}\\&\quad=\frac{\Gamma(\nu-\mu+2)}{\Gamma(\nu+\mu+1)}\Big[\mathrm{P}_{\nu+1}^{\mu}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu}^{\mu}(x)-\mathrm{P}_{\nu}^{\mu}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu+1}^{\mu}(x)\Big]\\&\qquad-\frac{\Gamma(\nu-\mu+1)}{\Gamma(\nu+\mu)}\Big[\mathrm{P}_{\nu}^{\mu}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu-1}^{\mu}(x)-\mathrm{P}_{\nu-1}^{\mu}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu}^{\mu}(x)\Big],\end{aligned}\tag{12.142}$$

$$\begin{aligned}(\nu-\mu+1)&\left[\mathrm{P}_{\nu+1}^{\mu}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu}^{\mu+1}(x)-\mathrm{P}_{\nu}^{\mu+1}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu+1}^{\mu}(x)\right]\\&+(\nu+\mu)\left[\mathrm{P}_{\nu-1}^{\mu}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu}^{\mu+1}(x)-\mathrm{P}_{\nu}^{\mu+1}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu-1}^{\mu}(x)\right]\\&=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\left[\mathrm{P}_{\nu+1}^{\mu+1}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu}^{\mu+1}(x)-\mathrm{P}_{\nu}^{\mu+1}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu+1}^{\mu+1}(x)\right]\\&\quad-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\left[\mathrm{P}_{\nu}^{\mu+1}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu-1}^{\mu+1}(x)-\mathrm{P}_{\nu-1}^{\mu+1}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu}^{\mu+1}(x)\right],\end{aligned}\tag{12.143}$$

$$\begin{aligned}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}&\left\{\frac{\Gamma(\nu-\mu+2)}{\Gamma(\nu+\mu+2)}\left[\mathrm{P}_{\nu+1}^{\mu}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu}^{\mu+1}(x)-\mathrm{P}_{\nu}^{\mu+1}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu+1}^{\mu}(x)\right]\right.\\&\left.-\frac{\Gamma(\nu-\mu)}{\Gamma(\nu+\mu)}\left[\mathrm{P}_{\nu-1}^{\mu}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu}^{\mu+1}(x)-\mathrm{P}_{\nu}^{\mu+1}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu-1}^{\mu}(x)\right]\right\}\\&=\frac{\Gamma(\nu-\mu+1)}{\Gamma(\nu+\mu+2)}\left[\mathrm{P}_{\nu+1}^{\mu+1}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu}^{\mu+1}(x)-\mathrm{P}_{\nu}^{\mu+1}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu+1}^{\mu+1}(x)\right]\\&\quad-\frac{\Gamma(\nu-\mu)}{\Gamma(\nu+\mu+1)}\left[\mathrm{P}_{\nu}^{\mu+1}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu-1}^{\mu+1}(x)-\mathrm{P}_{\nu-1}^{\mu+1}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu}^{\mu+1}(x)\right],\end{aligned}\tag{12.144}$$

$$\begin{aligned}\left[\frac{\Gamma(\nu-\mu+1)}{\Gamma(\nu+\mu+1)}\right]^2&\left\{\frac{1}{\nu+\mu+1}\left[\mathrm{P}_{\nu+1}^{\mu+1}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu}^{\mu}(x)-\mathrm{P}_{\nu}^{\mu}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu+1}^{\mu+1}(x)\right]\right.\\&\left.+\frac{1}{\nu-\mu}\left[\mathrm{P}_{\nu-1}^{\mu+1}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu}^{\mu}(x)-\mathrm{P}_{\nu}^{\mu}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu-1}^{\mu+1}(x)\right]\right\}\\&=\frac{\Gamma(\nu-\mu+2)\,\Gamma(\nu-\mu+1)}{\Gamma(\nu+\mu+2)\,\Gamma(\nu+\mu+1)}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\left[\mathrm{P}_{\nu+1}^{\mu}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu}^{\mu}(x)-\mathrm{P}_{\nu}^{\mu}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu+1}^{\mu}(x)\right]\\&\quad+\frac{\Gamma(\nu-\mu+1)\,\Gamma(\nu-\mu)}{\Gamma(\nu+\mu+1)\,\Gamma(\nu+\mu)}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\left[\mathrm{P}_{\nu}^{\mu}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu-1}^{\mu}(x)-\mathrm{P}_{\nu-1}^{\mu}(x)\,\mathrm{Q}_{\nu}^{\mu}(x)\right].\end{aligned}\tag{12.145}$$

读者如果对照一下前面第九章中已经得到过的有关恒等式 (例如 (9.29) — (9.38) 各式)，就不难验证上述结果的正确性.

最后，需要特别申明，作为本节出发点的递推关系 (12.73) — (12.80)，只适用于 x, y 为实数，且 $-1\leqslant x,y\leqslant 1$，因此，本节中得到的公式，也须受到同样的限制. 若要将 x,y 推广为复数 z,ζ，则需按照 $\mathrm{P}_{\nu}^{\mu}(z)$ 与 $\mathrm{Q}_{\nu}^{\mu}(z)$ 的递推关系加以修改. 此处从略.

§12.3　超几何函数的求和公式

从相应的递推关系出发，也能得到其他特殊函数的求和公式. 例如，对于超几何函数 $\mathrm{F}(\alpha,\beta;\gamma;z)$，有递推关系

$$\begin{aligned}&-[\gamma-2\alpha+(\alpha-\beta)z]\mathrm{F}(\alpha,\beta;\gamma;z)\\&\qquad=\alpha(1-z)\mathrm{F}(\alpha+1,\beta;\gamma;z)+(\alpha-\gamma)\,\mathrm{F}(\alpha-1,\beta;\gamma;z),\end{aligned}\tag{12.146}$$

$$-\left[\gamma-2\beta+(\beta-\alpha)z\right]\mathrm{F}(\alpha,\beta;\gamma;z)$$
$$=\beta(1-z)\mathrm{F}(\alpha,\beta+1;\gamma;z)+(\beta-\gamma)\,\mathrm{F}(\alpha,\beta-1;\gamma;z),\tag{12.147}$$
$$-\gamma[\gamma-1-(2\gamma-\alpha-\beta-1)\,z]\,\mathrm{F}(\alpha,\beta;\gamma;z)+(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)\,z\,\mathrm{F}(\alpha,\beta;\gamma+1;z)$$
$$+\gamma(\gamma-1)(z-1)\,\mathrm{F}(\alpha,\beta;\gamma-1;z)=0.\tag{12.148}$$

我们可以将递推关系 (12.146) 改写为

$$\begin{aligned}&[2\alpha+2k-\gamma-(\alpha+k-\beta)z]\frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha+k-\gamma)}(1-z)^{(k-1)/2}\,\mathrm{F}(\alpha+k,\beta;\gamma;z)\\&\quad=\frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\Gamma(\alpha+k-\gamma)}(1-z)^{(k+1)/2}\,\mathrm{F}(\alpha+k+1,\beta;\gamma;z)\\&\qquad+\frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha+k-\gamma-1)}(1-z)^{(k-1)/2}\,\mathrm{F}(\alpha+k-1,\beta;\gamma;z),\end{aligned}\tag{12.146$'$}$$

即将 $(1-z)^{l/2}\,\mathrm{F}(\alpha+l,\beta;\gamma;x)$ 看成 (12.6a) 式中的 $u_l(x)$，因此，重复前面推导求和公式的步骤，就应当得到求和公式

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n}\Big\{\big[2\alpha+2k-\gamma-(\alpha+k-\beta)z\big]\sqrt{1-\zeta}-[2\alpha+2k-\gamma-(\alpha+k-\beta)\zeta]\sqrt{1-z}\Big\}\\&\qquad\times\frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha+k-\gamma)}\big[(1-z)(1-\zeta)\big]^{k/2}\,\mathrm{F}(\alpha+k,\beta;\gamma;z)\,\mathrm{F}(\alpha+k,\beta;\gamma;\zeta)\\&\quad=\frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha+n-\gamma)}\big[(1-z)(1-\zeta)\big]^{(n+1)/2}\\&\qquad\times\big[(1-z)^{1/2}\,\mathrm{F}(\alpha+n+1,\beta;\gamma;z)\,\mathrm{F}(\alpha+n,\beta;\gamma;\zeta)\\&\qquad-(1-\zeta)^{1/2}\,\mathrm{F}(\alpha+n,\beta;\gamma;z)\,\mathrm{F}(\alpha+n+1,\beta;\gamma;\zeta)\big]\\&\qquad-\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-\gamma-1)}\big[(1-z)^{1/2}\,\mathrm{F}(\alpha,\beta;\gamma;z)\,\mathrm{F}(\alpha-1,\beta;\gamma;\zeta)\\&\qquad-(1-\zeta)^{1/2}\,\mathrm{F}(\alpha-1,\beta;\gamma;z)\,\mathrm{F}(\alpha,\beta;\gamma;\zeta)\big].\end{aligned}\tag{12.149}$$

另外，直接将 (12.146′) 式两端同乘以 $(-1)^k(1-z)^{k/2}\mathrm{F}(\alpha+k,\beta;\gamma;z)$，求和后又能得到另一个求和公式：

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha+k-\gamma)}\big[2\alpha+2k-\gamma-(\alpha+k-\beta)z\big](1-z)^k\big[\mathrm{F}(\alpha+k,\beta;\gamma;z)\big]^2\\&\quad=(-1)^n\frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha+n-\gamma)}\,(1-z)^{n+1}\,\mathrm{F}(\alpha+n+1,\beta;\gamma;z)\,\mathrm{F}(\alpha+n,\beta;\gamma;z)\\&\qquad+\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-\gamma-1)}\,\mathrm{F}(\alpha,\beta;\gamma;z)\,\mathrm{F}(\alpha-1,\beta;\gamma;z).\end{aligned}\tag{12.150}$$

将 (12.146) 式中的 α 与 β 互换 (因为 $\mathrm{F}(\alpha,\beta;\gamma;z)=\mathrm{F}(\beta,\alpha;\gamma;z)$，所以只需将系数中的 α 与 β 互换)，就能得到 (12.147) 式. 因此，根据 (12.147) 式而导出的求和公式是：

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n}\Big\{\big[2\beta+2k-\gamma-(\beta+k-\alpha)z\big]\sqrt{1-\zeta}-\big[2\beta+2k-\gamma-(\beta+k-\alpha)\zeta\big]\sqrt{1-z}\Big\}\\
&\qquad\times\frac{\Gamma(\beta+k)}{\Gamma(\beta+k-\gamma)}\big[(1-z)(1-\zeta)\big]^{k/2}\,\mathrm{F}(\alpha,\beta+k;\gamma;z)\,\mathrm{F}(\alpha,\beta+k;\gamma;\zeta)\\
&\quad=\frac{\Gamma(\beta+n+1)}{\Gamma(\beta+n-\gamma)}\big[(1-z)(1-\zeta)\big]^{(n+1)/2}\\
&\qquad\times\big[(1-z)^{1/2}\,\mathrm{F}(\alpha,\beta+n+1;\gamma;z)\,\mathrm{F}(\alpha,\beta+n;\gamma;\zeta)\\
&\qquad-(1-\zeta)^{1/2}\,\mathrm{F}(\alpha,\beta+n;\gamma;z)\,\mathrm{F}(\alpha,\beta+n+1;\gamma;\zeta)\big]\\
&\qquad-\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\gamma-1)}\big[(1-z)^{1/2}\,\mathrm{F}(\alpha,\beta;\gamma;z)\,\mathrm{F}(\alpha,\beta-1;\gamma;\zeta)\\
&\qquad-(1-\zeta)^{1/2}\,\mathrm{F}(\alpha,\beta-1;\gamma;z)\,\mathrm{F}(\alpha,\beta;\gamma;\zeta)\big],
\end{aligned}\tag{12.151}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{\Gamma(\beta+k)}{\Gamma(\beta+k-\gamma)}\big[2\beta+2k-\gamma-(\beta+k-\alpha)z\big](1-z)^k\big[\mathrm{F}(\alpha,\beta+k;\gamma;z)\big]^2\\
&\quad=(-1)^n\frac{\Gamma(\beta+n+1)}{\Gamma(\beta+n-\gamma)}(1-z)^{n+1}\,\mathrm{F}(\alpha,\beta+n+1;\gamma;z)\,\mathrm{F}(\alpha,\beta+n;\gamma;z)\\
&\qquad+\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\gamma-1)}\,\mathrm{F}(\alpha,\beta;\gamma;z)\,\mathrm{F}(\alpha,\beta-1;\gamma;z).
\end{aligned}\tag{12.152}$$

同样，对于递推关系 (12.148)，我们可以得到如下求和公式：

$$\begin{aligned}
&-\sum_{k=0}^{n}\frac{\Gamma(\gamma+k-\alpha)\,\Gamma(\gamma+k-\beta)}{\Gamma(\gamma+k)\,\Gamma(\gamma+k)}\Big\{\big[\gamma+k-1-(2\gamma+2k-\alpha-\beta-1)z\big]\frac{z^k}{(z-1)^{k+1}}\\
&\qquad-\big[\gamma+k-1-(2\gamma+2k-\alpha-\beta-1)\zeta\big]\frac{\zeta^k}{(\zeta-1)^{k+1}}\Big\}\\
&\qquad\times\mathrm{F}(\alpha,\beta;\gamma+k;z)\,\mathrm{F}(\alpha,\beta;\gamma+k;\zeta)\\
&\quad=\frac{\Gamma(\gamma+n-\alpha+1)\,\Gamma(\gamma+n-\beta+1)}{\Gamma(\gamma+n+1)\,\Gamma(\gamma+n)}\\
&\qquad\times\Big[\Big(\frac{z}{z-1}\Big)^{n+1}\mathrm{F}(\alpha,\beta;\gamma+n+1;z)\,\mathrm{F}(\alpha,\beta;\gamma+n;\zeta)\\
&\qquad-\Big(\frac{\zeta}{\zeta-1}\Big)^{n+1}\mathrm{F}(\alpha,\beta;\gamma+n;z)\,\mathrm{F}(\alpha,\beta;\gamma+n+1;\zeta)\Big]\\
&\qquad-\frac{\Gamma(\gamma-\alpha)\,\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\gamma-1)}\\
&\qquad\times\big[\mathrm{F}(\alpha,\beta;\gamma;z)\,\mathrm{F}(\alpha,\beta;\gamma-1;\zeta)-\mathrm{F}(\alpha,\beta;\gamma-1;z)\,\mathrm{F}(\alpha,\beta;\gamma;\zeta)\big],
\end{aligned}\tag{12.153}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}\frac{\Gamma(\gamma+k-\alpha)\,\Gamma(\gamma+k-\beta)}{\Gamma(\gamma+k)\,\Gamma(\gamma+k)}\left[\gamma+k-1-(2\gamma+2k-\alpha-\beta-1)z\right]$$
$$\times\frac{z^k}{(z-1)^{k+1}}\left[\mathrm{F}(\alpha,\beta;\gamma+k;z)\right]^2$$
$$=(-1)^n\frac{\Gamma(\gamma+n-\alpha+1)\,\Gamma(\gamma+n-\beta+1)}{\Gamma(\gamma+n+1)\,\Gamma(\gamma+n)}\left(\frac{z}{z-1}\right)^{n+1}$$
$$\times\mathrm{F}(\alpha,\beta;\gamma+n+1;z)\,\mathrm{F}(\alpha,\beta;\gamma+n;z)$$
$$+\frac{\Gamma(\gamma-\alpha)\,\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\gamma-1)}\mathrm{F}(\alpha,\beta;\gamma;z)\,\mathrm{F}(\alpha,\beta;\gamma-1;z). \tag{12.154}$$

作为特殊的超几何函数，由于它们的参数 α,β,γ 存在一定的约束，所以倒不一定满足上面列出的超几何函数的求和公式. 其实，比较一下 Legendre 多项式或连带 Legendre 函数 (它们也都是特殊的超几何函数) 与超几何函数的求和公式，就可以看到这一现象. 还可以提到 Gegenbauer 多项式①，它有递推关系

$$2(\lambda+k)z\mathrm{C}_k^\lambda(z)=(k+1)\mathrm{C}_{k+1}^\lambda(z)+(2\lambda+k-1)\mathrm{C}_{k-1}^\lambda(z), \tag{12.155a}$$

$$2(\lambda+k)\mathrm{C}_k^\lambda(z)=\frac{\mathrm{d}\mathrm{C}_{k+1}^\lambda(z)}{\mathrm{d}z}-\frac{\mathrm{d}\mathrm{C}_{k-1}^\lambda(z)}{\mathrm{d}z}. \tag{12.155b}$$

由此也能得到求和公式:

$$\sum_{k=0}^{n}(\lambda+k)\,\frac{k!}{\Gamma(2\lambda+k)}\,\mathrm{C}_k^\lambda(z)\,\mathrm{C}_k^\lambda(\zeta)$$
$$=\frac{1}{2}\,\frac{(n+1)!}{\Gamma(2\lambda+n)}\,\frac{\mathrm{C}_{n+1}^\lambda(z)\,\mathrm{C}_n^\lambda(\zeta)-\mathrm{C}_n^\lambda(z)\,\mathrm{C}_{n+1}^\lambda(\zeta)}{z-\zeta}, \tag{12.156}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\lambda+k)\,\frac{k!}{\Gamma(2\lambda+k)}\left[\mathrm{C}_k^\lambda(z)\right]^2$$
$$=\frac{(-1)^n}{2}\,\frac{(n++1)!}{\Gamma(2\lambda+n)}\,\frac{\mathrm{C}_{n+1}^\lambda(z)\,\mathrm{C}_n^\lambda(z)}{z}, \tag{12.157}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\lambda+k)\,\frac{k!}{\Gamma(2\lambda+k)}\left[\mathrm{C}_k^\lambda(z)\,\frac{\mathrm{d}\mathrm{C}_k^\lambda(\zeta)}{\mathrm{d}\zeta}-\frac{\mathrm{d}\mathrm{C}_k^\lambda(z)}{\mathrm{d}z}\,\mathrm{C}_k^\lambda(\zeta)\right]$$
$$=\frac{(-1)^n}{2}\left[\frac{\mathrm{d}\mathrm{C}_{n+1}^\lambda(z)}{\mathrm{d}z}\,\frac{\mathrm{d}\mathrm{C}_n^\lambda(\zeta)}{\mathrm{d}\zeta}-\frac{\mathrm{d}\mathrm{C}_n^\lambda(z)}{\mathrm{d}z}\,\frac{\mathrm{d}\mathrm{C}_{n+1}^\lambda(\zeta)}{\mathrm{d}\zeta}\right], \tag{12.158}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(\lambda+k)\,\frac{k!}{\Gamma(2\lambda+k)}\mathrm{C}_k^\lambda(z)\,\frac{\mathrm{d}\mathrm{C}_k^\lambda(z)}{\mathrm{d}z}=\frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{d}\mathrm{C}_{n+1}^\lambda(z)}{\mathrm{d}z}\,\frac{\mathrm{d}\mathrm{C}_n^\lambda(z)}{\mathrm{d}z}. \tag{12.159}$$

---

① 亦称超球多项式，记为 $\mathrm{P}_k^{(\lambda)}(z)$.

第十三章　柱　函　数

§13.1　柱函数的 Wroński 行列式及其推论

Bessel 方程

$$\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(z\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right)+\left(1-\frac{\nu^2}{z^2}\right)w=0$$

的解可取为①

$$\mathrm{J}_{\pm\nu}(z),\qquad \mathrm{N}_{\pm\nu}(z)\qquad \text{和}\qquad \mathrm{H}_\nu^{(1)}(z),\ \mathrm{H}_\nu^{(2)}(z),$$

它们都在沿负实轴割开的 z 平面 ($|\arg z|<\pi$) 上单值解析, 并且还可以进一步延拓，例如

$$\begin{aligned}
&\mathrm{J}_{\pm\nu}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z)=\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\pi\nu}\mathrm{J}_{\pm\nu}(z),\\
&\mathrm{N}_{\pm\nu}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z)=\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\pi\nu}\mathrm{N}_{\pm\nu}(z)+2\mathrm{i}\mathrm{J}_{\mp\nu}(z)=\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}\pi\nu}\mathrm{N}_{\pm\nu}(z)+2\mathrm{i}\cos\pi\nu\cdot\mathrm{J}_{\pm\nu}(z),\\
&\mathrm{H}_\nu^{(1)}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\nu}\mathrm{H}_\nu^{(1)}(z)-2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\nu}\mathrm{J}_\nu(z)=-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\nu}\mathrm{H}_\nu^{(2)}(z),\\
&\mathrm{H}_\nu^{(2)}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\nu}\mathrm{H}_\nu^{(2)}(z)+2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\nu}\mathrm{J}_\nu(z)=2\cos\pi\nu\cdot\mathrm{H}_\nu^{(2)}(z)+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\nu}\mathrm{H}_\nu^{(1)}(z).
\end{aligned}$$

关于它们之间的 Wroński 行列式，常见的有

$$W[\mathrm{J}_\nu(z),\ \mathrm{J}_{-\nu}(z)]\equiv\mathrm{J}_\nu(z)\frac{\mathrm{dJ}_{-\nu}(z)}{\mathrm{d}z}-\mathrm{J}_{-\nu}(z)\frac{\mathrm{dJ}_\nu(z)}{\mathrm{d}z}=-\frac{2}{\pi z}\sin\pi\nu,\tag{13.1}$$

$$W[\mathrm{J}_\nu(z),\ \mathrm{N}_\nu(z)]\equiv\mathrm{J}_\nu(z)\frac{\mathrm{dN}_\nu(z)}{\mathrm{d}z}-\mathrm{N}_\nu(z)\frac{\mathrm{dJ}_\nu(z)}{\mathrm{d}z}=\frac{2}{\pi z},\tag{13.2}$$

$$W[\mathrm{J}_\nu(z),\ \mathrm{H}_\nu^{(1)}(z)]\equiv\mathrm{J}_\nu(z)\frac{\mathrm{dH}_\nu^{(1)}(z)}{\mathrm{d}z}-\mathrm{H}_\nu^{(1)}(z)\frac{\mathrm{dJ}_\nu(z)}{\mathrm{d}z}=\frac{2\mathrm{i}}{\pi z},\tag{13.3}$$

$$W[\mathrm{J}_\nu(z),\ \mathrm{H}_\nu^{(2)}(z)]\equiv\mathrm{J}_\nu(z)\frac{\mathrm{dH}_\nu^{(2)}(z)}{\mathrm{d}z}-\mathrm{H}_\nu^{(2)}(z)\frac{\mathrm{dJ}_\nu(z)}{\mathrm{d}z}=-\frac{2\mathrm{i}}{\pi z}.\tag{13.4}$$

在这些公式的基础上，还能导出

$$W[\mathrm{J}_\nu(z),\ \mathrm{N}_{-\nu}(z)]\equiv\mathrm{J}_\nu(z)\frac{\mathrm{dN}_{-\nu}(z)}{\mathrm{d}z}-\mathrm{N}_{-\nu}(z)\frac{\mathrm{dJ}_\nu(z)}{\mathrm{d}z}=\frac{2}{\pi z}\cos\pi\nu,\tag{13.5}$$

$$W[\mathrm{J}_{-\nu}(z),\ \mathrm{N}_\nu(z)]\equiv\mathrm{J}_{-\nu}(z)\frac{\mathrm{dN}_\nu(z)}{\mathrm{d}z}-\mathrm{N}_\nu(z)\frac{\mathrm{dJ}_{-\nu}(z)}{\mathrm{d}z}=\frac{2}{\pi z}\cos\pi\nu,\tag{13.6}$$

$$W[\mathrm{J}_{-\nu}(z),\ \mathrm{N}_{-\nu}(z)]\equiv\mathrm{J}_{-\nu}(z)\frac{\mathrm{dN}_{-\nu}(z)}{\mathrm{d}z}-\mathrm{N}_{-\nu}(z)\frac{\mathrm{dJ}_{-\nu}(z)}{\mathrm{d}z}=\frac{2}{\pi z},\tag{13.7}$$

---

① 另外还可以有 $\mathrm{H}_{-\nu}^{(1)}(z)$, $\mathrm{H}_{-\nu}^{(2)}(z)$，但它们与 $\mathrm{H}_\nu^{(1)}(z)$, $\mathrm{H}_\nu^{(2)}(z)$ 线性相关:

$$\mathrm{H}_{-\nu}^{(1)}(z)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu\pi}\mathrm{H}_\nu^{(1)}(z),\qquad \mathrm{H}_{-\nu}^{(2)}(z)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu\pi}\mathrm{H}_\nu^{(2)}(z).$$

$$W[\mathrm{J}_{-\nu}(z),\ \mathrm{H}_\nu^{(1)}(z)] \equiv \mathrm{J}_{-\nu}(z)\frac{\mathrm{dH}_\nu^{(1)}(z)}{\mathrm{d}z} - \mathrm{H}_\nu^{(1)}(z)\frac{\mathrm{dJ}_{-\nu}(z)}{\mathrm{d}z} = \frac{2\mathrm{i}}{\pi z}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\nu}, \tag{13.8}$$

$$W[\mathrm{J}_{-\nu}(z),\ \mathrm{H}_\nu^{(2)}(z)] \equiv \mathrm{J}_\nu(z)\frac{\mathrm{dH}_\nu^{(2)}(z)}{\mathrm{d}z} - \mathrm{H}_\nu^{(2)}(z)\frac{\mathrm{dJ}_\nu(z)}{\mathrm{d}z} = -\frac{2\mathrm{i}}{\pi z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\nu}, \tag{13.9}$$

$$W[\mathrm{N}_\nu(z),\ \mathrm{N}_{-\nu}(z)] \equiv \mathrm{N}_\nu(z)\frac{\mathrm{dN}_{-\nu}(z)}{\mathrm{d}z} - \mathrm{N}_{-\nu}(z)\frac{\mathrm{dN}_\nu(z)}{\mathrm{d}z} = -\frac{2}{\pi z}\sin\pi\nu, \tag{13.10}$$

$$W[\mathrm{N}_\nu(z),\ \mathrm{H}_\nu^{(1)}(z)] \equiv \mathrm{N}_\nu(z)\frac{\mathrm{dH}_\nu^{(1)}(z)}{\mathrm{d}z} - \mathrm{H}_\nu^{(1)}(z)\frac{\mathrm{dN}_\nu(z)}{\mathrm{d}z} = -\frac{2}{\pi z}, \tag{13.11}$$

$$W[\mathrm{N}_\nu(z),\ \mathrm{H}_\nu^{(2)}(z)] \equiv \mathrm{N}_\nu(z)\frac{\mathrm{dH}_\nu^{(2)}(z)}{\mathrm{d}z} - \mathrm{H}_\nu^{(2)}(z)\frac{\mathrm{dN}_\nu(z)}{\mathrm{d}z} = \frac{2}{\pi z}, \tag{13.12}$$

$$W[\mathrm{N}_{-\nu}(z),\ \mathrm{H}_\nu^{(1)}(z)] \equiv \mathrm{N}_{-\nu}(z)\frac{\mathrm{dH}_\nu^{(1)}(z)}{\mathrm{d}z} - \mathrm{H}_\nu^{(1)}(z)\frac{\mathrm{dN}_{-\nu}(z)}{\mathrm{d}z} = -\frac{2}{\pi z}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\nu}, \tag{13.13}$$

$$W[\mathrm{N}_{-\nu}(z),\ \mathrm{H}_\nu^{(2)}(z)] \equiv \mathrm{N}_{-\nu}(z)\frac{\mathrm{dH}_\nu^{(2)}(z)}{\mathrm{d}z} - \mathrm{H}_\nu^{(2)}(z)\frac{\mathrm{dN}_{-\nu}(z)}{\mathrm{d}z} = -\frac{2}{\pi z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\nu}, \tag{13.14}$$

$$W[\mathrm{H}_\nu^{(1)}(z),\ \mathrm{H}_\nu^{(2)}(z)] \equiv \mathrm{H}_\nu^{(1)}(z)\frac{\mathrm{dH}_\nu^{(2)}(z)}{\mathrm{d}z} - \mathrm{H}_\nu^{(2)}(z)\frac{\mathrm{dH}_\nu^{(1)}(z)}{\mathrm{d}z} = -\frac{4\mathrm{i}}{\pi z} \tag{13.15}$$

及

$$W[\mathrm{J}_\nu(z),\ \mathrm{J}_{-\nu}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}}\pi z)] \equiv \mathrm{J}_\nu(z)\frac{\mathrm{dJ}_{-\nu}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}}\pi z)}{\mathrm{d}z} - \mathrm{J}_{-\nu}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}}\pi z)\frac{\mathrm{dJ}_\nu(z)}{\mathrm{d}z} = -\frac{2}{\pi z}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\nu}\sin\pi\nu, \tag{13.16}$$

$$W[\mathrm{J}_\nu(z),\ \mathrm{N}_\nu(\mathrm{e}^{\mathrm{i}}\pi z)] \equiv \mathrm{J}_\nu(z)\frac{\mathrm{dN}_\nu(\mathrm{e}^{\mathrm{i}}\pi z)}{\mathrm{d}z} - \mathrm{N}_\nu(\mathrm{e}^{\mathrm{i}}\pi z)\frac{\mathrm{dJ}_\nu(z)}{\mathrm{d}z} = \frac{2}{\pi z}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\nu}, \tag{13.17}$$

$$W[\mathrm{J}_\nu(z),\ \mathrm{N}_{-\nu}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}}\pi z)] \equiv \mathrm{J}_\nu(z)\frac{\mathrm{dN}_{-\nu}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}}\pi z)}{\mathrm{d}z} - \mathrm{N}_{-\nu}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}}\pi z)\frac{\mathrm{dJ}_\nu(z)}{\mathrm{d}z} = \frac{2}{\pi z}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\nu}\cos\pi\nu, \tag{13.18}$$

$$W[\mathrm{J}_\nu(z),\ \mathrm{H}_\nu^{(1)}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}}\pi z)] \equiv \mathrm{J}_\nu(z)\frac{\mathrm{dH}_\nu^{(1)}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}}\pi z)}{\mathrm{d}z} - \mathrm{H}_\nu^{(1)}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}}\pi z)\frac{\mathrm{dJ}_\nu(z)}{\mathrm{d}z} = \frac{2\mathrm{i}}{\pi z}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\nu}, \tag{13.19}$$

$$W[\mathrm{J}_\nu(z),\ \mathrm{H}_\nu^{(2)}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}}\pi z)] \equiv \mathrm{J}_\nu(z)\frac{\mathrm{dH}_\nu^{(2)}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}}\pi z)}{\mathrm{d}z} - \mathrm{H}_\nu^{(2)}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}}\pi z)\frac{\mathrm{dJ}_\nu(z)}{\mathrm{d}z} = -\frac{2\mathrm{i}}{\pi z}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\nu}, \tag{13.20}$$

$$W[\mathrm{J}_{-\nu}(z),\ \mathrm{N}_\nu(\mathrm{e}^{\mathrm{i}}\pi z)] \equiv \mathrm{J}_{-\nu}(z)\frac{\mathrm{dN}_\nu(\mathrm{e}^{\mathrm{i}}\pi z)}{\mathrm{d}z} - \mathrm{N}_\nu(\mathrm{e}^{\mathrm{i}}\pi z)\frac{\mathrm{dJ}_{-\nu}(z)}{\mathrm{d}z} = \frac{2}{\pi z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\nu}\cos\pi\nu, \tag{13.21}$$

$$W[\mathrm{J}_{-\nu}(z),\ \mathrm{N}_{-\nu}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}}\pi z)] \equiv \mathrm{J}_{-\nu}(z)\frac{\mathrm{dN}_{-\nu}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}}\pi z)}{\mathrm{d}z} - \mathrm{N}_{-\nu}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}}\pi z)\frac{\mathrm{dJ}_{-\nu}(z)}{\mathrm{d}z} = \frac{2}{\pi z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\nu}, \tag{13.22}$$

$$W[\mathrm{J}_{-\nu}(z),\ \mathrm{H}_\nu^{(1)}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}}\pi z)] \equiv \mathrm{J}_{-\nu}(z)\frac{\mathrm{dH}_\nu^{(1)}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}}\pi z)}{\mathrm{d}z} - \mathrm{H}_\nu^{(1)}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}}\pi z)\frac{\mathrm{dJ}_{-\nu}(z)}{\mathrm{d}z} = \frac{2\mathrm{i}}{\pi z}, \tag{13.23}$$

$$W[\mathrm{J}_{-\nu}(z),\ \mathrm{H}_\nu^{(2)}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}}\pi z)] \equiv \mathrm{J}_{-\nu}(z)\frac{\mathrm{d}\mathrm{H}_\nu^{(2)}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}}\pi z)}{\mathrm{d}z} - \mathrm{H}_\nu^{(2)}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}}\pi z)\frac{\mathrm{d}\mathrm{J}_{-\nu}(z)}{\mathrm{d}z} = -\frac{2\mathrm{i}}{\pi z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\nu}, \tag{13.24}$$

$$W[\mathrm{N}_\nu(z), \mathrm{N}_\nu(\mathrm{e}^{\mathrm{i}}\pi z)] \equiv \mathrm{N}_\nu(z)\frac{\mathrm{d}\mathrm{N}_\nu(\mathrm{e}^{\mathrm{i}}\pi z)}{\mathrm{d}z} - \mathrm{N}_\nu(\mathrm{e}^{\mathrm{i}}\pi z)\frac{\mathrm{d}\mathrm{N}_\nu(z)}{\mathrm{d}z} = -\frac{4\mathrm{i}}{\pi z}\cos\pi\nu, \tag{13.25}$$

$$\begin{aligned} W[\mathrm{N}_\nu(z), \mathrm{N}_{-\nu}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}}\pi z)] &\equiv \mathrm{N}_\nu(z)\frac{\mathrm{d}\mathrm{N}_{-\nu}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}}\pi z)}{\mathrm{d}z} - \mathrm{N}_{-\nu}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}}\pi z)\frac{\mathrm{d}\mathrm{N}_\nu(z)}{\mathrm{d}z} \\ &= -\frac{2\mathrm{i}}{\pi z}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\nu}\sin\pi\nu + 2\mathrm{i}\right), \end{aligned} \tag{13.26}$$

$$W[\mathrm{N}_\nu(z), \mathrm{H}_\nu^{(1)}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}}\pi z)] \equiv \mathrm{N}_\nu(z)\frac{\mathrm{d}\mathrm{H}_\nu^{(1)}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}}\pi z)}{\mathrm{d}z} - \mathrm{H}_\nu^{(1)}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}}\pi z)\frac{\mathrm{d}\mathrm{N}_\nu(z)}{\mathrm{d}z} = \frac{2}{\pi z}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\nu}, \tag{13.27}$$

$$W[\mathrm{N}_\nu(z), \mathrm{H}_\nu^{(2)}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}}\pi z)] \equiv \mathrm{N}_\nu(z)\frac{\mathrm{d}\mathrm{H}_\nu^{(2)}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}}\pi z)}{\mathrm{d}z} - \mathrm{H}_\nu^{(2)}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}}\pi z)\frac{\mathrm{d}\mathrm{N}_\nu(z)}{\mathrm{d}z} = \frac{2}{\pi z}\left(1 - 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\nu}\right), \tag{13.28}$$

$$W[\mathrm{N}_{-\nu}(z), \mathrm{H}_\nu^{(1)}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}}\pi z)] \equiv \mathrm{N}_{-\nu}(z)\frac{\mathrm{d}\mathrm{H}_\nu^{(1)}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}}\pi z)}{\mathrm{d}z} - \mathrm{H}_\nu^{(1)}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}}\pi z)\frac{\mathrm{d}\mathrm{N}_{-\nu}(z)}{\mathrm{d}z} = \frac{2}{\pi z}, \tag{13.29}$$

$$\begin{aligned} W[\mathrm{N}_{-\nu}(z), \mathrm{H}_\nu^{(2)}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}}\pi z)] &\equiv \mathrm{N}_{-\nu}(z)\frac{\mathrm{d}\mathrm{H}_\nu^{(2)}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}}\pi z)}{\mathrm{d}z} - \mathrm{H}_\nu^{(2)}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}}\pi z)\frac{\mathrm{d}\mathrm{N}_{-\nu}(z)}{\mathrm{d}z} \\ &= -\frac{2}{\pi z}\left(1 + 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\nu}\cos\pi\nu\right), \end{aligned} \tag{13.30}$$

$$W[\mathrm{H}_\nu^{(1)}(z), \mathrm{H}_\nu^{(2)}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}}\pi z)] \equiv \mathrm{H}_\nu^{(1)}(z)\frac{\mathrm{d}\mathrm{H}_\nu^{(2)}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}}\pi z)}{\mathrm{d}z} - \mathrm{H}_\nu^{(2)}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}}\pi z)\frac{\mathrm{d}\mathrm{H}_\nu^{(1)}(z)}{\mathrm{d}z} = -\frac{8\mathrm{i}}{\pi z}\cos\pi\nu. \tag{13.31}$$

在以上结果中代入柱函数的递推关系

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^\nu\,\mathscr{C}_\nu(z)\right] = z^\nu\,\mathscr{C}_{\nu-1}(z), \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^{-\nu}\,\mathscr{C}_\nu(z)\right] = -z^{-\nu}\,\mathscr{C}_{\nu+1}(z)$$

即

$$\mathscr{C}_\nu'(z) = \mathscr{C}_{\nu-1}(z) - \frac{\nu}{z}\,\mathscr{C}_\nu(z), \qquad \mathscr{C}_\nu'(z) = -\,\mathscr{C}_{\nu+1}(z) + \frac{\nu}{z}\,\mathscr{C}_\nu(z),$$

消去各式中柱函数的导数，就能导出

$$\mathrm{J}_\nu(z)\,\mathrm{J}_{-\nu+1}(z) + \mathrm{J}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{J}_{-\nu}(z) = \frac{2}{\pi z}\sin\pi\nu, \tag{13.32}$$

$$\mathrm{J}_\nu(z)\mathrm{J}_{-\nu-1}(z) + \mathrm{J}_{\nu+1}(z)\,\mathrm{J}_{-\nu}(z) = -\frac{2}{\pi z}\sin\pi\nu, \tag{13.33}$$

$$\mathrm{J}_\nu(z)\,\mathrm{N}_{\nu-1}(z) - \mathrm{J}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{N}_\nu(z) = \frac{2}{\pi z}, \tag{13.34}$$

$$\mathrm{J}_\nu(z)\,\mathrm{N}_{\nu+1}(z) - \mathrm{J}_{\nu+1}(z)\,\mathrm{N}_\nu(z) = -\frac{2}{\pi z}, \tag{13.35}$$

$$\mathrm{J}_\nu(z)\mathrm{N}_{-\nu+1}(z) + \mathrm{J}_{\nu-1}(z)\mathrm{N}_{-\nu}(z) = -\frac{2}{\pi z}\cos\pi\nu, \tag{13.36}$$

$$\mathrm{J}_\nu(z)\,\mathrm{N}_{-\nu-1}(z)+\mathrm{J}_{\nu+1}(z)\,\mathrm{N}_{-\nu}(z)=\frac{2}{\pi z}\cos\pi\nu, \tag{13.37}$$

$$\mathrm{J}_\nu(z)\,\mathrm{H}^{(1)}_{\nu-1}(z)-\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{H}^{(1)}_\nu(z)=\frac{2\mathrm{i}}{\pi z}, \tag{13.38}$$

$$\mathrm{J}_\nu(z)\,\mathrm{H}^{(1)}_{\nu+1}(z)-\mathrm{J}_{\nu+1}(z)\,\mathrm{H}^{(1)}_\nu(z)=-\frac{2\mathrm{i}}{\pi z}, \tag{13.39}$$

$$\mathrm{J}_\nu(z)\,\mathrm{H}^{(2)}_{\nu-1}(z)-\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{H}^{(2)}_\nu(z)=-\frac{2\mathrm{i}}{\pi z}, \tag{13.40}$$

$$\mathrm{J}_\nu(z)\,\mathrm{H}^{(2)}_{\nu+1}(z)-\mathrm{J}_{\nu+1}(z)\,\mathrm{H}^{(2)}_\nu(z)=\frac{2\mathrm{i}}{\pi z}, \tag{13.41}$$

$$\mathrm{J}_{-\nu}(z)\,\mathrm{N}_{\nu-1}(z)+\mathrm{J}_{-\nu+1}(z)\,\mathrm{N}_\nu(z)=\frac{2}{\pi z}\cos\pi\nu, \tag{13.42}$$

$$\mathrm{J}_{-\nu}(z)\,\mathrm{N}_{\nu+1}(z)+\mathrm{J}_{-\nu-1}(z)\,\mathrm{N}_\nu(z)=-\frac{2}{\pi z}\cos\pi\nu, \tag{13.43}$$

$$\mathrm{J}_{-\nu}(z)\,\mathrm{N}_{-\nu+1}(z)-\mathrm{J}_{-\nu+1}(z)\,\mathrm{N}_{-\nu}(z)=-\frac{2}{\pi z}, \tag{13.44}$$

$$\mathrm{J}_{-\nu}(z)\,\mathrm{N}_{-\nu-1}(z)-\mathrm{J}_{-\nu-1}(z)\,\mathrm{N}_{-\nu}(z)=\frac{2}{\pi z}, \tag{13.45}$$

$$\mathrm{J}_{-\nu}(z)\,\mathrm{H}^{(1)}_{\nu-1}(z)+\mathrm{J}_{-\nu+1}(z)\,\mathrm{H}^{(1)}_\nu(z)=\frac{2\mathrm{i}}{\pi z}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\nu}, \tag{13.46}$$

$$\mathrm{J}_{-\nu}(z)\,\mathrm{H}^{(1)}_{\nu+1}(z)+\mathrm{J}_{-\nu-1}(z)\,\mathrm{H}^{(1)}_\nu(z)=-\frac{2\mathrm{i}}{\pi z}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\nu}, \tag{13.47}$$

$$\mathrm{J}_{-\nu}(z)\,\mathrm{H}^{(2)}_{\nu-1}(z)+\mathrm{J}_{-\nu+1}(z)\,\mathrm{H}^{(2)}_\nu(z)=-\frac{2\mathrm{i}}{\pi z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\nu}, \tag{13.48}$$

$$\mathrm{J}_{-\nu}(z)\,\mathrm{H}^{(2)}_{\nu+1}(z)+\mathrm{J}_{-\nu-1}(z)\,\mathrm{H}^{(2)}_\nu(z)=\frac{2\mathrm{i}}{\pi z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\nu}, \tag{13.49}$$

$$\mathrm{N}_\nu(z)\mathrm{N}_{-\nu+1}(z)+\mathrm{N}_{\nu-1}(z)\mathrm{N}_{-\nu}(z)=\frac{2}{\pi z}\sin\pi\nu, \tag{13.50}$$

$$\mathrm{N}_\nu(z)\mathrm{N}_{-\nu-1}(z)+\mathrm{N}_{\nu+1}(z)\mathrm{N}_{-\nu}(z)=-\frac{2}{\pi z}\sin\pi\nu, \tag{13.51}$$

$$\mathrm{N}_\nu(z)\,\mathrm{H}^{(1)}_{\nu-1}(z)-\mathrm{N}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{H}^{(1)}_\nu(z)=-\frac{2}{\pi z}, \tag{13.52}$$

$$\mathrm{N}_\nu(z)\,\mathrm{H}^{(1)}_{\nu+1}(z)-\mathrm{N}_{\nu+1}(z)\,\mathrm{H}^{(1)}_\nu(z)=\frac{2}{\pi z}, \tag{13.53}$$

$$\mathrm{N}_\nu(z)\,\mathrm{H}^{(2)}_{\nu-1}(z)-\mathrm{N}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{H}^{(2)}_\nu(z)=\frac{2}{\pi z}, \tag{13.54}$$

$$\mathrm{N}_\nu(z)\,\mathrm{H}^{(2)}_{\nu+1}(z)-\mathrm{N}_{\nu+1}(z)\,\mathrm{H}^{(2)}_\nu(z)=-\frac{2}{\pi z}, \tag{13.55}$$

$$\mathrm{N}_{-\nu}(z)\,\mathrm{H}^{(1)}_{\nu-1}(z)+\mathrm{N}_{-\nu+1}(z)\,\mathrm{H}^{(1)}_\nu(z)=-\frac{2}{\pi z}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\nu}, \tag{13.56}$$

$$\mathrm{N}_{-\nu}(z)\,\mathrm{H}^{(1)}_{\nu+1}(z)+\mathrm{N}_{-\nu-1}(z)\,\mathrm{H}^{(1)}_\nu(z)=\frac{2}{\pi z}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\nu}, \tag{13.57}$$

$$\mathrm{N}_{-\nu}(z)\,\mathrm{H}^{(2)}_{\nu-1}(z)+\mathrm{N}_{-\nu+1}(z)\,\mathrm{H}^{(2)}_\nu(z)=-\frac{2}{\pi z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\nu}, \tag{13.58}$$

$$\mathrm{N}_{-\nu}(z)\,\mathrm{H}^{(2)}_{\nu+1}(z)+\mathrm{N}_{-\nu-1}(z)\,\mathrm{H}^{(2)}_{\nu}(z)=\frac{2}{\pi z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\nu},\tag{13.59}$$

$$\mathrm{H}^{(1)}_{\nu}(z)\,\mathrm{H}^{(2)}_{\nu-1}(z)-\mathrm{H}^{(1)}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{H}^{(2)}_{\nu}(z)=-\frac{4\mathrm{i}}{\pi z},\tag{13.60}$$

$$\mathrm{H}^{(1)}_{\nu}(z)\,\mathrm{H}^{(2)}_{\nu+1}(z)-\mathrm{H}^{(1)}_{\nu+1}(z)\,\mathrm{H}^{(2)}_{\nu}(z)=\frac{4\mathrm{i}}{\pi z},\tag{13.61}$$

$$\mathrm{J}_{\nu}(z)\,\mathrm{J}_{-\nu-1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z)-\mathrm{J}_{\nu+1}(z)\,\mathrm{J}_{-\nu}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z)=\frac{2}{\pi z}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\nu}\sin\pi\nu,\tag{13.62}$$

$$\mathrm{J}_{\nu}(z)\,\mathrm{J}_{-\nu+1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z)-\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{J}_{-\nu}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z)=-\frac{2}{\pi z}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\nu}\sin\pi\nu,\tag{13.63}$$

$$\mathrm{J}_{\nu}(z)\,\mathrm{N}_{\nu+1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z)+\mathrm{J}_{\nu+1}(z)\,\mathrm{N}_{\nu}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z)=\frac{2}{\pi z}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\nu},\tag{13.64}$$

$$\mathrm{J}_{\nu}(z)\,\mathrm{N}_{\nu-1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z)+\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{N}_{\nu}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z)=-\frac{2}{\pi z}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\nu},\tag{13.65}$$

$$\mathrm{J}_{\nu}(z)\,\mathrm{N}_{-\nu-1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z)-\mathrm{J}_{\nu+1}(z)\,\mathrm{N}_{-\nu}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z)=-\frac{2}{\pi z}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\nu}\cos\pi\nu,\tag{13.66}$$

$$\mathrm{J}_{\nu}(z)\,\mathrm{N}_{-\nu+1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z)-\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{N}_{-\nu}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z)=\frac{2}{\pi z}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\nu}\cos\pi\nu,\tag{13.67}$$

$$\mathrm{J}_{\nu}(z)\,\mathrm{H}^{(1)}_{\nu+1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z)+\mathrm{J}_{\nu+1}(z)\,\mathrm{H}^{(1)}_{\nu}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z)=\frac{2\mathrm{i}}{\pi z}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\nu},\tag{13.68}$$

$$\mathrm{J}_{\nu}(z)\,\mathrm{H}^{(1)}_{\nu-1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z)+\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{H}^{(1)}_{\nu}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z)=-\frac{2\mathrm{i}}{\pi z}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\nu},\tag{13.69}$$

$$\mathrm{J}_{\nu}(z)\,\mathrm{H}^{(2)}_{\nu+1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z)+\mathrm{J}_{\nu+1}(z)\,\mathrm{H}^{(2)}_{\nu}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z)=-\frac{2\mathrm{i}}{\pi z}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\nu},\tag{13.70}$$

$$\mathrm{J}_{\nu}(z)\,\mathrm{H}^{(2)}_{\nu-1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z)+\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{H}^{(2)}_{\nu}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z)=\frac{2\mathrm{i}}{\pi z}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\nu},\tag{13.71}$$

$$\mathrm{J}_{-\nu}(z)\,\mathrm{N}_{\nu+1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z)-\mathrm{J}_{-\nu-1}(z)\,\mathrm{N}_{\nu}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z)=\frac{2}{\pi z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\nu}\cos\pi\nu,\tag{13.72}$$

$$\mathrm{J}_{-\nu}(z)\,\mathrm{N}_{\nu-1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z)-\mathrm{J}_{-\nu+1}(z)\,\mathrm{N}_{\nu}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z)=-\frac{2}{\pi z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\nu}\cos\pi\nu,\tag{13.73}$$

$$\mathrm{J}_{-\nu}(z)\,\mathrm{N}_{-\nu-1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z)+\mathrm{J}_{-\nu-1}(z)\,\mathrm{N}_{-\nu}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z)=-\frac{2}{\pi z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\nu},\tag{13.74}$$

$$\mathrm{J}_{-\nu}(z)\,\mathrm{N}_{-\nu+1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z)+\mathrm{J}_{-\nu+1}(z)\,\mathrm{N}_{-\nu}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z)=\frac{2}{\pi z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\nu},\tag{13.75}$$

$$\mathrm{J}_{-\nu}(z)\,\mathrm{H}^{(1)}_{\nu+1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z)-\mathrm{J}_{-\nu-1}(z)\,\mathrm{H}^{(1)}_{\nu}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z)=\frac{2\mathrm{i}}{\pi z},\tag{13.76}$$

$$\mathrm{J}_{-\nu}(z)\,\mathrm{H}^{(1)}_{\nu-1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z)-\mathrm{J}_{-\nu+1}(z)\,\mathrm{H}^{(1)}_{\nu}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z)=-\frac{2\mathrm{i}}{\pi z},\tag{13.77}$$

$$\mathrm{J}_{-\nu}(z)\,\mathrm{H}^{(2)}_{\nu+1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z)-\mathrm{J}_{-\nu-1}(z)\,\mathrm{H}^{(2)}_{\nu}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z)=-\frac{2\mathrm{i}}{\pi z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\nu},\tag{13.78}$$

$$\mathrm{J}_{-\nu}(z)\,\mathrm{H}^{(2)}_{\nu-1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z)-\mathrm{J}_{-\nu+1}(z)\,\mathrm{H}^{(2)}_{\nu}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z)=\frac{2\mathrm{i}}{\pi z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\nu},\tag{13.79}$$

$$\mathrm{N}_{\nu}(z)\,\mathrm{N}_{\nu+1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z)+\mathrm{N}_{\nu+1}(z)\,\mathrm{N}_{\nu}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z)=-\frac{4\mathrm{i}}{\pi z}\cos\pi\nu,\tag{13.80}$$

$$\mathrm{N}_\nu(z)\,\mathrm{N}_{\nu-1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z)+\mathrm{N}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{N}_\nu(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z)=\frac{4\mathrm{i}}{\pi z}\cos\pi\nu, \tag{13.81}$$

$$\mathrm{N}_\nu(z)\,\mathrm{N}_{-\nu-1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z)-\mathrm{N}_{\nu+1}(z)\,\mathrm{N}_{-\nu}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z)=\frac{2\mathrm{i}}{\pi z}\big(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\nu}\sin\pi\nu+2\mathrm{i}\big), \tag{13.82}$$

$$\mathrm{N}_\nu(z)\,\mathrm{N}_{-\nu+1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z)-\mathrm{N}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{N}_{-\nu}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z)=-\frac{2\mathrm{i}}{\pi z}\big(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\nu}\sin\pi\nu+2\mathrm{i}\big), \tag{13.83}$$

$$\mathrm{N}_\nu(z)\,\mathrm{H}^{(1)}_{\nu+1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z)+\mathrm{N}_{\nu+1}(z)\,\mathrm{H}^{(1)}_\nu(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z)=\frac{2\mathrm{i}}{\pi z}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\nu}, \tag{13.84}$$

$$\mathrm{N}_\nu(z)\,\mathrm{H}^{(1)}_{\nu-1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z)+\mathrm{N}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{H}^{(1)}_\nu(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z)=-\frac{2\mathrm{i}}{\pi z}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\nu}, \tag{13.85}$$

$$\mathrm{N}_\nu(z)\,\mathrm{H}^{(2)}_{\nu+1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z)+\mathrm{N}_{\nu+1}(z)\,\mathrm{H}^{(2)}_\nu(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z)=\frac{2\mathrm{i}}{\pi z}\big(1-2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\nu}\big), \tag{13.86}$$

$$\mathrm{N}_\nu(z)\,\mathrm{H}^{(2)}_{\nu-1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z)+\mathrm{N}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{H}^{(2)}_\nu(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z)=-\frac{2\mathrm{i}}{\pi z}\big(1-2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\nu}\big), \tag{13.87}$$

$$\mathrm{N}_{-\nu}(z)\,\mathrm{H}^{(1)}_{\nu+1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z)-\mathrm{N}_{-\nu-1}(z)\,\mathrm{H}^{(1)}_\nu(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z)=\frac{2}{\pi z}, \tag{13.88}$$

$$\mathrm{N}_{-\nu}(z)\,\mathrm{H}^{(1)}_{\nu-1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z)-\mathrm{N}_{-\nu+1}(z)\,\mathrm{H}^{(1)}_\nu(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z)=-\frac{2}{\pi z}, \tag{13.89}$$

$$\mathrm{N}_{-\nu}(z)\,\mathrm{H}^{(2)}_{\nu+1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z)-\mathrm{N}_{-\nu-1}(z)\,\mathrm{H}^{(2)}_\nu(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z)=-\frac{2}{\pi z}\big(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\nu}\cos\pi\nu\big), \tag{13.90}$$

$$\mathrm{N}_{-\nu}(z)\,\mathrm{H}^{(2)}_{\nu-1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z)-\mathrm{N}_{-\nu_1}(z)\,\mathrm{H}^{(2)}_\nu(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z)=\frac{2}{\pi z}\big(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\nu}\cos\pi\nu\big), \tag{13.91}$$

$$\mathrm{H}^{(1)}_\nu(z)\,\mathrm{H}^{(2)}_{\nu+1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z)+\mathrm{H}^{(1)}_{\nu+1}(z)\,\mathrm{H}^{(2)}_\nu(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z)=-\frac{8\mathrm{i}}{\pi z}\cos\pi\nu, \tag{13.92}$$

$$\mathrm{H}^{(1)}_\nu(z)\,\mathrm{H}^{(2)}_{\nu-1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z)+\mathrm{H}^{(1)}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{H}^{(2)}_\nu(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z)=\frac{8\mathrm{i}}{\pi z}\cos\pi\nu. \tag{13.93}$$

在以上各式再代入柱函数的递推关系

$$\frac{2\nu}{z}\,\mathscr{C}_\nu(z)=\mathscr{C}_{\nu-1}(z)+\mathscr{C}_{\nu+1}(z),$$

又能进一步得到

$$\mathrm{J}_{\nu+1}(z)\,\mathrm{J}_{-\nu+1}(z)-\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{J}_{-\nu-1}(z)=\frac{4\nu}{\pi z^2}\sin\pi\nu, \tag{13.94}$$

$$\mathrm{J}_{\nu+1}(z)\,\mathrm{N}_{\nu-1}(z)-\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{N}_{\nu+1}(z)=\frac{4\nu}{\pi z^2}, \tag{13.95}$$

$$\mathrm{J}_{\nu+1}(z)\mathrm{N}_{-\nu+1}(z)+\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\mathrm{N}_{-\nu-1}(z)=-\frac{4\nu}{\pi z^2}\cos\pi\nu, \tag{13.96}$$

$$\mathrm{J}_{\nu+1}(z)\,\mathrm{H}^{(1)}_{\nu-1}(z)-\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{H}^{(1)}_{\nu+1}(z)=\frac{4\nu\mathrm{i}}{\pi z^2}, \tag{13.97}$$

$$\mathrm{J}_{\nu+1}(z)\,\mathrm{H}^{(2)}_{\nu-1}(z)-\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{H}^{(2)}_{\nu+1}(z)=-\frac{4\nu\mathrm{i}}{\pi z^2}, \tag{13.98}$$

$$\mathrm{J}_{-\nu-1}(z)\,\mathrm{N}_{\nu-1}(z)-\mathrm{J}_{-\nu+1}(z)\,\mathrm{N}_{\nu+1}(z)=-\frac{4\nu}{\pi z^2}\cos\pi\nu, \tag{13.99}$$

$$\mathrm{J}_{-\nu-1}(z)\,\mathrm{N}_{-\nu+1}(z)-\mathrm{J}_{-\nu+1}(z)\,\mathrm{N}_{-\nu-1}(z)=\frac{4\nu}{\pi z^2}, \tag{13.100}$$

$$\mathrm{J}_{-\nu-1}(z)\,\mathrm{H}^{(1)}_{\nu-1}(z) - \mathrm{J}_{-\nu+1}(z)\,\mathrm{H}^{(1)}_{\nu+1}(z) = -\frac{4\nu\mathrm{i}}{\pi z^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\nu}, \tag{13.101}$$

$$\mathrm{J}_{-\nu-1}(z)\,\mathrm{H}^{(2)}_{\nu-1}(z) - \mathrm{J}_{-\nu+1}(z)\,\mathrm{H}^{(2)}_{\nu+1}(z) = \frac{4\nu\mathrm{i}}{\pi z^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\nu}, \tag{13.102}$$

$$\mathrm{N}_{\nu+1}(z)\mathrm{N}_{-\nu+1}(z) - \mathrm{N}_{\nu-1}(z)\mathrm{N}_{-\nu-1}(z) = \frac{4\nu}{\pi z^2}\sin\pi\nu, \tag{13.103}$$

$$\mathrm{N}_{\nu+1}(z)\,\mathrm{H}^{(1)}_{\nu-1}(z) - \mathrm{N}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{H}^{(1)}_{\nu+1}(z) = -\frac{4\nu}{\pi z^2}, \tag{13.104}$$

$$\mathrm{N}_{\nu+1}(z)\,\mathrm{H}^{(2)}_{\nu-1}(z) - \mathrm{N}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{H}^{(2)}_{\nu+1}(z) = \frac{4\nu}{\pi z^2}, \tag{13.105}$$

$$\mathrm{N}_{-\nu-1}(z)\,\mathrm{H}^{(1)}_{\nu-1}(z) - \mathrm{N}_{-\nu+1}(z)\,\mathrm{H}^{(1)}_{\nu+1}(z) = \frac{4\nu}{\pi z^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\nu}, \tag{13.106}$$

$$\mathrm{N}_{-\nu-1}(z)\,\mathrm{H}^{(2)}_{\nu-1}(z) - \mathrm{N}_{-\nu+1}(z)\,\mathrm{H}^{(2)}_{\nu+1}(z) = \frac{4\nu}{\pi z^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\nu}, \tag{13.107}$$

$$\mathrm{H}^{(1)}_{\nu+1}(z)\,\mathrm{H}^{(2)}_{\nu-1}(z) - \mathrm{H}^{(1)}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{H}^{(2)}_{\nu+1}(z) = -\frac{8\nu\mathrm{i}}{\pi z^2}, \tag{13.108}$$

$$\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{J}_{-\nu-1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z) - \mathrm{J}_{\nu+1}(z)\,\mathrm{J}_{-\nu+1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z) = \frac{4\nu}{\pi z^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\nu}\sin\pi\nu, \tag{13.109}$$

$$\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{N}_{\nu+1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z) - \mathrm{J}_{\nu+1}(z)\,\mathrm{N}_{\nu-1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z) = \frac{4\nu}{\pi z^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\nu}, \tag{13.110}$$

$$\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{N}_{-\nu-1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z) - \mathrm{J}_{\nu+1}(z)\,\mathrm{N}_{-\nu+1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z) = -\frac{4\nu}{\pi z^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\nu}\cos\pi\nu, \tag{13.111}$$

$$\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{H}^{(1)}_{\nu+1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z) - \mathrm{J}_{\nu+1}(z)\,\mathrm{H}^{(1)}_{\nu-1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z) = \frac{4\nu\mathrm{i}}{\pi z^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\nu}, \tag{13.112}$$

$$\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{H}^{(2)}_{\nu+1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z) - \mathrm{J}_{\nu+1}(z)\,\mathrm{H}^{(2)}_{\nu-1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z) = -\frac{4\nu\mathrm{i}}{\pi z^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\nu}, \tag{13.113}$$

$$\mathrm{J}_{-\nu+1}(z)\,\mathrm{N}_{\nu+1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z) - \mathrm{J}_{-\nu-1}(z)\,\mathrm{N}_{\nu-1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z) = -\frac{4\nu}{\pi z^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\nu}\cos\pi\nu, \tag{13.114}$$

$$\mathrm{J}_{-\nu+1}(z)\,\mathrm{N}_{-\nu-1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z) - \mathrm{J}_{-\nu-1}(z)\,\mathrm{N}_{-\nu+1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z) = \frac{4\nu}{\pi z^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\nu}, \tag{13.115}$$

$$\mathrm{J}_{-\nu+1}(z)\,\mathrm{H}^{(1)}_{\nu+1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z) - \mathrm{J}_{-\nu-1}(z)\,\mathrm{H}^{(1)}_{\nu-1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z) = -\frac{4\nu\mathrm{i}}{\pi z^2}, \tag{13.116}$$

$$\mathrm{J}_{-\nu+1}(z)\,\mathrm{H}^{(2)}_{\nu+1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z) - \mathrm{J}_{-\nu-1}(z)\,\mathrm{H}^{(2)}_{\nu-1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z) = \frac{4\nu\mathrm{i}}{\pi z^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\nu}, \tag{13.117}$$

$$\mathrm{N}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{N}_{\nu+1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z) - \mathrm{N}_{\nu+1}(z)\,\mathrm{N}_{\nu-1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z) = -\frac{8\nu\mathrm{i}}{\pi z^2}\cos\pi\nu, \tag{13.118}$$

$$\mathrm{N}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{N}_{-\nu-1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z) - \mathrm{N}_{\nu+1}(z)\,\mathrm{N}_{-\nu+1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z) = \frac{4\nu\mathrm{i}}{\pi z^2}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\nu}\sin\pi\nu + 2\mathrm{i}\right), \tag{13.119}$$

$$\mathrm{N}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{H}^{(1)}_{\nu+1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z) - \mathrm{N}_{\nu+1}(z)\,\mathrm{H}^{(1)}_{\nu-1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z) = \frac{4\nu\mathrm{i}}{\pi z^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\nu}, \tag{13.120}$$

$$\mathrm{N}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{H}^{(2)}_{\nu+1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z) - \mathrm{N}_{\nu+1}(z)\,\mathrm{H}^{(2)}_{\nu-1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z) = \frac{4\nu\mathrm{i}}{\pi z^2}\left(1 - 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\nu}\right), \tag{13.121}$$

$$\mathrm{N}_{-\nu+1}(z)\,\mathrm{H}^{(1)}_{\nu+1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z) - \mathrm{N}_{-\nu-1}(z)\,\mathrm{H}^{(1)}_{\nu-1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z) = -\frac{4\nu}{\pi z^2}, \tag{13.122}$$

$$\mathrm{N}_{-\nu+1}(z)\,\mathrm{H}_{\nu+1}^{(2)}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z)-\mathrm{N}_{-\nu-1}(z)\,\mathrm{H}_{\nu-1}^{(2)}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z)=\frac{4\nu}{\pi z^2}\left(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\nu}\cos\pi\nu\right),\tag{13.123}$$

$$\mathrm{H}_{\nu-1}^{(1)}(z)\,\mathrm{H}_{\nu+1}^{(2)}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z)-\mathrm{H}_{\nu+1}^{(1)}(z)\,\mathrm{H}_{\nu-1}^{(2)}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z)=-\frac{16\nu\mathrm{i}}{\pi z^2}\cos\pi\nu.\tag{13.124}$$

同样，根据虚宗量柱函数的 Wroński 行列式

$$W\left[\mathrm{I}_\nu(z),\ \mathrm{I}_{-\nu}(z)\right]\equiv\mathrm{I}_\nu(z)\frac{\mathrm{d}\mathrm{I}_{-\nu}(z)}{\mathrm{d}z}-\mathrm{I}_{-\nu}(z)\frac{\mathrm{d}\mathrm{I}_\nu(z)}{\mathrm{d}z}=-\frac{2}{\pi z}\sin\pi\nu,\tag{13.125}$$

$$W\left[\mathrm{I}_\nu(z),\ \mathrm{K}_\nu(z)\right]\equiv\mathrm{I}_\nu(z)\frac{\mathrm{d}\mathrm{K}_\nu(z)}{\mathrm{d}z}-\mathrm{K}_\nu(z)\frac{\mathrm{d}\mathrm{I}_\nu(z)}{\mathrm{d}z}=-\frac{1}{z},\tag{13.126}$$

$$W\left[\mathrm{I}_{-\nu}(z),\ \mathrm{K}_\nu(z)\right]\equiv\mathrm{I}_{-\nu}(z)\frac{\mathrm{d}\mathrm{K}_\nu(z)}{\mathrm{d}z}-\mathrm{K}_\nu(z)\frac{\mathrm{d}\mathrm{I}_{-\nu}(z)}{\mathrm{d}z}=-\frac{1}{z},\tag{13.127}$$

$$W\left[\mathrm{I}_\nu(z),\ \mathrm{I}_{-\nu}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z)\right]\equiv\mathrm{I}_\nu(z)\frac{\mathrm{d}\mathrm{I}_{-\nu}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z)}{\mathrm{d}z}-\mathrm{I}_{-\nu}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z)\frac{\mathrm{d}\mathrm{I}_\nu(z)}{\mathrm{d}z}=-\frac{2}{\pi z}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\nu}\sin\pi\nu,\tag{13.128}$$

$$W\left[\mathrm{I}_\nu(z),\ \mathrm{K}_\nu(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z)\right]\equiv\mathrm{I}_\nu(z)\frac{\mathrm{d}\mathrm{K}_\nu(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z)}{\mathrm{d}z}-\mathrm{K}_\nu(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z)\frac{\mathrm{d}\mathrm{I}_\nu(z)}{\mathrm{d}z}=-\frac{1}{z}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\nu},\tag{13.129}$$

$$W\left[\mathrm{I}_{-\nu}(z),\ \mathrm{K}_\nu(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z)\right]\equiv\mathrm{I}_{-\nu}(z)\frac{\mathrm{d}\mathrm{K}_\nu(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z)}{\mathrm{d}z}-\mathrm{K}_\nu(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z)\frac{\mathrm{d}\mathrm{I}_{-\nu}(z)}{\mathrm{d}z}=-\frac{1}{z}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\nu},\tag{13.130}$$

$$W\left[\mathrm{K}_\nu(z),\ \mathrm{K}_\nu(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z)\right]\equiv\mathrm{K}_\nu(z)\frac{\mathrm{d}\mathrm{K}_\nu(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z)}{\mathrm{d}z}-\mathrm{K}_\nu(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z)\frac{\mathrm{d}\mathrm{K}_\nu(z)}{\mathrm{d}z}=-\frac{\mathrm{i}\pi}{z}\tag{13.131}$$

及它们的递推关系

$$\frac{2\nu}{z}\,\mathrm{I}_\nu(z)=\mathrm{I}_{\nu-1}(z)-\mathrm{I}_{\nu+1}(z),\tag{13.132}$$

$$2\frac{\mathrm{d}\mathrm{I}_\nu(z)}{\mathrm{d}z}=\mathrm{I}_{\nu-1}(z)+\mathrm{I}_{\nu+1}(z),\tag{13.133}$$

$$\frac{2\nu}{z}\,\mathrm{K}_\nu(z)=-\mathrm{K}_{\nu-1}(z)+\mathrm{K}_{\nu+1}(z),\tag{13.134}$$

$$2\frac{\mathrm{d}\mathrm{K}_\nu(z)}{\mathrm{d}z}=-\mathrm{K}_{\nu-1}(z)-\mathrm{K}_{\nu+1}(z),\tag{13.135}$$

也能得到类似的结果：

$$\mathrm{I}_\nu(z)\,\mathrm{I}_{-\nu+1}(z)-\mathrm{I}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu}(z)=-\frac{2}{\pi z}\sin\pi\nu,\tag{13.136}$$

$$\mathrm{I}_\nu(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-1}(z)-\mathrm{I}_{\nu+1}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu}(z)=-\frac{2}{\pi z}\sin\pi\nu,\tag{13.137}$$

$$\mathrm{I}_\nu(z)\,\mathrm{K}_{\nu-1}(z)+\mathrm{I}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{K}_\nu(z)=\frac{1}{z},\tag{13.138}$$

$$\mathrm{I}_\nu(z)\,\mathrm{K}_{\nu+1}(z)+\mathrm{I}_{\nu+1}(z)\,\mathrm{K}_\nu(z)=\frac{1}{z},\tag{13.139}$$

$$\mathrm{I}_{-\nu}(z)\,\mathrm{K}_{\nu-1}(z)+\mathrm{I}_{-\nu+1}(z)\,\mathrm{K}_\nu(z)=\frac{1}{z},\tag{13.140}$$

$$\mathrm{I}_{-\nu}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+1}(z)+\mathrm{I}_{-\nu-1}(z)\,\mathrm{K}_{\nu}(z)=\frac{1}{z}, \tag{13.141}$$

$$\mathrm{I}_{\nu}(z)\,\mathrm{K}_{\nu-1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z)-\mathrm{I}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z)=-\frac{1}{z}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\nu}, \tag{13.142}$$

$$\mathrm{I}_{\nu}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z)-\mathrm{I}_{\nu+1}(z)\,\mathrm{K}_{\nu}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z)=\frac{1}{z}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\nu}, \tag{13.143}$$

$$\mathrm{I}_{-\nu}(z)\,\mathrm{K}_{\nu-1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z)-\mathrm{I}_{-\nu+1}(z)\,\mathrm{K}_{\nu}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z)=-\frac{1}{z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\nu}, \tag{13.144}$$

$$\mathrm{I}_{-\nu}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z)-\mathrm{I}_{-\nu-1}(z)\,\mathrm{K}_{\nu}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z)=-\frac{1}{z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\nu}, \tag{13.145}$$

$$\mathrm{K}_{\nu}(z)\,\mathrm{K}_{\nu-1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z)+\mathrm{K}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{K}_{\nu}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z)=-\frac{\mathrm{i}\pi}{z}, \tag{13.146}$$

$$\mathrm{K}_{\nu}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z)+\mathrm{K}_{\nu+1}(z)\,\mathrm{K}_{\nu}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z)=-\frac{\mathrm{i}\pi}{z}, \tag{13.147}$$

$$\mathrm{I}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-1}(z)-\mathrm{I}_{\nu+1}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu+1}(z)=-\frac{4\nu}{\pi z^2}\sin\pi\nu, \tag{13.148}$$

$$\mathrm{I}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+1}(z)-\mathrm{I}_{\nu+1}(z)\,\mathrm{K}_{\nu-1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z)=\frac{2\nu}{z^2}, \tag{13.149}$$

$$\mathrm{I}_{-\nu+1}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+1}(z)-\mathrm{I}_{-\nu-1}(z)\,\mathrm{K}_{\nu-1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z)=\frac{2\nu}{z^2}, \tag{13.150}$$

$$\mathrm{I}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z)-\mathrm{I}_{\nu+1}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu+1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z)=\frac{4\nu}{\pi z^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\nu}\sin\pi\nu, \tag{13.151}$$

$$\mathrm{I}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z)-\mathrm{I}_{\nu+1}(z)\,\mathrm{K}_{\nu-1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z)=-\frac{2\nu}{z^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\nu}, \tag{13.152}$$

$$\mathrm{I}_{-\nu+1}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z)-\mathrm{I}_{-\nu-1}(z)\,\mathrm{K}_{\nu-1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z)=-\frac{2\nu}{z^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\nu}, \tag{13.153}$$

$$\mathrm{K}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z)-\mathrm{K}_{\nu+1}(z)\,\mathrm{K}_{\nu-1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z)=\frac{\mathrm{i}2\pi\nu}{z^2}. \tag{13.154}$$

§13.2 一些函数的级数展开

例 13.1 将函数 $\cos(k_1r\cos\phi)\,\cos(k_2r\sin\phi)$ 展开为 Fourier 级数，其中 r, k_1, k_2 均为实常数，$r>0$.

解 不妨将 r, ϕ 理解为平面极坐标，或者说，不妨设

$$x=r\cos\phi,\qquad y=r\sin\phi,$$

则 $u(x,y)=\cos k_1x\,\cos k_2y$ 满足 Helmholtz 方程

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+k^2u=0,\qquad k^2=k_1^2+k_2^2.$$

换言之，$\cos(k_1r\cos\phi)\,\cos(k_2r\sin\phi)$ 一定是方程

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2u}{\partial\phi^2}+k^2u=0$$

的解，并且满足边界条件

$$u\big|_{\phi=0}=u\big|_{\phi=2\pi},\qquad \frac{\partial u}{\partial\phi}\Big|_{\phi=0}=\frac{\partial u}{\partial\phi}\Big|_{\phi=2\pi},$$

$$u\big|_{r=0}\text{有界},$$

因此

$$\cos(k_1r\cos\phi)\,\cos(k_2r\sin\phi)=\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{J}_n(kr)\big[A_n\sin n\phi+B_n\cos n\phi\big].$$

再进一步考虑到 $\cos(k_1r\cos\phi)\,\cos(k_2r\sin\phi)$ 是 ϕ 的偶函数，因此一定有 $A_n=0$，

$$\cos(k_1r\cos\phi)\,\cos(k_2r\sin\phi)=\sum_{n=0}^{\infty}B_n\,\mathrm{J}_n(kr)\,\cos n\phi. \tag{13.155}$$

读者可以尝试直接应用 Fourier 级数公式来定出系数 B_n. 下面我们采用一个略微不同的办法，其根据是展开式 (13.155) 中的叠加系数 B_n 与 r,ϕ 无关，最多只是 k_1,k_2 及 n 的函数. 为此可以在 (13.155) 式中代入 ϕ 的特殊值，只要这样能定出 B_n 即可. 比较简单的情形是代入 $\phi=0$，同时令

$$k_1=k\cos\alpha,\qquad k_2=k\sin\alpha,$$

于是有

$$\cos(kr\cos\alpha)=\sum_{n=0}^{\infty}B_n\,\mathrm{J}_n(kr).$$

另一方面，在 Bessel 函数的生成函数展开式

$$\mathrm{e}^{z\left(t-t^{-1}\right)/2}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{J}_n(z)\,t^n,\qquad 0<|z|<\infty \tag{13.156a}$$

中代入 $z=kr$, $t=\mathrm{ie}^{\mathrm{i}\theta}$，可以得到 (即所谓的“平面波按柱面波展开”)

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr\cos\theta}=\mathrm{J}_0(kr)+2\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{i}^n\mathrm{J}_n(kr)\,\cos n\theta, \tag{13.156b}$$

亦即

$$\cos(kr\cos\theta)=\mathrm{J}_0(kr)+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\mathrm{J}_{2n}(kr)\,\cos 2n\theta. \tag{13.156c}$$

由此即可定出

$$B_n=\begin{cases}1, & n=0,\\ (-1)^k 2\cos 2k\alpha, & n=2k, k=1,2,3,\cdots,\\ 0, & n=2k+1, k=0,1,2,\cdots.\end{cases}$$

这样最后就求出了展开式

$$\begin{aligned}&\cos(kr\cos\alpha\cos\phi)\ \cos(kr\sin\alpha\sin\phi)\\&\qquad=\mathrm{J}_0(kr)+2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,\mathrm{J}_{2n}(kr)\ \cos 2n\alpha\cos 2n\phi.\end{aligned}\tag{13.157}$$

☞ **讨论**

1. 类似地，可以求得

$$\begin{aligned}&\sin(kr\cos\alpha\cos\phi)\cos(kr\sin\alpha\sin\phi)\\&\qquad=2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\mathrm{J}_{2n+1}(kr)\cos(2n+1)\alpha\cos(2n+1)\phi,\end{aligned}\tag{13.158}$$

$$\begin{aligned}&\cos(kr\cos\alpha\cos\phi)\sin(kr\sin\alpha\sin\phi)\\&\qquad=2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\mathrm{J}_{2n+1}(kr)\sin(2n+1)\alpha\sin(2n+1)\phi.\end{aligned}\tag{13.159}$$

2. 对于 $\sin(kr\cos\alpha\cos\phi)\sin(kr\sin\alpha\sin\phi)$，我们同样可以断定

$$\sin(kr\cos\alpha\cos\phi)\sin(kr\sin\alpha\sin\phi)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n\mathrm{J}_n(kr)\sin n\phi.$$

现在的问题是，我们如果代入 $\phi=0$ 或 $\phi=\pi/2$，都无法定出系数 C_n. 为了克服这一困难，可以将上式两端同时除以 $\sin\phi$，而后再取极限 $\phi\to 0$. 其实，我们也可以直接计算：

$$\begin{aligned}&\sin(kr\cos\alpha\cos\phi)\sin(kr\sin\alpha\sin\phi)\\&\qquad=\frac{1}{2}\Big\{\cos\big[kr\cos(\alpha+\phi)\big]-\cos\big[kr\cos(\alpha-\phi)\big]\Big\}\\&\qquad=\frac{1}{2}\times\mathrm{Re}\Big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr\cos(\alpha+\phi)}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr\cos(\alpha-\phi)}\Big)\\&\qquad=\mathrm{Re}\Big\{\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{i}^n\mathrm{J}_n(kr)\big[\cos n(\alpha+\phi)-\cos n(\alpha-\phi)\big]\Big\}\\&\qquad=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\mathrm{J}_{2n}(kr)\sin 2n\alpha\ \sin 2n\phi.\end{aligned}\tag{13.160}$$

(13.157) — (13.159) 诸式也可以按此法直接计算.

以上的讨论都是遵循 Fourier 展开的思路而展开的，但是可以换一个角度来考察上面得到的结果. 我们如果直接从展开式 (13.156b) 出发，将该式中的 θ 换成

$\phi+\alpha$ 或 $\phi-\alpha$，则有

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{ikr\cos(\phi+\alpha)} &= \mathrm{e}^{ikr(\cos\phi\cos\alpha-\sin\phi\sin\alpha)} \\
&= \mathrm{J}_0(kr)+2\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{i}^n\mathrm{J}_n(kr)\cos n(\phi+\alpha) \\
&= \mathrm{J}_0(kr)+2\sum_{n=1}^{\infty}rmi^n\mathrm{J}_n(kr)\big(\cos n\phi\,\cos n\alpha-\sin n\phi\,\sin n\alpha\big),
\end{aligned}\tag{13.161}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{ikr\cos(\phi-\alpha)} &= \mathrm{e}^{ikr(\cos\phi\cos\alpha+\sin\phi\sin\alpha)} \\
&= \mathrm{J}_0(kr)+2\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{i}^n\mathrm{J}_n(kr)\cos n(\phi-\alpha) \\
&= \mathrm{J}_0(kr)+2\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{i}^n\mathrm{J}_n(kr)\big(\cos n\phi\,\cos n\alpha+\sin n\phi\,\sin n\alpha\big).
\end{aligned}\tag{13.162}$$

分别比较实部与虚部，即得

$$\cos\big[kr(\cos\alpha\cos\phi-\sin\alpha\sin\phi)\big] = \mathrm{J}_0(kr)+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\mathrm{J}_{2n}(kr)\cos 2n(\phi+\alpha),\tag{13.163a}$$

$$\cos\big[kr(\cos\alpha\cos\phi+\sin\alpha\sin\phi)\big] = \mathrm{J}_0(kr)+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\mathrm{J}_{2n}(kr)\cos 2n(\phi-\alpha),\tag{13.163b}$$

$$\sin\big[kr(\cos\alpha\cos\phi-\sin\alpha\sin\phi)\big] = 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\mathrm{J}_{2n+1}(kr)\cos(2n+1)(\phi+\alpha),\tag{13.164a}$$

$$\sin\big[kr(\cos\alpha\cos\phi+\sin\alpha\sin\phi)\big] = 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\mathrm{J}_{2n+1}(kr)\cos(2n+1)(\phi-\alpha).\tag{13.164b}$$

将 (13.163a) 与 (13.163b) 式相加减，就可以得到 (13.157) 与 (13.160) 两式. 同样，将 (13.164a) 与 (13.164b) 式相加减，就可以得到 (13.158) 与 (13.159) 两式.

本着这样的思路，我们还可以在 (13.156a) 式中代入 $z=kr$, $t=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，从而得到

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{ikr\sin\theta} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{J}_n(kr)\,\mathrm{e}^{in\theta} \\
&= \mathrm{J}_0(kr)+2\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{J}_{2n}(kr)\cos 2n\theta+2\mathrm{i}\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{J}_{2n+1}(kr)\sin(2n+1)\theta.
\end{aligned}\tag{13.156d}$$

同样将 θ 改写为 $\phi\pm\alpha$，而后分别比较实部与虚部，就有

$$\cos\left[kr(\sin\phi\cos\alpha+\cos\phi\sin\alpha)\right]=\mathrm{J}_0(kr)+2\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{J}_{2n}(kr)\cos 2n(\phi+\alpha),\quad(13.165)$$

$$\cos\left[kr(\sin\phi\cos\alpha-\cos\phi\sin\alpha)\right]=\mathrm{J}_0(kr)+2\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{J}_{2n}(kr)\cos 2n(\phi-\alpha),\quad(13.166)$$

$$\sin\left[kr(\sin\phi\cos\alpha+\cos\phi\sin\alpha)\right]=2\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{J}_{2n}(kr)\sin(2n+1)(\phi+\alpha),\quad(13.167)$$

$$\sin\left[kr(\sin\phi\cos\alpha-\cos\phi\sin\alpha)\right]=2\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{J}_{2n}(kr)\sin(2n+1)(\phi-\alpha).\quad(13.168)$$

将 (13.165) 与 (13.166) 式相加减，就又将得到

$$\cos(kr\cos\alpha\sin\phi)\cos(kr\sin\alpha\cos\phi)=\mathrm{J}_0(kr)+2\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{J}_{2n}(kr)\cos 2n\alpha\cos 2n\phi,\quad(13.169)$$

$$\sin(kr\cos\alpha\sin\phi)\sin(kr\sin\alpha\cos\phi)=2\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{J}_{2n}(kr)\sin 2n\alpha\sin 2n\phi.\quad(13.170)$$

将 (13.167) 与 (13.168) 式相加减，则会得到

$$\sin(kr\cos\alpha\sin\phi)\cos(kr\sin\alpha\cos\phi)=2\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{J}_{2n+1}(kr)\cos(2n+1)\alpha\sin(2n+1)\phi,\quad(13.171)$$

$$\cos(kr\cos\alpha\sin\phi)\sin(kr\sin\alpha\cos\phi)=2\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{J}_{2n+1}(kr)\sin(2n+1)\alpha\cos(2n+1)\phi.\quad(13.172)$$

注意 (13.156a) 式对复数 z 亦成立，因此我们也可以在该式中代入纯虚数 $z=\mathrm{i}kr$，重复上面的计算过程，又能导出

$$\mathrm{e}^{-kr\cos(\phi+\alpha)}=\mathrm{I}_0(kr)+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\mathrm{I}_n(kr)\cos n(\phi+\alpha),\quad(13.173)$$

$$\mathrm{e}^{-kr\cos(\phi-\alpha)}=\mathrm{I}_0(kr)+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\mathrm{I}_n(kr)\cos n(\phi-\alpha),\quad(13.174)$$

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{-kr\sin(\phi+\alpha)}=&\ \mathrm{I}_0(kr)+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\mathrm{I}_{2n}(kr)\cos 2n(\phi+\alpha)\\&-2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\mathrm{I}_{2n+1}(kr)\sin(2n+1)(\phi+\alpha),\end{aligned}\quad(13.175)$$

$$\begin{aligned}e^{-kr\sin(\phi-\alpha)} &= I_0(kr)+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n I_{2n}(kr)\cos 2n(\phi-\alpha)\\&\quad -2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n I_{2n+1}(kr)\sin(2n+1)(\phi-\alpha).\end{aligned}\tag{13.176}$$

将 (13.173) 与 (13.174) 两式相加减，即得

$$e^{-kr\cos\alpha\cos\phi}\cosh(kr\sin\alpha\sin\phi)$$
$$= I_0(kr)+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n I_n(kr)\,\cos n\phi\,\cos n\alpha,\tag{13.177}$$

$$e^{-kr\cos\alpha\cos\phi}\sinh(kr\sin\alpha\sin\phi)$$
$$= 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} I_n(kr)\,\sin n\phi\,\sin n\alpha.\tag{13.178}$$

由此又能进一步导出

$$\cosh(kr\cos\alpha\cos\phi)\cosh(kr\sin\alpha\sin\phi)$$
$$= I_0(kr)+2\sum_{n=1}^{\infty} I_{2n}(kr)\,\cos 2n\phi\,\cos 2n\alpha,\tag{13.179}$$

$$\sinh(kr\cos\alpha\cos\phi)\cosh(kr\sin\alpha\sin\phi)$$
$$= 2\sum_{n=1}^{\infty} I_{2n+1}(kr)\,\cos(2n+1)\phi\,\cos(2n+1)\alpha,\tag{13.180}$$

$$\cosh(kr\cos\alpha\cos\phi)\sinh(kr\sin\alpha\sin\phi)$$
$$= 2\sum_{n=1}^{\infty} I_{2n+1}(kr)\,\sin(2n+1)\phi\,\sin(2n+1)\alpha,\tag{13.181}$$

$$\sinh(kr\cos\alpha\cos\phi)\sinh(kr\sin\alpha\sin\phi)$$
$$= 2\sum_{n=1}^{\infty} I_{2n}(kr)\,\sin 2n\phi\,\sin 2n\alpha.\tag{13.182}$$

将 (13.175) 与 (13.176) 两式相加减，又得

$$e^{-kr\cos\alpha\sin\phi}\cosh(kr\sin\alpha\cos\phi)$$
$$\begin{aligned}&= I_0(kr)+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n I_{2n}(kr)\,\cos 2n\phi\,\cos 2n\alpha\\&\quad -2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n I_{2n+1}(kr)\sin(2n+1)\phi\cos(2n+1)\alpha,\end{aligned}\tag{13.183}$$

$$\begin{aligned}&\mathrm{e}^{-kr\cos\alpha\cos\phi}\sinh(kr\sin\alpha\sin\phi)\\&\qquad=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\mathrm{I}_{2n}(kr)\,\sin 2n\phi\,\sin 2n\alpha\\&\qquad\quad+2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\mathrm{I}_{2n+1}(kr)\cos(2n+1)\phi\sin(2n+1)\alpha.\end{aligned}\tag{13.184}$$

由此也能进一步导出

$$\begin{aligned}&\cosh(kr\cos\alpha\sin\phi)\cosh(kr\sin\alpha\cos\phi)\\&\qquad=\mathrm{I}_0(kr)+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\mathrm{I}_{2n}(kr)\,\cos 2n\phi\,\cos 2n\alpha,\end{aligned}\tag{13.185}$$

$$\begin{aligned}&\sinh(kr\cos\alpha\sin\phi)\cosh(kr\sin\alpha\cos\phi)\\&\qquad=2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\mathrm{I}_{2n+1}(kr)\sin(2n+1)\phi\cos(2n+1)\alpha,\end{aligned}\tag{13.186}$$

$$\begin{aligned}&\cosh(kr\cos\alpha\sin\phi)\sinh(kr\sin\alpha\cos\phi)\\&\qquad=2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\mathrm{I}_{2n+1}(kr)\cos(2n+1)\phi\sin(2n+1)\alpha,\end{aligned}\tag{13.187}$$

$$\begin{aligned}&\sinh(kr\cos\alpha\sin\phi)\sinh(kr\sin\alpha\cos\phi)\\&\qquad=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\mathrm{I}_{2n}(kr)\,\sin 2n\phi\,\sin 2n\alpha.\end{aligned}\tag{13.188}$$

例 13.2 将函数 $\mathrm{e}^{r\cos\theta}\mathrm{J}_0(r\sin\theta)$ 按 Legendre 多项式 $\mathrm{P}_l(\cos\theta)$ 展开，其中 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$ 为球坐标系中 (r,θ,ϕ) 点的极角 (纬度).

解 本例题的问题明确: 所谓将函数 $\mathrm{e}^{r\cos\theta}\mathrm{J}_0(r\sin\theta)$ 按 Legendre 多项式展开，即要求将此函数表示为级数

$$\mathrm{e}^{r\cos\theta}\mathrm{J}_0(r\sin\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}A_l\,\mathrm{P}_l(\cos\theta),\tag{13.189a}$$

且其展开系数为

$$A_l=\frac{2l+1}{2}\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{r\cos\theta}\,\mathrm{J}_0(r\sin\theta)\,\mathrm{P}_l(\cos\theta)\,\sin\theta\,\mathrm{d}\theta.\tag{13.189b}$$

但此积分并不易计算. 最容易想到的办法似乎就是将函数 $\mathrm{e}^{r\cos\theta}$ 与 $\mathrm{J}_0(r\sin\theta)$ 分别展开为无穷级数，逐项积分后再求出二重级数的和函数. 可以预料，二重级数的求和问题可能会遇到困难.

其实本题的处理方法与上面两题存在某种相似性：最简单的办法是从不同的坐标系考察所要展开的函数．本题是要将函数 $\mathrm{e}^{r\cos\theta}\,\mathrm{J}_0(r\sin\theta)$ 变换到柱坐标系 (ρ,ϕ,z) 中，我们立即就能看出 $\mathrm{e}^{r\cos\theta}\,\mathrm{J}_0(r\sin\theta)=\mathrm{e}^z\,\mathrm{J}_0(\rho)$ 是 Laplace 方程的解，与 ϕ 角无关 (即具有关于 z 轴的旋转不变性)，且在坐标原点有界，因此，它 (在球坐标系中) 必然可以展开为

$$\mathrm{e}^{r\cos\theta}\mathrm{J}_0(r\sin\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}C_l\,r^l\,\mathrm{P}_l(\cos\theta),$$

而且，为了定出叠加常数 C_l，甚至也不必计算积分 (13.189b)，而只要在上式中代入一个特殊的 r 或 θ 值即可．最简单的当然是令 $\theta=0$，从而定出 $C_l=1/l!$，因此就得到

$$\mathrm{e}^{r\cos\theta}\mathrm{J}_0(r\sin\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{r^l}{l!}\mathrm{P}_l(\cos\theta).\tag{13.190}$$

☞ **讨论**

1. 这是应用 (偏) 微分方程作函数展开的又一个例子．我们甚至也可以应用这种方法，导出“平面波按球面波展开”公式

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr\cos\theta}=\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\,\mathrm{i}^l\,\mathrm{j}_l(kr)\,\mathrm{P}_l(\cos\theta).\tag{13.191}$$

其基本思路是：因为函数 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr\cos\theta}$ 是 Helmholtz 方程 $\nabla^2u+k^2u=0$ 的解，所以一定有

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr\cos\theta}=\sum_{l=0}^{\infty}C_l\,\mathrm{j}_l(kr)\,\mathrm{P}_l(\cos\theta),$$

而后比较等式两端在 $r\to\infty$ 的渐近展开即可定出叠加系数 $C_l=(2l+1)\mathrm{i}^l$．

2. 反过来，由 (13.190) 式还能导出积分

$$\frac{2l+1}{2}\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{r\cos\theta}\mathrm{J}_0(r\sin\theta)\,\mathrm{P}_l(\cos\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{r^l}{l!}.\tag{13.192}$$

3. 如果将 (13.190) 式的左端作 Taylor 展开，我们又能得到

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{r\cos\theta}\,\mathrm{J}_0(r\sin\theta)&=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}(r\cos\theta)^m\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,n!}\left(\frac{r\sin\theta}{2}\right)^{2n}\\&=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{m!\,n!\,n!}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\cos^m\theta\sin^{2n}\theta\,r^{m+2n}\\&=\sum_{l=0}^{\infty}\left[\sum_{n=0}^{[l/2]}\frac{(-1)^n}{n!\,n!\,(l-2n)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\cos^{l-2n}\theta\sin^{2n}\theta\right]r^l,\end{aligned}$$

从而导出 Legendre 多项式的又一个表达式

$$\mathrm{P}_l(\cos\theta)=\sum_{n=0}^{[l/2]}\frac{(-1)^n l!}{2^{2n}n!\,n!\,(l-2n)!}\cos^{l-2n}\theta\sin^{2n}\theta \tag{13.193a}$$

或

$$\mathrm{P}_l(x)=\sum_{n=0}^{[l/2]}\frac{(-1)^n l!}{2^{2n}n!\,n!\,(l-2n)!}\big(1-x^2\big)^n x^{l-2n}. \tag{13.193b}$$

4. 例 10.6 讨论过本例题的反问题，即求 (13.190) 式右端级数的和函数.

例 13.3 将函数 $\mathrm{e}^{r\cos\theta}\mathrm{J}_m(r\sin\theta)$ 按 $\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)$ 展开.

解 类似于例 13.2，将函数 $\mathrm{e}^{r\cos\theta}\mathrm{J}_m(r\sin\theta)\cos m\phi$ 变换到柱坐标系，就能看出它是 Laplace 方程的解，而对于固定的 m，此方程在球坐标系下的相应特解为

$$r^l\,\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\cos m\phi,\qquad l=m,m+1,m+2,\cdots,$$

所以应该有展开式

$$\mathrm{e}^{r\cos\theta}\mathrm{J}_m(r\sin\theta)=\sum_{l=m}^{\infty}A_l\,r^l\,\mathrm{P}_l^m(\cos\theta).$$

这里的叠加系数 A_l，其实还会依赖于 m (作为参数). 为了定出 A_l，现在需要将上式两端同除以 $\sin^m\theta$，而后代入 $\theta=0$. 对于左端，有

$$\left.\frac{\mathrm{J}_m(r\sin\theta)}{\sin^m\theta}\right|_{\theta=0}=\frac{1}{m!}\left(\frac{r}{2}\right)^m;$$

而对于右端，则有

$$\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)}{\sin^m\theta}\right|_{\theta=0}&=(-1)^m\left.\frac{\mathrm{d}^m\mathrm{P}_l(x)}{\mathrm{d}x^m}\right|_{x=1}=\frac{(-1)^m}{2^l l!}\left.\frac{\mathrm{d}^{l+m}}{\mathrm{d}x^{l+m}}\big(x^2-1\big)^l\right|_{x=1}\\&=\frac{(-1)^m}{2^l l!}\frac{(l+m)!}{l!m!}\left.\frac{\mathrm{d}^l(x-1)^l}{\mathrm{d}x^l}\frac{\mathrm{d}^m(x+1)^l}{\mathrm{d}x^m}\right|_{x=1}\\&=\frac{(-1)^m}{2^l l!}\frac{(l+m)!}{l!m!}\frac{l!\,l!}{(l-m)!}(x+1)^{l-m}\Big|_{x=1}=\frac{(-1)^m}{2^m m!}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}.\end{aligned}$$

这样就得到等式

$$\frac{1}{m!}\left(\frac{r}{2}\right)^m\mathrm{e}^r=\sum_{l=m}^{\infty}A_l\frac{(-1)^m}{2^m m!}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}r^l.$$

另一方面，由

$$\frac{1}{m!}\left(\frac{r}{2}\right)^m\mathrm{e}^r=\frac{1}{m!}\left(\frac{r}{2}\right)^m\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^n}{n!}=\frac{1}{2^m m!}\sum_{l=m}^{\infty}\frac{r^l}{(l-m)!},$$

从而可以定出

$$A_l = \frac{(-1)^m}{(l+m)!},$$

最后就得到展开式

$$\mathrm{e}^{r\cos\theta}\mathrm{J}_m(r\sin\theta) = \sum_{l=m}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(l+m)!}\, r^l\, \mathrm{P}_l^m(\cos\theta). \tag{13.194}$$

例 13.4　将函数 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr\cos\theta}\mathrm{J}_0(r\sin\theta)$ 按 Legendre 多项式展开.

解　仿照前两个例子，首先验证函数 $u(r,\theta) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}kr\cos\theta}\mathrm{J}_0(r\sin\theta)$ 是 Helmholtz 方程

$$\nabla^2 u + (k^2+1)u = 0$$

的解，因此，一定有

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr\cos\theta}\mathrm{J}_0(r\sin\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l\, \mathrm{j}_l\big(\sqrt{k^2+1}\,r\big)\, \mathrm{P}_l(\cos\theta).$$

令 $\theta=0$，得

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr} = \sum_{l=0}^{\infty} A_l\, \mathrm{j}_l\big(\sqrt{k^2+1}\,r\big). \tag{13.195}$$

问题是如何定出系数 A_l. 我们现在甚至不能在 (13.195) 式两端代入 k 的特殊值 (例如令 $k=0$)，因为叠加系数 A_l 原则上还是 k 的函数. 为了定出叠加系数 A_l，我们不妨将上式两端展开为 r 的幂级数，而后利用 (Taylor 展开的) 唯一性定系数:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^n}{n!}(kr)^n &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sum_{l=0}^{\infty} A_l \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(m+l+3/2)} \left(\frac{\sqrt{k^2+1}}{2}r\right)^{2m+l} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{m=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(n-m+3/2)} A_{n-2m}\right]\left(\frac{\sqrt{k^2+1}}{2}r\right)^n,\end{aligned}$$

从而得到叠加系数 A_l 的递推关系

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sum_{m=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(n-m+3/2)} A_{n-2m} = \frac{\mathrm{i}^n}{n!}\left(\frac{2k}{\sqrt{k^2+1}}\right)^n.$$

逐次取 $n=0,1,2,\cdots$，这样就能求出 A_0, A_1, A_2, $\cdots$.

其实更简单的办法是利用 (13.191) 式也将 (13.195) 式左端作适当的展开. 为此令 $\cos\alpha = k/\sqrt{k^2+1}$，则

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{k^2+1}\,r\cos\alpha} = \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\mathrm{i}^l \mathrm{j}_l\big(\sqrt{k^2+1}\,r\big)\, \mathrm{P}_l(\cos\alpha).$$

与 (13.195) 式比较，就定出

$$A_l=(2l+1)\mathrm{i}^l\mathrm{P}_l(\cos\alpha)=(2l+1)\mathrm{i}^l\mathrm{P}_l\big(k/\sqrt{k^2+1}\big). \tag{13.196}$$

因此最后就得到展开式

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr\cos\theta}\mathrm{J}_0(r\sin\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\,\mathrm{i}^l\,\mathrm{j}_l\big(\sqrt{k^2+1}\,r\big)\,\mathrm{P}_l(\cos\theta)\,\mathrm{P}_l\big(k/\sqrt{k^2+1}\big). \tag{13.197}$$

或者引进记号

$$t=r\sqrt{k^2+1},\qquad r=t\,\sin\alpha,\qquad kr=t\,\cos\alpha,$$

则 (13.197) 式可以改写成

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\cos\alpha\cos\theta}\mathrm{J}_0(t\sin\alpha\sin\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\,\mathrm{i}^l\,\mathrm{j}_l(t)\,\mathrm{P}_l(\cos\alpha)\,\mathrm{P}_l(\cos\theta). \tag{13.197$'$}$$

这里遗留一个问题，即根据

$$\sum_{l=0}^{\infty}A_l\,\mathrm{j}_l\big(\sqrt{k^2+1}\,r\big)=\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\,\mathrm{i}^l\,\mathrm{j}_l\big(\sqrt{k^2+1}\,r\big)\,\mathrm{P}_l\big(k/\sqrt{k^2+1}\big) \tag{13.197$''$}$$

而定出 A_l 的合法性. 换句话说，函数 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}$ 按球 Bessel 函数 $\mathrm{j}_l\big(\sqrt{k^2+1}\,r\big)$ 展开是否具有唯一性? 也就是说，展开式

$$\sum_{l=0}^{\infty}C_l\,\mathrm{j}_l\big(\sqrt{k^2+1}\,r\big)=\sum_{l=0}^{\infty}\Big[(2l+1)\,\mathrm{i}^l\,\mathrm{P}_l\big(k/\sqrt{k^2+1}\big)-A_l\Big]\,\mathrm{j}_l\big(\sqrt{k^2+1}\,r\big)=0$$

是否意味着一定有 $C_l=0$? 其实，这实质上还是一个 Taylor 展开的唯一性问题，因为我们将 (13.197″) 式两端进一步展开为 r 的幂级数，则按幂级数展开的唯一性，两端 r^0 项的系数 (注意它只来自 $\mathrm{j}_0\big(\sqrt{k^2+1}\,r\big)$ 项) 必相等，即

$$A_0=1.$$

因此 (13.197″) 式约化为

$$\sum_{l=1}^{\infty}A_l\,\mathrm{j}_l\big(\sqrt{k^2+1}\,r\big)=\sum_{l=1}^{\infty}(2l+1)\,\mathrm{i}^l\,\mathrm{j}_l\big(\sqrt{k^2+1}\,r\big)\,\mathrm{P}_l\big(k/\sqrt{k^2+1}\big).$$

然后再比较等式两端 r^1 项的系数 (它只来自 $\mathrm{j}_1\big(\sqrt{k^2+1}\,r\big)$ 项)，又得到

$$A_1=3\mathrm{i}\,\mathrm{P}_1\big(k/\sqrt{k^2+1}\big).$$

如此继续，就可以证得 (13.196) 式.

上面的论证过程还可以略加修改：首先在 (13.197″) 式两端代入 $r=0$，从而导出 $A_0=1$；而后两端对 r 求导再代入 $r=0$，又得到 $A_1=3\mathrm{i}\,\mathrm{P}_1\big(k/\sqrt{k^2+1}\big)$；如此继续，亦可证得 (13.196) 式. 我们当然熟悉，这正是证明 Taylor 展开唯一性所用的方法.

例 13.5 将例 13.3 与 13.4 结合起来，也可以将函数 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr\cos\theta}\mathrm{J}_m(r\sin\theta)$ 按 $\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)$ 展开. 这时因为 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr\cos\theta}\mathrm{J}_m(r\sin\theta)\cos m\phi$ 也是 Helmholtz 方程

$$\nabla^2 u+(k^2+1)u=0$$

的解，因此有

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr\cos\theta}\mathrm{J}_m(r\sin\theta)=\sum_{l=m}^{\infty}A_l\,\mathrm{j}_l\big(\sqrt{k^2+1}\,r\big)\,\mathrm{P}_l^m(\cos\theta).$$

两端同除以 $\sin^m\theta$，再令 $\theta\to 0$，则得到

$$r^m\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}=\sum_{l=m}^{\infty}(-1)^m A_l\,\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\,\mathrm{j}_l\big(\sqrt{k^2+1}\,r\big).$$

现在的问题是如何将左端的函数也按球 Bessel 函数 $\mathrm{j}_l\big(\sqrt{k^2+1}\,r\big)$ 展开，从而定出叠加系数 A_l. 为此仍令

$$t=r\sqrt{k^2+1},\qquad r=t\,\sin\alpha,\qquad kr=t\,\cos\alpha,$$

于是

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\cos\alpha}=\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\,\mathrm{i}^l\,\mathrm{j}_l(t)\,\mathrm{P}_l(\cos\alpha)$$

或

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}=\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\,\mathrm{i}^l\,\mathrm{j}_l(t)\,\mathrm{P}_l(x).$$

两端对 x 求导 m 次，然后乘以 $\sin^m\alpha$，得

$$(\mathrm{i}r)^m\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}=\sum_{l=m}^{\infty}(2l+1)\,\mathrm{i}^l\,\mathrm{j}_l(t)\,(-1)^m\mathrm{P}_l^m(x),$$

所以就得到

$$r^m\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}=r^m\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\cos\alpha}=\sum_{l=m}^{\infty}(2l+1)\,\mathrm{i}^{l+m}\,\mathrm{j}_l(t)\,\mathrm{P}_l^m(\cos\alpha)=\sum_{l=m}^{\infty}(-1)^m\,A_l\,\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\,\mathrm{j}_l(t),$$

从而定出

$$A_l=(2l+1)\,\mathrm{i}^{l-m}\,\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\,\mathrm{P}_l^m(\cos\alpha).$$

最后就得到展开式

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr\cos\theta}\mathrm{J}_m(r\sin\theta)=\sum_{l=m}^{\infty}(2l+1)\,\mathrm{i}^{l-m}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\,\mathrm{j}_l\big(\sqrt{k^2+1}\,r\big)\,\mathrm{P}_l^m\big(k/\sqrt{k^2+1}\big)\,\mathrm{P}_l^m(\cos\theta),\tag{13.198}$$

或者写成

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\cos\alpha\cos\theta}\mathrm{J}_m(t\sin\alpha\sin\theta)=\sum_{l=m}^{\infty}(2l+1)\,\mathrm{i}^{l-m}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\,\mathrm{j}_l(t)\,\mathrm{P}_l^m(\cos\alpha)\,\mathrm{P}_l^m(\cos\theta).\tag{13.198$'$}$$

☞ **讨论**　对 (13.197′) 和 (13.198′) 两式，还可以有另一番解读. 为此，令 (θ,ϕ) 与 (α,ϕ') 的夹角为 γ，即

$$\cos\gamma=\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\sin\alpha\cos(\phi-\phi'),$$

则按照 (13.191) 式及连带 Legendre 函数的加法公式 (10.116)，有

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\cos\gamma}&=\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\,\mathrm{i}^l\,\mathrm{j}_j(t)\,\mathrm{P}_l(\cos\gamma)\\&=\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\,\mathrm{i}^l\,\mathrm{j}_l(t)\,\mathrm{P}_l(\cos\theta)\,\mathrm{P}_l(\cos\alpha)\\&\quad+2\sum_{l=1}^{\infty}(2l+1)\,\mathrm{i}^l\,\mathrm{j}_l(t)\sum_{m=1}^{l}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\,\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\,\mathrm{P}_l^m(\cos\alpha)\,\cos m(\phi-\phi'),\end{aligned}$$

另一方面，按照 (13.156b) 式，又可作展开

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\cos\gamma}&=\mathrm{e}^{\mathrm{i}t[\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\sin\alpha\cos(\phi-\phi')]}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\cos\theta\cos\alpha}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\sin\theta\sin\alpha\cos(\phi-\phi')}\\&=\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\cos\theta\cos\alpha}\left[\mathrm{J}_0(t\sin\theta\sin\alpha)+2\sum_{m=1}^{\infty}\mathrm{i}^m\mathrm{J}_m(t\sin\theta\sin\alpha)\cos m(\phi-\phi')\right].\end{aligned}$$

两式比较，就可以得到 (13.197′) 和 (13.198′) 式.

例 13.6　将函数 $\sin\dfrac{\sqrt{z+1}-1}{2}t\sin\dfrac{\sqrt{z+1}+1}{2}t$ 在 $z=0$ 点作 Taylor 展开.

解　这是一个有直接物理应用的例题. 因为

$$\sin\frac{\sqrt{z+1}-1}{2}t\;\sin\frac{\sqrt{z+1}+1}{2}t=\frac{\cos t-\cos\sqrt{z+1}t}{2}$$

是单值函数，在 z 点解析，故可作 Taylor 展开：

$$\begin{aligned}\cos\sqrt{z+1}t &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(z+1)^n t^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left[\sum_{l=0}^{n}\frac{n!}{l!(n-l)!}z^l\right]t^{2n} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!}\left[\sum_{n=l}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\frac{n!}{(n-l)!}t^{2n}\right]z^l \\ &= \sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!}\left[\sum_{n=l}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1/2)}\frac{\sqrt{\pi}}{(n-l)!}\left(\frac{t}{2}\right)^{2n}\right]z^l \\ &= \sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!}\left[\sqrt{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+l}}{k!\,\Gamma(k+l+1/2)}\left(\frac{t}{2}\right)^{2n}\right]z^l \\ &= 2\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l}{l!}\mathrm{j}_{l-1}(t)\left(\frac{t}{2}\right)^{l+1}z^l \\ &= \sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l}{(2l)!!}t^{l+1}\mathrm{j}_{l-1}(t)z^l,\end{aligned}\tag{13.199}$$

所以

$$\begin{aligned}\sin\frac{\sqrt{z+1}-1}{2}t\,\sin\frac{\sqrt{z+1}+1}{2}t &= \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(-1)^{l-1}}{(2l)!!}t^{l+1}\mathrm{j}_{l-1}(t)z^l \\ &= \frac{1}{2}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l}{(2l+2)!!}t^{l+2}\mathrm{j}_l(t)z^{l+1}.\end{aligned}\tag{13.200}$$

从以上计算过程可以看出，级数 (13.200) 在整个 z 平面上都收敛.

在讨论多原子分子的转动光谱和原子核的转动能谱时，可以用到这个结果. 根据量子力学的计算，这类体系的能级是

$$E(I) = \frac{\hbar^2}{2\mathscr{I}}I(I+1),\tag{13.201}$$

其中 $\hbar$ 是 Planck 常数，$\mathscr{I}$ 是体系的转动惯量，I 是体系的总角动量. 按照量子群的理论，上述能级公式可修改为“q 转子”转动能级公式

$$E(I) = \frac{\hbar^2}{2\mathscr{I}}[I][I+1],\tag{13.202}$$

其中 $[x]$ 称为 q 数：

$$[x] = \frac{q^x - q^{-x}}{q - q^{-1}} = \frac{\sinh(x\ln q)}{\sinh(\ln q)}.\tag{13.203}$$

特别是当 $\ln q$ 为纯虚数 (记为 $\mathrm{i}\gamma$) 时，有

$$E(I) = \frac{\hbar^2}{2\mathscr{I}}\frac{\sin I\gamma\,\sin(I+1)\gamma}{\sin^2\gamma} = \frac{\hbar^2}{2\mathscr{I}}\frac{\cos\gamma - \cos(2I+1)\gamma}{2\sin^2\gamma}.\tag{13.204}$$

为了研究 (13.204) 式与 (13.201) 式之间的差异，可以将 (13.204) 式展开为 $I(I+1)$ 的级数. 这只需在 (13.200) 式中代入 $z=4I(I+1)$ 即可得

$$\cos(2I+1)\gamma=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l}{(2l)!!}\,\gamma^{l+1}\,\mathrm{j}_{l-1}(\gamma)\,[4I(I+1)]^l. \tag{13.200'}$$

因此，(13.204) 式可以展开为

$$E(I)=\frac{\hbar^2}{2\mathscr{I}}\,\frac{1}{\mathrm{j}_0^2(\gamma)}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l}{(l+1)!}\,2^l\,\gamma^l\,\mathrm{j}_l(\gamma)\,[I(I+1)]^{l+1}. \tag{13.205}$$

§13.3 有关 Bessel 函数零点的级数

设 $\zeta_{\nu,i}$ 是 Bessel 函数 $\mathrm{J}_\nu(x)$ 的第 i 个正零点，$\nu\geqslant 0$，求级数和

$$S_{2n,\nu}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\zeta_{\nu,i}^{2n}}.$$

考虑函数 $(1-x^2)^n x^\nu$. 可按本征函数组 $\{\mathrm{J}_\nu(\zeta_{\nu,i}x), i=1,2,3,\cdots\}$ 展开得

$$(1-x^2)^n x^\nu=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_{\nu,i}(n)\mathrm{J}_\nu(\zeta_{\nu,i}x), \tag{13.206}$$

$$\alpha_{\nu,i}(n)=\frac{2}{\mathrm{J}_{\nu+1}^2(\zeta_{\nu,i})}\int_0^1(1-x^2)^n x^{\nu+1}\mathrm{J}_\nu(\zeta_{\nu,i}x)\,\mathrm{d}x. \tag{13.207}$$

利用 Bessel 函数的递推关系

$$\frac{1}{\zeta_{\nu,i}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^\nu\mathrm{J}_\nu(\zeta_{\nu,i}x)\right]=x^\nu\mathrm{J}_{\nu-1}(\zeta_{\nu,i}x), \tag{13.208a}$$

$$\frac{1}{\zeta_{\nu,i}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^{-\nu}\mathrm{J}_\nu(\zeta_{\nu,i}x)\right]=-x^{-\nu}\mathrm{J}_{\nu+1}(\zeta_{\nu,i}x), \tag{13.208b}$$

容易求出

$$\alpha_{\nu,i}(0)=\frac{2}{\mathrm{J}_{\nu+1}^2(\zeta_{\nu,i})}\int_0^1 x^{\nu+1}\mathrm{J}_\nu(\zeta_{\nu,i}x)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\zeta_{\nu,i}\,\mathrm{J}_{\nu+1}(\zeta_{\nu,i})},$$

$$\begin{aligned}\alpha_{\nu,i}(1)&=\frac{2}{\mathrm{J}_{\nu+1}^2(\zeta_{\nu,i})}\int_0^1(1-x^2)\,x^{\nu+1}\mathrm{J}_\nu(\zeta_{\nu,i}x)\,\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{\mathrm{J}_{\nu+1}^2(\zeta_{\nu,i})}\frac{2}{\zeta_{\nu,i}}\int_0^1 x^{\nu+2}\mathrm{J}_{\nu+1}(\zeta_{\nu,i}x)\,\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{\mathrm{J}_{\nu+1}^2(\zeta_{\nu,i})}\frac{2}{\zeta_{\nu,i}^2}\mathrm{J}_{\nu+2}(\zeta_{\nu,i})=\frac{2^3(\nu+1)}{\zeta_{\nu,i}^3\,\mathrm{J}_{\nu+1}(\zeta_{\nu,i})}.\end{aligned}$$

更进一步，还有

$$\begin{aligned}\alpha_{\nu,i}(n) &= \frac{2}{\mathrm{J}_{\nu+1}^2(\zeta_{\nu,i})}\int_0^1 (1-x^2)^n x^{\nu+1}\mathrm{J}_\nu\left(\zeta_{\nu,i}x\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\mathrm{J}_{\nu+1}^2(\zeta_{\nu,i})}\frac{2n}{\zeta_{\nu,i}}\int_0^1 (1-x^2)^{n-1} x^{\nu+2}\mathrm{J}_{\nu+1}\left(\zeta_{\nu,i}x\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\mathrm{J}_{\nu+1}^2(\zeta_{\nu,i})}\frac{2n}{\zeta_{\nu,i}}\int_0^1 (1-x^2)^{n-1} x^{2\nu+2}\left[x^{-\nu}\mathrm{J}_{\nu+1}\left(\zeta_{\nu,i}x\right)\right]\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\mathrm{J}_{\nu+1}^2(\zeta_{\nu,i})}\frac{2n}{\zeta_{\nu,i}^2}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)^{n-1} x^{2\nu+2}\right]x^{-\nu}\mathrm{J}_{\nu}\left(\zeta_{\nu,i}x\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{2n}{\zeta_{\nu,i}^2}\left[2(\nu+n)\alpha_{\nu,i}(n-1)-2(n-1)\alpha_{\nu,i}(n-2)\right].\end{aligned}$$

考虑到 $\alpha_{\nu,i}(0)$ 及 $\alpha_{\nu,i}(1)$ 的具体形式，不妨令

$$\alpha_{\nu,i}(n) = \frac{1}{\zeta_{\nu,i}\,\mathrm{J}_{\nu+1}\left(\zeta_{\nu,i}\right)}C_{\nu,i}(n), \tag{13.209}$$

则有

$$C_{\nu,i}(0)=2, \quad C_{\nu,i}(1)=\frac{2^3(\nu+1)}{\zeta_{\nu,i}^2} \tag{13.210}$$

及 $C_{\nu,i}(n)$ 满足的递推关系

$$C_{\nu,i}(n) = \frac{2n}{\zeta_{\nu,i}^2}\left[2(\nu+n)\,C_{\nu,i}(n-1) - 2(n-1)\,C_{\nu,i}(n-2)\right]. \tag{13.211}$$

由此即可逐次得出

$$C_{\nu,i}(2) = \frac{2^6(\nu+1)(\nu+2)}{\zeta_{\nu,i}^4} - \frac{2^4}{\zeta_{\nu,i}^2}, \tag{13.212a}$$

$$C_{\nu,i}(3) = \frac{2^8 3(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)}{\zeta_{\nu,i}^6} - \frac{2^7 3(\nu+2)}{\zeta_{\nu,i}^4}, \tag{13.212b}$$

$$C_{\nu,i}(4) = \frac{2^{12}3}{\zeta_{\nu,i}^8}\frac{\Gamma(\nu+5)}{\Gamma(\nu+1)} - \frac{2^{10}3^2}{\zeta_{\nu,i}^6}\frac{\Gamma(\nu+4)}{\Gamma(\nu+2)} + \frac{2^8 3}{\zeta_{\nu,i}^4}, \tag{13.212c}$$

$$C_{\nu,i}(5) = \frac{2^{14}3\cdot 5}{\zeta_{\nu,i}^{10}}\frac{\Gamma(\nu+6)}{\Gamma(\nu+1)} - \frac{2^{14}3\cdot 5}{\zeta_{\nu,i}^8}\frac{\Gamma(\nu+5)}{\Gamma(\nu+2)} + \frac{2^{10}3^2 5(\nu+3)}{\zeta_{\nu,i}^6}, \tag{13.212d}$$

$$\begin{aligned}C_{\nu,i}(6) = {} & \frac{2^{17}3^2 5}{\zeta_{\nu,i}^{12}}\frac{\Gamma(\nu+7)}{\Gamma(\nu+1)} - \frac{2^{15}3^2 5^2}{\zeta_{\nu,i}^{10}}\frac{\Gamma(\nu+6)}{\Gamma(\nu+2)} \\ & + \frac{2^{14}3^3 5}{\zeta_{\nu,i}^8}\frac{\Gamma(\nu+5)}{\Gamma(\nu+3)} - \frac{2^{11}3^2 5}{\zeta_{\nu,i}^6},\end{aligned} \tag{13.212e}$$

$$C_{\nu,i}(7) = \frac{2^{19}3^2 5\cdot 7}{\zeta_{\nu,i}^{14}}\frac{\Gamma(\nu+8)}{\Gamma(\nu+1)} - \frac{2^{18}3^3 5\cdot 7}{\zeta_{\nu,i}^{12}}\frac{\Gamma(\nu+7)}{\Gamma(\nu+2)}$$

$$+\frac{2^{16}3^25^27}{\zeta_{\nu,i}^{10}}\frac{\Gamma(\nu+6)}{\Gamma(\nu+3)}-\frac{2^{15}3^25\cdot 7}{\zeta_{\nu,i}^{8}},\tag{13.212f}$$

$$C_{\nu,i}(8)=\frac{2^{24}3^25\cdot 7}{\zeta_{\nu,i}^{16}}\frac{\Gamma(\nu+9)}{\Gamma(\nu+1)}-\frac{2^{22}3^25\cdot 7^2}{\zeta_{\nu,i}^{14}}\frac{\Gamma(\nu+8)}{\Gamma(\nu+2)}$$
$$+\frac{2^{20}3^35^27}{\zeta_{\nu,i}^{12}}\frac{\Gamma(\nu+7)}{\Gamma(\nu+3)}-\frac{2^{19}3^25^27}{\zeta_{\nu,i}^{10}}\frac{\Gamma(\nu+6)}{\Gamma(\nu+4)}+\frac{2^{16}3^25\cdot 7}{\zeta_{\nu,i}^{8}}.\tag{13.212g}$$

另一方面，将 (13.209) 式代入 (13.206) 式，有

$$\left(1-x^2\right)^n=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\zeta_{\nu,i}\,\mathrm{J}_{\nu+1}\left(\zeta_{\nu,i}\right)}C_{\nu,i}(n)\,x^{-\nu}\mathrm{J}_\nu\left(\zeta_{\nu,i}x\right).$$

两端微商，并代入 $x=1$，就得到

$$\sum_{i=1}^{\infty}C_{\nu,i}(1)=2,\tag{13.213}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}C_{\nu,i}(n)=0,\qquad n\geqslant 2.\tag{13.214}$$

由此即可求出 $S_{2n,\nu}$ 的值. 例如，由 (13.210) 及 (13.213) 式，即得

$$S_{2,\nu}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\zeta_{\nu,i}^2}=\frac{1}{2^2}\frac{1}{\nu+1}.\tag{13.215a}$$

根据 (13.212) 及 (13.214) 式，就能够求出

$$S_{4,\nu}=\frac{1}{2^2(\nu+1)(\nu+2)}S_{2,\nu}=\frac{1}{2^4}\frac{1}{(\nu+1)^2(\nu+2)},\tag{13.215b}$$

$$S_{6,\nu}=\frac{1}{2(\nu+1)(\nu+3)}S_{4,\nu}=\frac{1}{2^5}\frac{1}{(\nu+1)^3(\nu+2)(\nu+3)},\tag{13.215c}$$

$$S_{8,\nu}=\frac{3}{2^2(\nu+1)(\nu+4)}S_{6,\nu}-\frac{1}{2^4(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)(\nu+4)}S_{4,\nu}$$
$$=\frac{1}{2^8}\frac{5\nu+11}{(\nu+1)^4(\nu+2)^2(\nu+3)(\nu+4)},\tag{13.215d}$$

$$S_{10,\nu}=\frac{1}{(\nu+1)(\nu+5)}S_{8,\nu}-\frac{3}{2^4(\nu+1)(\nu+2)(\nu+4)(\nu+5)}S_{6,\nu}$$
$$=\frac{1}{2^9}\frac{7\nu+19}{(\nu+1)^5(\nu+2)^2(\nu+3)(\nu+4)(\nu+5)},\tag{13.215e}$$

$$S_{12,\nu}=\frac{5}{2^2(\nu+1)(\nu+6)}S_{10,\nu}-\frac{3}{2^3(\nu+1)(\nu+2)(\nu+5)(\nu+6)}S_{8,\nu}$$
$$+\frac{1}{64(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)(\nu+4)(\nu+5)(\nu+6)}S_{6,\nu}$$

$$= \frac{1}{2^{11}} \frac{21\nu^3 + 181\nu^2 + 513\nu + 473}{(\nu+1)^6(\nu+2)^3(\nu+3)^2(\nu+4)(\nu+5)(\nu+6)}, \tag{13.215f}$$

$$S_{14,\nu} = \frac{3}{2(\nu+1)(\nu+7)} S_{12,\nu} - \frac{5}{2^3(\nu+1)(\nu+2)(\nu+6)(\nu+7)} S_{10,\nu}$$

$$+ \frac{1}{2^4(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)(\nu+5)(\nu+6)(\nu+7)} S_{8,\nu}$$

$$= \frac{1}{2^{11}} \frac{33\nu^3 + 329\nu^2 + 1081\nu + 1145}{(\nu+1)^7(\nu+2)^3(\nu+3)^2(\nu+4)(\nu+5)(\nu+6)(\nu+7)}, \tag{13.215g}$$

$$S_{16,\nu} = \frac{7}{2^2(\nu+1)(\nu+8)} S_{14,\nu} - \frac{3\cdot 5}{2^4(\nu+1)(\nu+2)(\nu+7)(\nu+8)} S_{12,\nu}$$

$$+ \frac{5}{2^5(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)(\nu+6)(\nu+7)(\nu+8)} S_{10,\nu}$$

$$- \frac{1}{(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)(\nu+4)(\nu+5)(\nu+6)(\nu+7)(\nu+8)} S_{8,\nu}$$

$$= \frac{1}{2^{16}} \frac{429\nu^5 + 7640\nu^4 + 53752\nu^3 + 185430\nu^2 + 311387\nu + 202738}{(\nu+1)^8(\nu+2)^4(\nu+3)^2(\nu+4)^2(\nu+5)(\nu+6)(\nu+7)(\nu+8)}. \tag{13.215h}$$

计算 $S_{2n,\nu}$ 的另一种方法是将整函数 $\mathrm{J}_\nu(z)$ 作无穷乘积展开：

$$\Gamma(\nu+1)\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu} \mathrm{J}_\nu(z) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{\zeta_{\nu,k}^2}\right). \tag{13.216}$$

两端取对数微商，并利用 Bessel 函数的递推关系，就得到

$$\frac{\mathrm{J}_{\nu+1}(z)}{\mathrm{J}_\nu(z)} = -2z\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{z^2 - \zeta_{\nu,k}^2}. \tag{13.217}$$

这就是函数 $\dfrac{\mathrm{J}_{\nu+1}(z)}{\mathrm{J}_\nu(z)}$ 的有理分式展开．进一步将上式右端作展开，得

$$\frac{\mathrm{J}_{\nu+1}(z)}{\mathrm{J}_\nu(z)} = 2z\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\zeta_{\nu,k}^2}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{z}{\zeta_{\nu,k}}\right)^{2l} = 2\sum_{l=0}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\zeta_{\nu,k}^{2l+2}}\right) z^{2k+1}$$

$$= 2\sum_{l=0}^{\infty} S_{2l+2,\nu}\, z^{2l+1}, \qquad |z| < \zeta_{\nu,1}, \tag{13.218}$$

因为 $\zeta_{\nu,1}$ 是 $\mathrm{J}_\nu(z)$ 的最小正零点．再利用 Bessel 函数的级数表达式，导出 $S_{2n,\nu}$ 满足的递推关系

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(n-k)!\,\Gamma(n-k+\nu+1)} 2^{2k+2} S_{2k+2,\nu} = \frac{1}{n!\,\Gamma(n+\nu+2)}. \tag{13.219}$$

分别令 $n = 0, 1, 2, \cdots$，就可以逐个求出 $S_{2n,\nu}$ 的值．

第十四章　柱函数的积分

§14.1　柱函数的 Fourier 变换

作为本节讨论的出发点，通过直接积分，我们可以证明

$$\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu}\mathrm{J}_\nu(x)=\frac{1}{\Gamma\left(\nu+1/2\right)\Gamma\left(1/2\right)}\int_{-1}^{1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy}\left(1-y^2\right)^{\nu-1/2}\mathrm{d}y$$

或

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2^{-\nu+1/2}}{\Gamma\left(\nu+1/2\right)}\int_{-1}^{1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy}\left(1-y^2\right)^{\nu-1/2}\mathrm{d}y=x^{-\nu}\mathrm{J}_\nu(x).\tag{14.1a}$$

这个结果，可以看成函数

$$\left(1-x^2\right)^{\nu-1/2}\eta(1-|x|)=\begin{cases}\left(1-x^2\right)^{\nu-1/2}, & |x|<1,\\ 0, & |x|>1\end{cases}$$

的 Fourier 变换．相应的逆变换是

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}xy}x^{-\nu}\mathrm{J}_\nu(x)\,\mathrm{d}x=\frac{2^{-\nu+1/2}}{\Gamma\left(\nu+1/2\right)}\left(1-y^2\right)^{\nu-1/2}\eta(1-|y|).\tag{14.1b}$$

还可以将上面的结果进一步改写为余弦变换：

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{2^{-\nu+1/2}}{\Gamma\left(\nu+1/2\right)}\int_0^1\left(1-y^2\right)^{\nu-1/2}\cos xy\,\mathrm{d}y=x^{-\nu}\mathrm{J}_\nu(x),\tag{14.2a}$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}x^{-\nu}\mathrm{J}_\nu(x)\cos xy\,\mathrm{d}x=\frac{2^{-\nu+1/2}}{\Gamma\left(\nu+1/2\right)}\left(1-y^2\right)^{\nu-1/2}\eta(1-|y|).\tag{14.2b}$$

以上诸式的成立条件都是 $\mathrm{Re}\,\nu>-1/2$.

由于余弦变换及其逆变换的核具有相同的形式，故我们既可以将 (14.2a) 式称为函数 $\left(1-x^2\right)^{\nu-1/2}\eta(1-x)$ 的余弦变换，而将 (14.2b) 式看成它的逆变换；反之，也可以将 (14.2b) 式看成 $x^{-\nu}\mathrm{J}_\nu(x)$ 的余弦变换，而 (14.2a) 式则是它的逆变换．

从 (14.2a) 式出发，能够导出有关柱函数 Fourier 变换的更多结果．例如，对 (14.2a) 式求导，则有

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{2^{-\nu+1/2}}{\Gamma\left(\nu+1/2\right)}\int_0^1 y\left(1-y^2\right)^{\nu-1/2}\sin xy\,\mathrm{d}y=x^{-\nu}\mathrm{J}_{\nu+1}(x),$$

或者将 $\nu+1$ 改写为 ν，有

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{2^{-\nu+3/2}}{\Gamma\left(\nu-1/2\right)}\int_0^1 y\left(1-y^2\right)^{\nu-3/2}\sin xy\,\mathrm{d}y=x^{1-\nu}\mathrm{J}_\nu(x),\quad \mathrm{Re}\,\nu>1/2.\tag{14.3a}$$

这是函数 $x\left(1-x^2\right)^{\nu-3/2}\eta(1-|x|)$ 的正弦变换，其逆变换为

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty x^{1-\nu}\mathrm{J}_\nu(x)\sin xy\,\mathrm{d}x=\frac{2^{-\nu+3/2}}{\Gamma\left(\nu-1/2\right)}y\left(1-y^2\right)^{\nu-3/2}\eta(1-|y|). \tag{14.3b}$$

正弦变换及其逆变换的核形式也相同，所以也可将 (14.3b) 式理解为 $x^{1-\nu}\mathrm{J}_\nu(x)$ 的正弦变换，而 (14.3a) 式则是它的逆变换.

为了计算 $x^\nu\mathrm{J}_\nu(x)$ 的正弦变换

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty t^\nu\mathrm{J}_\nu(t)\sin xt\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2\mathrm{i}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-\infty}^\infty t^{-\nu}\mathrm{J}_\nu(t)\left(|t|^{2\nu}\mathrm{sgn}\,t\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}\mathrm{d}t,\quad -\frac{1}{2}<\nu<\frac{1}{2},$$

就需要用到 Fourier 变换的卷积公式

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty F(t)\,G(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty f(u)\,g(x-u)\,\mathrm{d}u. \tag{14.4}$$

利用留数定理 (或 Cauchy 定理)，在 $x>0,\ 0<\alpha<1$ 的条件下，可以计算得

$$\int_0^\infty t^{\alpha-1}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}\,\mathrm{d}t=\int_0^\infty\left(t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}\right)^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{i}\,\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\alpha/2}\,\Gamma\left(\alpha\right)\,x^{-\alpha}, \tag{14.5a}$$

因此

$$\int_0^\infty t^{\alpha-1}\sin xt\,\mathrm{d}t=\Gamma\left(\alpha\right)\,x^{-\alpha}\,\cos\frac{\pi\alpha}{2}. \tag{14.5b}$$

(14.5b) 式的成立条件可延拓为 $-1<\alpha<1$. 于是，当 $-1/2<\nu<1/2$ 时，有

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty\frac{\mathrm{sgn}\,y}{|y|^{2\nu+1}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}xy}\,\mathrm{d}y&=\frac{2\mathrm{i}}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty y^{-2\nu-1}\,\sin xy\,\mathrm{d}y\\&=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{i}\,|x|^{2\nu}}{\Gamma\left(2\nu+1\right)\cos\pi\nu}\mathrm{sgn}\,x.\end{aligned} \tag{14.6}$$

再结合 (14.1a) 式的结果，就能写出

$$\begin{aligned}\int_0^\infty t^\nu\mathrm{J}_\nu(t)\sin xt\,\mathrm{d}t&=\frac{1}{2\mathrm{i}}\int_{-\infty}^\infty t^{-\nu}\mathrm{J}_\nu(t)\left(|t|^{2\nu}\mathrm{sgn}\,t\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma\left(2\nu+1\right)\cos\pi\nu}{2^{\nu-1/2}\Gamma\left(\nu+1/2\right)}\int_{-1}^1\left(1-u^2\right)^{\nu-1/2}|x-u|^{-2\nu-1}\mathrm{sgn}\left(x-u\right)\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

直接援引笔者编著的《数学物理方法专题 —— 复变函数与积分变换》(北京大学出版社) 中第十章例 10.9 的结果，就得到

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty t^\nu\mathrm{J}_\nu(t)\sin xt\,\mathrm{d}t=\frac{2^{\nu+1/2}}{\Gamma\left(-\nu+1/2\right)\left(x^2-1\right)^{\nu+1/2}}\eta(x-1). \tag{14.7}$$

以上给出了几个涉及柱函数的 Fourier 变换式. 在此基础上，应用 Fourier 变换的 Parseval 恒等式，可以进一步计算含柱函数的积分. 例如，如果函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的余弦变换分别为 $F_c(y)$ 和 $G_c(y)$，即

$$F_c(y)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\cos xy\,\mathrm{d}x,\qquad G_c(y)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty g(x)\cos xy\,\mathrm{d}x,$$

则 Parseval 恒等式

$$\int_0^\infty f(x)g(x)\mathrm{d}x=\int_0^\infty F_c(y)G_c(y)\mathrm{d}y \tag{14.8}$$

成立. 因此，由 (14.2b) 式及 $x^{\alpha-1}$ 的余弦变换

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty x^{\alpha-1}\cos xy\,\mathrm{d}x=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\Gamma(\alpha)\,y^{-\alpha}\cos\frac{\pi\alpha}{2},\qquad 0<\alpha<1, \tag{14.9}$$

就可以推出

$$\begin{aligned}\int_0^\infty x^{\alpha-\nu-1}\mathrm{J}_\nu(x)\mathrm{d}x&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\Gamma(\alpha)}{2^{\nu-1/2}\Gamma(\nu+1/2)}\cos\frac{\pi\alpha}{2}\int_0^1\left(1-y^2\right)^{\nu-1/2}y^{-\alpha}\,\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(\alpha)}{2^\nu\Gamma(\nu+1/2)}\cos\frac{\pi\alpha}{2}\frac{\Gamma(\nu+1/2)\,\Gamma((1-\alpha)/2)}{\Gamma(\nu+1-\alpha/2)}\\&=2^{\alpha-\nu-1}\frac{\Gamma(\alpha/2)}{\Gamma(\nu+1-\alpha/2)}.\end{aligned} \tag{14.10}$$

这个结果是在 $0<\alpha<1$, $\mathrm{Re}\,\nu<-1/2$ 的条件下得到的，但可以延拓到 $0<\alpha<\mathrm{Re}\,\nu+3/2$. 这个结果也可以理解为函数 $x^{-\nu}\mathrm{J}_\nu(x)$ 的 Mellin 变换.

同样，如果函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的正弦变换分别为 $F_s(y)$ 和 $G_s(y)$，即

$$F_s(y)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\sin xy\,\mathrm{d}x,\qquad G_s(y)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty g(x)\sin xy\,\mathrm{d}x,$$

则也有 Parseval 恒等式

$$\int_0^\infty f(x)g(x)\mathrm{d}x=\int_0^\infty F_s(y)G_s(y)\mathrm{d}y. \tag{14.11}$$

这样，利用 (14.3b) 与 (14.5b) 两式，也能得到 (14.10) 式.

下面再举几个含 Bessel 函数积分的例子.

例 14.1　由 (14.7) 式及

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}\sin xy\,\mathrm{d}x=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{y}{y^2+a^2},$$

根据正弦变换的 Parseval 恒等式 (14.11)，又可推出

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}x^\nu \mathrm{J}_\nu(x)\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{2^{\nu+1/2}}{\Gamma(-\nu+1/2)}\int_1^\infty \frac{y}{y^2+a^2}\frac{1}{\left(y^2-1\right)^{\nu+1/2}}\,\mathrm{d}y.$$

作变量变换 $u=1/y^2$，上式变为

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}x^\nu \mathrm{J}_\nu(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2^\nu}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(-\nu+1/2)}\int_0^1 \frac{u^{\nu-1/2}(1-u)^{-\nu-1/2}}{a^2u+1}\,\mathrm{d}u.$$

上式右端的积分在笔者编著的《数学物理方法专题 —— 复变函数与积分变换》(北京大学出版社) 一书中亦有计算 (见该书第十章，例 10.10). 因此就得到

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}x^\nu \mathrm{J}_\nu(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2^\nu\Gamma(\nu+1/2)}{\sqrt{\pi}\left(a^2+1\right)^{\nu+1/2}}. \tag{14.12}$$

这个结果也可以看成 $x^\nu\mathrm{J}_\nu(x)$ 的 Laplace 变换. 下一节将直接采用 Bessel 函数的级数表达式计算.

例 14.2 设 a, b 均为正数. 将 (14.3b) 式改写成

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty x^{1-\nu}\mathrm{J}_\nu(bx)\sin xy\,\mathrm{d}x = \frac{2^{-\nu+3/2}}{\Gamma(\nu-1/2)}b^{-\nu}y\left(b^2-y^2\right)^{\nu-3/2}\eta(b-|y|),$$

同时将 (14.7) 式改写成

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty x^\mu\mathrm{J}_\mu(ax)\sin xy\,\mathrm{d}x = \frac{2^{\mu+1/2}a^\mu}{\Gamma(-\mu+1/2)\left(y^2-a^2\right)^{\mu+1/2}}\eta(y-a).$$

显然，当 $0<b<a$ 时，区间 (a,∞) 与 $(0,b)$ 不重叠，故根据正弦变换的 Parseval 恒等式 (14.11) 就可以断定，一定有

$$\int_0^\infty x^{\mu-\nu+1}\mathrm{J}_\mu(ax)\mathrm{J}_\nu(bx)\,\mathrm{d}x = 0, \qquad 0<b<a. \tag{14.13a}$$

而当 $0<a<b$ 时，

$$\begin{aligned}\int_0^\infty x^{\mu-\nu+1}\mathrm{J}_\mu(ax)\mathrm{J}_\nu(bx)\,\mathrm{d}x &= \frac{2^{\mu-\nu+2}a^\mu b^{-\nu}}{\Gamma(-\mu+1/2)\,\Gamma(\nu-1/2)}\int_a^b \frac{y\left(b^2-y^2\right)^{\nu-3/2}}{\left(y^2-a^2\right)^{\mu+1/2}}\,\mathrm{d}y\\ &= \frac{2^{\mu-\nu+1}a^\mu b^{-\nu}}{\Gamma(-\mu+1/2)\,\Gamma(\nu-1/2)}\int_{a^2}^{b^2} \frac{\left(b^2-t\right)^{\nu-3/2}}{\left(t-a^2\right)^{\mu+1/2}}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

作变换 $x=\left(t-a^2\right)/\left(b^2-a^2\right)$，即

$$t-a^2=\left(b^2-a^2\right)x, \quad b^2-t=\left(b^2-a^2\right)(1-x), \quad \mathrm{d}t=\left(b^2-a^2\right)\mathrm{d}x,$$

于是

$$\int_{a^2}^{b^2}\frac{\left(b^2-t\right)^{\nu-3/2}}{\left(t-a^2\right)^{\mu+1/2}}\,\mathrm{d}t=\left(b^2-a^2\right)^{\nu-\mu-1}\int_0^1 x^{-\mu-1/2}(1-x)^{\nu-3/2}\mathrm{d}x$$
$$=\left(b^2-a^2\right)^{\nu-\mu-1}\frac{\Gamma\left(-\mu+1/2\right)\Gamma\left(\nu-1/2\right)}{\Gamma\left(\nu-\mu\right)}.$$

最后就求得

$$\int_0^\infty x^{\mu-\nu+1}\mathrm{J}_\mu(ax)\mathrm{J}_\nu(bx)\,\mathrm{d}x=\frac{2^{\mu-\nu+1}}{\Gamma\left(\nu-\mu\right)}\frac{a^\mu}{b^\nu}\left(b^2-a^2\right)^{\nu-\mu-1},\quad 0<a<b.\tag{14.13b}$$

例 14.3 考虑函数 $\mathrm{J}_0(x)\eta(x)$ 的 Fourier 变换

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty\left[\mathrm{J}_0(x)\eta(x)\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy}\mathrm{d}x\equiv\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty\mathrm{J}_0(x)\left[\cos xy+\mathrm{i}\sin xy\right]\mathrm{d}x.$$

引用 (14.2b) 及 (14.7) 式的结果，即得

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty\left[\mathrm{J}_0(x)\eta(x)\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy}\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}, & -1<y<1,\\[2mm] \dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{2\pi}}\dfrac{\operatorname{sgn}y}{\sqrt{y^2-1}}, & y<-1\ \text{或}\ y>1,\end{cases}$$

又因为

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy}\,\mathrm{d}x=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\eta(1-|y|),$$

所以，根据 Fourier 变换的卷积公式 (14.4)，就有

$$\int_0^\infty\mathrm{J}_0(t)\frac{\sin(x-t)}{x-t}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_{-1}^1\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}\,\mathrm{d}t=\int_0^1\frac{\cos xt}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t.$$

由 (14.2a) 式，即得

$$\int_0^\infty\mathrm{J}_0(t)\frac{\sin(x-t)}{x-t}\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}\mathrm{J}_0(x).\tag{14.14a}$$

作为它的特殊情形，$x=0$ 时，还有

$$\int_0^\infty\mathrm{J}_0(t)\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}.\tag{14.14b}$$

本章的 §14.5 中还将计算类似的积分，例如

$$\int_0^\infty\mathrm{J}_0(xt)\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t\qquad\text{与}\qquad\int_0^\infty\mathrm{J}_1(xt)\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t,$$

它们都是间断函数.

§14.2　柱函数的 Laplace 变换

例 14.4　计算$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-pt}t^{-1}\mathrm{J}_\nu(t)\mathrm{d}t,\ \mathrm{Re}\,\nu>0,\ \mathrm{Re}\,p>0.$

解　将 $\mathrm{J}_\nu(t)$ 的级数表示代入，并逐项积分，即可直接得到

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-pt}\mathrm{J}_\nu(t)\frac{\mathrm{d}t}{t} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+\nu+1)}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+\nu}\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-pt}t^{2n+\nu-1}\mathrm{d}t\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+\nu+1)}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+\nu}\frac{\Gamma(2n+\nu)}{p^{2n+\nu}}\\ &= \left(\frac{1}{2p}\right)^{\nu}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{\Gamma(2n+\nu)}{\Gamma(n+\nu+1)}\left(\frac{1}{2p}\right)^{2n},\qquad \mathrm{Re}\,\nu>0.\end{aligned}$$

利用①

$$\begin{aligned}\left(\frac{\sqrt{1+z}+1}{2}\right)^{-q} &= 1-\frac{q}{1!}\frac{z}{4}+\frac{q(q+3)}{2!}\left(\frac{z}{4}\right)^2-\frac{q(q+4)(q+5)}{3!}\left(\frac{z}{4}\right)^3+\cdots\\ &= q\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{\Gamma(q+2n)}{\Gamma(q+n+1)}\left(\frac{z}{4}\right)^n,\qquad |z|<1\end{aligned}$$

即可求出上面的级数的和函数

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-pt}\mathrm{J}_\nu(t)\frac{\mathrm{d}t}{t} &= \frac{1}{\nu}\left(\frac{1}{2p}\right)^{\nu}\left(\frac{\sqrt{1+(1/p)^2}+1}{2}\right)^{-\nu}\\ &= \frac{1}{\nu}\left(\sqrt{1+p^2}+p\right)^{-\nu}.\end{aligned}\tag{14.15}$$

在上面求和时需要用到 $\mathrm{Re}\,(1/p)<1$ 即 $\mathrm{Re}\,p>1$ 的限制．但本题的积分显然在 $\mathrm{Re}\,p>0$ 的条件下收敛，因而作为 Laplace 积分，一定在 $\mathrm{Re}\,p>0$ 的半平面上解析②，因此，以上结果也就一定在 $\mathrm{Re}\,p>0$ 的半平面上均成立．

例 14.5　计算 $\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-pt}\mathrm{J}_\nu(t)\mathrm{d}t,\ \mathrm{Re}\,\nu>-1,\ \mathrm{Re}\,p>0.$

解　将 (14.15) 式对 p 求导，即得

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-pt}\mathrm{J}_\nu(t)\frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-pt}\mathrm{J}_\nu(t)\mathrm{d}t$$

---

① 引自吴崇试编著的《数学物理方法专题 —— 复变函数与积分变换》(北京大学出版社)，第四章，(4.33c) 式．

② 见《数学物理方法专题 —— 复变函数与积分变换》(北京大学出版社)，第十三章，§13.3.

$$= \left(\sqrt{1+p^2}+p\right)^{-\nu-1}\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}+1\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\left(\sqrt{1+p^2}+p\right)^{-\nu}. \tag{14.16}$$

此式在 $\mathrm{Re}\,\nu>0$ 的条件下成立. 但所求积分显然在 $\mathrm{Re}\,\nu>-1$ 的条件下收敛，故可采用解析延拓的方法将上面的结果延拓到 $\mathrm{Re}\,\nu>-1$.

另外，在上述积分中直接代入 $\mathrm{J}_\nu(t)$ 的级数表达式，在 $\mathrm{Re}\,\nu>-1$ 的条件下逐项积分，也可计算得①

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt}\mathrm{J}_\nu(t)\mathrm{d}t &= \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+\nu+1)}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+\nu}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt}t^{2n+\nu}\mathrm{d}t\\ &= \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+\nu+1)}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+\nu}\frac{\Gamma(2n+\nu+1)}{p^{2n+\nu+1}}\\ &= \frac{1}{2^\nu}\frac{1}{p^{\nu+1}}\sum_{n=0}^\infty\frac{(-1)^n}{n!}\frac{\Gamma(2n+\nu+1)}{\Gamma(n+\nu+1)}\left(\frac{1}{2p}\right)^{2n}\\ &= \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\left(\sqrt{1+p^2}+p\right)^{-\nu}.\end{aligned}$$

例 14.6 计算 $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt}t^\nu\mathrm{J}_\nu(t)\mathrm{d}t$, $\mathrm{Re}\,\nu>-1/2$, $\mathrm{Re}\,p>0$.

解 此积分显然在 $\mathrm{Re}\,\nu>-1/2$ 的条件下收敛. 仍然是将 $\mathrm{J}_\nu(t)$ 的级数表示代入，并逐项积分，于是有

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt}t^\nu\mathrm{J}_\nu(t)\mathrm{d}t &= \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+\nu+1)}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+\nu}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt}t^{2n+2\nu}\mathrm{d}t\\ &= \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+\nu+1)}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+\nu}\frac{\Gamma(2n+2\nu+1)}{p^{2n+2\nu+1}}\\ &= \sum_{n=0}^\infty\frac{(-1)^n}{n!}\frac{\Gamma(2n+2\nu+1)}{\Gamma(n+\nu+1)}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+\nu}\frac{1}{p^{2n+2\nu+1}}.\end{aligned}$$

根据 Γ 函数的倍乘公式化简，并且在 $\mathrm{Re}\,p>1$ 的条件下 (利用二项式展开公式) 将级数求和，即可得到

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt}t^\nu\mathrm{J}_\nu(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^\infty\frac{(-1)^n}{n!}\frac{2^{2n+2\nu}\Gamma(n+\nu+1/2)}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+\nu}\frac{1}{p^{2n+2\nu+1}}$$

① 以下计算中的级数求和需用到吴崇试编著的《数学物理方法专题 —— 复变函数与积分变换》(北京大学出版社) 一书第四章中的 (4.40) 式.

$$= \frac{2^\nu}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{p^{2\nu+1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\Gamma(n+\nu+1/2)}{p^{2n}}$$

$$= \frac{2^\nu}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\nu+1/2)}{p^{2\nu+1}} \left(1+\frac{1}{p^2}\right)^{-(\nu+1/2)}$$

$$= \frac{2^\nu \Gamma(\nu+1/2)}{\sqrt{\pi}(1+p^2)^{\nu+1/2}}. \tag{14.17}$$

以上求和时用到 $\mathrm{Re}\,p > 1$ 的限制. 但根据与例 14.4 同样的理由, 可以延拓到 $\mathrm{Re}\,p > 0$ 的半平面上. 以下两个例题中, 也将用到同样的做法, 就不一一讨论了.

例 14.7 计算 $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt} t^{\nu+1} \mathrm{J}_\nu(t) \mathrm{d}t$, $\mathrm{Re}\,\nu > -1$, $\mathrm{Re}\,p > 0$.

解 同样将 $\mathrm{J}_\nu(t)$ 的级数表示代入, 并逐项积分, 得

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt} t^{\nu+1} \mathrm{J}_\nu(t) \mathrm{d}t &= \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+\nu+1)} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+\nu} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt} t^{2n+2\nu+1} \mathrm{d}t \\
&= \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+\nu+1)} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+\nu} \frac{\Gamma(2n+2\nu+2)}{p^{2n+2\nu+2}} \\
&= \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\Gamma(2n+2\nu+2)}{\Gamma(n+\nu+1)} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+\nu} \frac{1}{p^{2n+2\nu+2}} \\
&= \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!} \frac{2^{2n+2\nu+1}\Gamma(n+\nu+3/2)}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+\nu} \frac{1}{p^{2n+2\nu+2}} \\
&= \frac{2^{\nu+1}}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\Gamma(n+\nu+3/2)}{p^{2n+2\nu+2}} \\
&= \frac{2^{\nu+1}\Gamma(\nu+3/2)}{\sqrt{\pi}} p \left(1+p^2\right)^{-(\nu+3/2)}.
\end{aligned} \tag{14.18}$$

例 14.8 计算 $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt} \mathrm{N}_\nu(t) \mathrm{d}t$, $|\mathrm{Re}\,\nu| < 1$, $\mathrm{Re}\,p > 0$.

解 由 (14.16) 式, 有

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt} \mathrm{J}_\nu(t) \mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} \left(\sqrt{1+p^2}+p\right)^{-\nu}, \quad \mathrm{Re}\,\nu > -1, \mathrm{Re}\,p > 1,$$

将 ν 换成 $-\nu$, 又可得

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt} \mathrm{J}_{-\nu}(t) \mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} \left(\sqrt{1+p^2}+p\right)^{\nu}, \quad \mathrm{Re}\,\nu < 1, \mathrm{Re}\,p > 1,$$

所以当 $|\mathrm{Re}\,\nu| < 1$, $\mathrm{Re}\,p > 1$ 时有

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt} \mathrm{N}_\nu(t) \mathrm{d}t = \frac{1}{\sin\nu\pi} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt} \left[\cos\nu\pi\, \mathrm{J}_\nu(t) - \mathrm{J}_{-\nu}(t)\right] \mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} \frac{1}{\sin\nu\pi} \left[\cos\nu\pi \left(\sqrt{1+p^2}+p\right)^{-\nu} - \left(\sqrt{1+p^2}+p\right)^{\nu} \right]. \tag{14.19}$$

作为它的特殊情形，取极限 $\nu \to 0$，即得

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt}\mathrm{N}_0(t)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} \lim_{\nu\to 0} \left\{ \frac{1}{\sin\nu\pi} \left[\cos\nu\pi \left(\sqrt{1+p^2}+p\right)^{-\nu} - \left(\sqrt{1+p^2}+p\right)^{\nu} \right] \right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} \lim_{\nu\to 0} \left\{ \frac{1}{\sin\nu\pi} \left[\cos\nu\pi - \left(\sqrt{1+p^2}+p\right)^{2\nu} \right] \right\} \\
&= -\frac{2}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1+p^2}} \ln\left(\sqrt{1+p^2}+p\right).
\end{aligned} \tag{14.20a}$$

结合 (14.16) 式的特殊情形：

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt}\mathrm{J}_0(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}, \tag{14.20b}$$

还可以进一步得到

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt}\mathrm{H}_0^{(1)}(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} \left[1 - \frac{2\mathrm{i}}{\pi} \ln\left(\sqrt{1+p^2}+p\right) \right], \tag{14.21a}$$

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt}\mathrm{H}_0^{(2)}(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} \left[1 + \frac{2\mathrm{i}}{\pi} \ln\left(\sqrt{1+p^2}+p\right) \right]. \tag{14.21b}$$

§14.3 柱函数的不定积分

本节主要讨论 $\int \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}z} z^\mu \mathscr{C}_\nu(z)\mathrm{d}z$ 型的不定积分，其中 $\mathscr{C}_\nu(z)$ 代表 ν 阶柱函数，而 $\mu \pm \nu$ 为整数.

例 14.9 计算不定积分 $\int \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}z} z^\nu \mathscr{C}_\nu(z)\,\mathrm{d}z$.

解 将待求的积分写成 $\int \mathrm{e}^{-pz} z^\nu \mathscr{C}_\nu(z)\,\mathrm{d}z$，其中 $p = \pm\mathrm{i}$.

直接分部积分，可以得到下列等式：

$$\int \mathrm{e}^{-pz} z^\nu \mathscr{C}_\nu(z)\mathrm{d}z = z\cdot\mathrm{e}^{-pz} z^\nu \mathscr{C}_\nu(z) - \int z\cdot\left[\mathrm{e}^{-pz}z^\nu C_\nu(z)\right]'\mathrm{d}z.$$

利用递推关系

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^\nu \mathscr{C}_\nu(z)\right] = z^\nu \mathscr{C}_{\nu-1}, \tag{14.22a}$$

$$\mathscr{C}_{\nu-1}(z) + \mathscr{C}_{\nu+1}(z) = \frac{2\nu}{z} \mathscr{C}_\nu(z), \tag{14.22b}$$

就能将上式化为

$$\int \mathrm{e}^{-pz} z^{\nu}\, \mathscr{C}_{\nu}(z)\,\mathrm{d}z = \mathrm{e}^{-pz} z^{\nu+1}\, \mathscr{C}_{\nu}(z) + p\int \mathrm{e}^{-pz} z^{\nu+1}\, \mathscr{C}_{\nu}(z)\,\mathrm{d}z + \int \mathrm{e}^{-pz} z^{\nu+1}\left[\frac{2\nu}{z}\, \mathscr{C}_{\nu}(z) - \mathscr{C}_{\nu+1}(z)\right]\mathrm{d}z,$$

亦即

$$(2\nu+1)\int \mathrm{e}^{-pz} z^{\nu}\, \mathscr{C}_{\nu}(z)\,\mathrm{d}z = \mathrm{e}^{-pz} z^{\nu+1}\, \mathscr{C}_{\nu}(z) + \int \left[p\,\mathrm{e}^{-pz} z^{\nu+1}\, \mathscr{C}_{\nu}(z) + \mathrm{e}^{-pz} z^{\nu+1}\, \mathscr{C}_{\nu+1}(z)\right]\mathrm{d}z.$$

注意 $p=\mp\mathrm{i}$，即 $p^2=-1$，$p=-1/p$，有

$$p\,\mathrm{e}^{-pz} z^{\nu+1}\, \mathscr{C}_{\nu}(z) + \mathrm{e}^{-pz} z^{\nu+1}\, \mathscr{C}_{\nu+1}(z) = p\left[\mathrm{e}^{-pz} z^{\nu+1}\, \mathscr{C}_{\nu+1}(z)\right]',$$

所以

$$\int \mathrm{e}^{-pz} z^{\nu}\, \mathscr{C}_{\nu}(z)\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\nu+1}\mathrm{e}^{-pz} z^{\nu+1}\left[\, \mathscr{C}_{\nu}(z) + p\, \mathscr{C}_{\nu+1}(z)\right] + C,$$

亦即

$$\int \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}z} z^{\nu}\, \mathscr{C}_{\nu}(z)\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\nu+1}\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}z} z^{\nu+1}\left[\, \mathscr{C}_{\nu}(z) \mp \mathrm{i}\, \mathscr{C}_{\nu+1}(z)\right] + C. \tag{14.23}$$

或者写成变上限积分的形式，并以 $\mathrm{J}_{\nu}(z)$ 或 $\mathrm{N}_{\nu}(z)$ 取代 $\mathscr{C}_{\nu+1}(z)$，则当 $\mathrm{Re}\,\nu > -1/2$ 时就有

$$\int_0^z \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}t} t^{\nu}\mathrm{J}_{\nu}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\nu+1}\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}z} z^{\nu+1}\left[\mathrm{J}_{\nu}(z) \mp \mathrm{i}\mathrm{J}_{\nu+1}(z)\right]\Big|_0^z = \frac{1}{2\nu+1}\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}z} z^{\nu+1}\left[\mathrm{J}_{\nu}(z) \mp \mathrm{i}\mathrm{J}_{\nu+1}(z)\right], \tag{14.24}$$

$$\int_0^z \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}t} t^{\nu}\mathrm{N}_{\nu}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\nu+1}\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}z} z^{\nu+1}\left[\mathrm{N}_{\nu}(z) \mp \mathrm{i}\mathrm{N}_{\nu+1}(z)\right]\Big|_0^z = \frac{1}{2\nu+1}\left\{z^{\nu+1}\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}z}\left[\mathrm{N}_{\nu}(z) \mp \mathrm{i}\mathrm{N}_{\nu+1}(z)\right] \mp \frac{\mathrm{i}}{\pi}2^{\nu+1}\Gamma(\nu+1)\right\}. \tag{14.25}$$

还可以将它们重新组合，得

$$\int_0^z t^{\nu}\mathrm{J}_{\nu}(t)\cos t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\nu+1}z^{\nu+1}\left[\mathrm{J}_{\nu}(z)\cos z + \mathrm{J}_{\nu+1}(z)\sin z\right], \tag{14.26}$$

$$\int_0^z t^{\nu}\mathrm{J}_{\nu}(t)\sin t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\nu+1}z^{\nu+1}\left[\mathrm{J}_{\nu}(z)\sin z - \mathrm{J}_{\nu+1}(z)\cos z\right], \tag{14.27}$$

$$\int_0^z t^\nu \mathrm{N}_\nu(t)\cos t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\nu+1}z^{\nu+1}\left[\mathrm{N}_\nu(z)\cos z + \mathrm{N}_{\nu+1}(z)\sin z\right], \tag{14.28}$$

$$\int_0^z t^\nu \mathrm{N}_\nu(t)\sin t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\nu+1}\left\{z^{\nu+1}\left[\mathrm{N}_\nu(z)\sin z - \mathrm{N}_{\nu+1}(z)\cos z\right] - \frac{2^{\nu+1}}{\pi}\Gamma(\nu+1)\right\}. \tag{14.29}$$

☞ **讨论** 或者将 (14.24) 与 (14.25) 两式改写成

$$\int_0^z \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}(t-z)} t^\nu \mathrm{J}_\nu(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\nu+1}z^{\nu+1}\left[\mathrm{J}_\nu(z) \mp \mathrm{i}\mathrm{J}_{\nu+1}(z)\right], \tag{14.24$'$}$$

$$\int_0^z \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}(t-z)} t^\nu \mathrm{N}_\nu(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\nu+1}\left\{z^{\nu+1}\left[\mathrm{N}_\nu(z) \mp \mathrm{i}\mathrm{N}_{\nu+1}(z)\right] \mp \frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}z}}{\pi}2^{\nu+1}\Gamma(\nu+1)\right\}, \tag{14.25$'$}$$

由此又可以导出

$$\int_0^z \cos(z-t)\, t^\nu \mathrm{J}_\nu(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\nu+1}z^{\nu+1}\mathrm{J}_\nu(z), \tag{14.30}$$

$$\int_0^z \sin(z-t)\, t^\nu \mathrm{J}_\nu(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\nu+1}z^{\nu+1}\mathrm{J}_{\nu+1}(z), \tag{14.31}$$

$$\int_0^z \cos(z-t)\, t^\nu \mathrm{N}_\nu(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\nu+1}\left[z^{\nu+1}\mathrm{N}_\nu(z) - \frac{2^{\nu+1}\Gamma(\nu+1)}{\pi}\sin z\right], \tag{14.32}$$

$$\int_0^z \sin(z-t)\, t^\nu \mathrm{N}_\nu(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\nu+1}\left[z^{\nu+1}\mathrm{N}_{\nu+1}(z) + \frac{2^{\nu+1}\Gamma(\nu+1)}{\pi}\cos z\right]. \tag{14.33}$$

当然将 (14.26) — (14.29) 各式适当组合也可以导出这些结果.

例 14.10 直接分部积分，就可以得到递推关系

$$\int \mathrm{e}^{-pz}z^\nu\,\mathscr{C}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{d}z = \mathrm{e}^{-pz}z^\nu\,\mathscr{C}_\nu(z) + p\int \mathrm{e}^{-pz}z^\nu\,\mathscr{C}_\nu(z)\,\mathrm{d}z.$$

代入 $p=\mp\mathrm{i}$，并援引 (14.23) 式的结果，即得

$$\begin{aligned}\int \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}z}z^\nu\,\mathscr{C}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{d}z &= \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}z}z^\nu\,\mathscr{C}_\nu(z) - \frac{1}{2\nu+1}\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}z}z^{\nu+1}\left[\mathscr{C}_{\nu+1}(z) \pm \mathrm{i}\,\mathscr{C}_\nu(z)\right] + C & (14.34\mathrm{a})\\ &= \frac{\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}z}}{2\nu+1}\left\{z^\nu\,\mathscr{C}_\nu(z) + z^{\nu+1}\left[\mathscr{C}_{\nu-1}(z) \mp \mathrm{i}\,\mathscr{C}_\nu(z)\right]\right\} + C. & (14.34\mathrm{b})\end{aligned}$$

也可以写成变上限积分的形式. 以 Bessel 函数为例，就有

$$\int_0^z \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}t}t^\nu \mathrm{J}_{\nu-1}(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}z}z^\nu \mathrm{J}_\nu(z) + \frac{1}{2\nu+1}\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}z}z^{\nu+1}\left[\mp\mathrm{i}\mathrm{J}_\nu(z) - \mathrm{J}_{\nu+1}(z)\right] \tag{14.35a}$$

$$= \frac{e^{\pm iz}}{2\nu+1}\left\{z^{\nu}J_{\nu}(z) + z^{\nu+1}\left[J_{\nu-1}(z) \mp iJ_{\nu}(z)\right]\right\}. \tag{14.35b}$$

在此基础上就可得到

$$\int_0^z t^{\nu}J_{\nu-1}(t)\cos t\,dt$$

$$= z^{\nu}J_{\nu}(z)\cos z + \frac{1}{2\nu+1}z^{\nu+1}\left[J_{\nu}(z)\sin z - J_{\nu+1}(z)\cos z\right] \tag{14.36a}$$

$$= \frac{1}{2\nu+1}\left\{z^{\nu}J_{\nu}(z)\cos z + z^{\nu+1}\left[J_{\nu-1}(z)\cos z + J_{\nu}(z)\sin z\right]\right\}, \tag{14.36b}$$

$$\int_0^z t^{\nu}J_{\nu-1}(t)\sin t\,dt$$

$$= z^{\nu}J_{\nu}(z)\sin z - \frac{1}{2\nu+1}z^{\nu+1}\left[J_{\nu}(z)\cos z + J_{\nu+1}(z)\sin z\right] \tag{14.36c}$$

$$= \frac{1}{2\nu+1}\left\{z^{\nu}J_{\nu}(z)\sin z + z^{\nu+1}\left[J_{\nu-1}(z)\sin z - J_{\nu}(z)\cos z\right]\right\}. \tag{14.36d}$$

还可以将 (14.35) 式改写成

$$\int_0^z e^{\pm i(t-z)}t^{\nu}J_{\nu-1}(t)\,dt = z^{\nu}J_{\nu}(z) + \frac{1}{2\nu+1}z^{\nu+1}\left[\mp iJ_{\nu}(z) - J_{\nu+1}(z)\right] \tag{14.37a}$$

$$= \frac{1}{2\nu+1}\left\{z^{\nu}J_{\nu}(z) + z^{\nu+1}\left[J_{\nu-1}(z) \mp iJ_{\nu}(z)\right]\right\}, \tag{14.37b}$$

在此基础上又可以得到

$$\int_0^z t^{\nu}J_{\nu-1}(t)\cos(z-t)\,dt = z^{\nu}J_{\nu}(z) - \frac{1}{2\nu+1}z^{\nu+1}J_{\nu+1}(z) \tag{14.38a}$$

$$= \frac{1}{2\nu+1}\left\{z^{\nu}J_{\nu}(z) + z^{\nu+1}J_{\nu-1}(z)\right\}, \tag{14.38b}$$

$$\int_0^z t^{\nu}J_{\nu-1}(t)\sin(z-t)\,dt = \frac{1}{2\nu+1}z^{\nu+1}J_{\nu}(z). \tag{14.38c}$$

对于 Neumann 函数，在 $\operatorname{Re}\nu > 0$ 的条件下，也有类似的结果:

$$\int_0^z e^{\pm it}t^{\nu}N_{\nu-1}(t)\,dt$$

$$= e^{\pm iz}z^{\nu}N_{\nu}(z) + \frac{1}{2\nu+1}\left\{e^{\pm iz}z^{\nu+1}\left[\mp iN_{\nu}(z) - N_{\nu+1}(z)\right] + \frac{2^{\nu}}{\pi}\Gamma(\nu)\right\} \tag{14.39a}$$

$$= \frac{1}{2\nu+1}\left\{e^{\pm iz}z^{\nu}N_{\nu}(z) + e^{\pm iz}z^{\nu+1}\left[N_{\nu-1}(z) \mp iN_{\nu}(z)\right] + \frac{2^{\nu}}{\pi}\Gamma(\nu)\right\}, \tag{14.39b}$$

$$\int_0^z t^{\nu}N_{\nu-1}(t)\cos t\,dt$$

$$= z^{\nu}N_{\nu}(z)\cos z + \frac{1}{2\nu+1}\left\{z^{\nu+1}\left[N_{\nu}(z)\sin z - N_{\nu+1}(z)\cos z\right] + \frac{2^{\nu}}{\pi}\Gamma(\nu)\right\} \tag{14.40a}$$

$$= \frac{1}{2\nu+1}\left\{z^{\nu}\mathrm{N}_{\nu}(z)\cos z + z^{\nu+1}\big[\mathrm{N}_{\nu-1}(z)\cos z + \mathrm{N}_{\nu}(z)\sin z\big] + \frac{2^{\nu}}{\pi}\Gamma(\nu)\right\}, \tag{14.40b}$$

$$\int_0^z t^{\nu}\mathrm{N}_{\nu-1}(t)\sin t\,\mathrm{d}t$$

$$= z^{\nu}\mathrm{N}_{\nu}(z)\sin z - \frac{1}{2\nu+1}z^{\nu+1}\big[\mathrm{N}_{\nu}(z)\cos z + \mathrm{N}_{\nu+1}(z)\sin z\big] \tag{14.40c}$$

$$= \frac{1}{2\nu+1}\left\{z^{\nu}\mathrm{N}_{\nu}(z)\sin z + z^{\nu+1}\big[\mathrm{N}_{\nu-1}(z)\sin z - \mathrm{N}_{\nu}(z)\cos z\big]\right\}, \tag{14.40d}$$

$$\int_0^z \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}(t-z)}t^{\nu}\mathrm{N}_{\nu-1}(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= z^{\nu}\mathrm{N}_{\nu}(z) + \frac{1}{2\nu+1}\left\{z^{\nu+1}\big[\mp\mathrm{i}\mathrm{N}_{\nu}(z) - \mathrm{N}_{\nu+1}(z)\big] + \frac{\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}z}}{\pi}2^{\nu}\Gamma(\nu)\right\} \tag{14.41a}$$

$$= \frac{1}{2\nu+1}\left\{z^{\nu}\mathrm{N}_{\nu}(z) + z^{\nu+1}\big[\mathrm{N}_{\nu-1}(z)\mp\mathrm{i}\mathrm{N}_{\nu}(z)\big] + \frac{\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}z}}{\pi}2^{\nu}\Gamma(\nu)\right\}, \tag{14.41b}$$

$$\int_0^z t^{\nu}\mathrm{N}_{\nu-1}(t)\cos(z-t)\,\mathrm{d}t$$

$$= z^{\nu}\mathrm{N}_{\nu}(z) - \frac{1}{2\nu+1}\left\{z^{\nu+1}\mathrm{N}_{\nu+1}(z) + 2^{\nu}\frac{\Gamma(\nu)}{\pi}\cos z\right\} \tag{14.42a}$$

$$= \frac{1}{2\nu+1}\left\{z^{\nu}\mathrm{N}_{\nu}(z) + z^{\nu+1}\mathrm{N}_{\nu-1}(z) + 2^{\nu}\frac{\Gamma(\nu)}{\pi}\cos z\right\}, \tag{14.42b}$$

$$\int_0^z t^{\nu}\mathrm{N}_{\nu-1}(t)\sin(z-t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\nu+1}\left\{z^{\nu+1}\mathrm{N}_{\nu}(z) + 2^{\nu}\frac{\Gamma(\nu)}{\pi}\sin z\right\}. \tag{14.42c}$$

例 14.11　根据柱函数的递推关系 (14.22b)，可以直接证明

$$\int \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}z}z^{\nu}\,\mathscr{C}_{\nu-n-2}(z)\,\mathrm{d}z$$

$$= (2\nu-2n-2)\int \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}z}z^{\nu-1}\,\mathscr{C}_{\nu-n-1}(z)\,\mathrm{d}z - \int \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}z}z^{\nu}\,\mathscr{C}_{\nu-n}(z)\,\mathrm{d}z. \tag{14.43}$$

这样，由例 14.9 和例 14.10 中得到的积分 $\int \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}z}z^{\nu}\,\mathscr{C}_{\nu}(z)\,\mathrm{d}z$, $\int \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}z}z^{\nu}\,\mathscr{C}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{d}z$ 出发，就能导出全部积分

$$\int \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}z}z^{\nu}\,\mathscr{C}_{\nu-n}(z)\,\mathrm{d}z, \qquad n = 2,3,4,\cdots.$$

例如，当 $n=2$ 时，就有下列结果 (它们的成立条件是 $\mathrm{Re}\,\nu > 1/2$)：

$$\int_0^z \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}t}t^{\nu}\mathrm{J}_{\nu-2}(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{2\nu-2}{2\nu-1}\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}z}z^{\nu}\big[\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\mp\mathrm{i}\mathrm{J}_{\nu}(z)\big] - \frac{\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}z}z^{\nu+1}}{2\nu+1}\big[\mathrm{J}_{\nu}(z)\mp\mathrm{i}\mathrm{J}_{\nu+1}(z)\big], \tag{14.44}$$

$$\int_0^z t^\nu \mathrm{J}_{\nu-2}(t)\ \cos t\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{2\nu-2}{2\nu-1} z^\nu \big[\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\cos z + \mathrm{J}_\nu(z)\sin z\big]$$
$$- \frac{z^{\nu+1}}{2\nu+1}\big[\mathrm{J}_\nu(z)\cos z + \mathrm{J}_{\nu+1}(z)\sin z\big], \tag{14.45}$$

$$\int_0^z t^\nu \mathrm{J}_{\nu-2}(t)\ \sin t\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{2\nu-2}{2\nu-1} z^\nu \big[\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\sin z - \mathrm{J}_\nu(z)\cos z\big]$$
$$- \frac{z^{\nu+1}}{2\nu+1}\big[\mathrm{J}_\nu(z)\sin z - \mathrm{J}_{\nu+1}(z)\cos z\big]; \tag{14.46}$$

$$\int_0^z \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}t} t^\nu \mathrm{N}_{\nu-2}(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{2\nu-2}{2\nu-1}\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}z} z^\nu \big[\mathrm{N}_{\nu-1}(z) \mp \mathrm{i}\mathrm{N}_\nu(z)\big]$$
$$- \frac{\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}z} z^{\nu+1}}{2\nu+1}\big[\mathrm{N}_\nu(z) \mp \mathrm{i}\mathrm{N}_{\nu+1}(z)\big] \pm \frac{2\mathrm{i}}{\pi}\frac{2^\nu\Gamma(\nu)}{(2\nu-1)(2\nu+1)}, \tag{14.47}$$

$$\int_0^z t^\nu \mathrm{N}_{\nu-2}(t)\ \cos t\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{2\nu-2}{2\nu-1} z^\nu \big[\mathrm{N}_{\nu-1}(z)\cos z + \mathrm{N}_\nu(z)\sin z\big]$$
$$- \frac{z^{\nu+1}}{2\nu+1}\big[\mathrm{N}_\nu(z)\cos z + \mathrm{N}_{\nu+1}(z)\sin z\big], \tag{14.48}$$

$$\int_0^z t^\nu \mathrm{N}_{\nu-2}(t)\ \sin t\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{2\nu-2}{2\nu-1} z^\nu \big[\mathrm{N}_{\nu-1}(z)\sin z - \mathrm{N}_\nu(z)\cos z\big]$$
$$- \frac{z^{\nu+1}}{2\nu+1}\big[\mathrm{N}_\nu(z)\sin z - \mathrm{N}_{\nu+1}(z)\cos z\big] + \frac{2}{\pi}\frac{2^\nu\Gamma(\nu)}{(2\nu-1)(2\nu+1)}; \tag{14.49}$$

$$\int_0^z \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}(t-z)} t^\nu \mathrm{J}_{\nu-2}(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{2\nu-2}{2\nu-1} z^\nu \big[\mathrm{J}_{\nu-1}(z) \mp \mathrm{i}\mathrm{J}_\nu(z)\big] - \frac{z^{\nu+1}}{2\nu+1}\big[\mathrm{J}_\nu(z) \mp \mathrm{i}\mathrm{J}_{\nu+1}(z)\big], \tag{14.50}$$

$$\int_0^z t^\nu \mathrm{J}_{\nu-2}(t)\ \cos(z-t)\,\mathrm{d}t = \frac{2\nu-2}{2\nu-1} z^\nu \mathrm{J}_{\nu-1}(z) - \frac{z^{\nu+1}}{2\nu+1}\mathrm{J}_\nu(z), \tag{14.51}$$

$$\int_0^z t^\nu \mathrm{J}_{\nu-2}(t)\ \sin(z-t)\,\mathrm{d}t = \frac{2\nu-2}{2\nu-1} z^\nu \mathrm{J}_\nu(z) - \frac{z^{\nu+1}}{2\nu+1}\mathrm{J}_{\nu+1}(z); \tag{14.52}$$

$$\int_0^z \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}(t-z)} t^\nu \mathrm{N}_{\nu-2}(t)\,\mathrm{d}t$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2\nu-2}{2\nu-1} z^{\nu}\left[\mathrm{N}_{\nu-1}(z) \mp \mathrm{i}\mathrm{N}_{\nu}(z)\right] - \frac{z^{\nu+1}}{2\nu+1}\left[\mathrm{N}_{\nu}(z) \mp \mathrm{i}\mathrm{N}_{\nu+1}(z)\right] \\
&\quad \pm \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}z} \frac{2}{\pi} \frac{2^{\nu}\Gamma(\nu+1)}{(2\nu-1)(2\nu+1)},
\end{aligned}
\tag{14.53}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int_0^z t^{\nu}\mathrm{N}_{\nu-2}(t)\, \cos(z-t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2\nu-2}{2\nu-1} z^{\nu}\mathrm{N}_{\nu-1}(z) - \frac{z^{\nu+1}}{2\nu+1}\mathrm{N}_{\nu}(z) + \frac{2}{\pi}\frac{2^{\nu}\Gamma(\nu+1)}{(2\nu-1)(2\nu+1)}\sin z,
\end{aligned}
\tag{14.54}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int_0^z t^{\nu}\mathrm{N}_{\nu-2}(t)\, \sin(z-t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2\nu-2}{2\nu-1} z^{\nu}\mathrm{N}_{\nu}(z) - \frac{z^{\nu+1}}{2\nu+1}\mathrm{N}_{\nu+1}(z) - \frac{2}{\pi}\frac{2^{\nu}\Gamma(\nu+1)}{(2\nu-1)(2\nu+1)}\cos z.
\end{aligned}
\tag{14.55}
$$

同样，当 $n=3$ 时，也有

$$
\begin{aligned}
&\int_0^z \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}t} t^{\nu}\mathrm{J}_{\nu-3}(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2\nu-4}{2\nu-1}\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}z}\left\{z^{\nu-1}\mathrm{J}_{\nu-1}(z) - z^{\nu}\left[\mathrm{J}_{\nu-2}(z) \mp \mathrm{i}\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\right]\right\} \\
&\quad - \frac{\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}z}}{2\nu+1}\left\{z^{\nu}\mathrm{J}_{\nu}(z) - z^{\nu+1}\left[\mathrm{J}_{\nu-1}(z) \mp \mathrm{i}\mathrm{J}_{\nu}(z)\right]\right\},
\end{aligned}
\tag{14.56}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int_0^z t^{\nu}\mathrm{J}_{\nu-3}(t)\, \cos t\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2\nu-4}{2\nu-1}\left\{z^{\nu-1}\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\cos z - z^{\nu}\left[\mathrm{J}_{\nu-2}(z)\cos z + \mathrm{J}_{\nu-1}(z)\sin z\right]\right\} \\
&\quad - \frac{1}{2\nu+1}\left\{z^{\nu}\mathrm{J}_{\nu}(z)\cos z - z^{\nu+1}\left[\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\cos z + \mathrm{J}_{\nu}(z)\sin z\right]\right\},
\end{aligned}
\tag{14.57}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int_0^z t^{\nu}\mathrm{J}_{\nu-3}(t)\, \sin t\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2\nu-4}{2\nu-1}\left\{z^{\nu-1}\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\sin z - z^{\nu}\left[\mathrm{J}_{\nu-2}(z)\sin z - \mathrm{J}_{\nu-1}(z)\cos z\right]\right\} \\
&\quad - \frac{1}{2\nu+1}\left\{z^{\nu}\mathrm{J}_{\nu}(z)\sin z - z^{\nu+1}\left[\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\sin z - \mathrm{J}_{\nu}(z)\cos z\right]\right\};
\end{aligned}
\tag{14.58}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int_0^z \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}t} t^{\nu}\mathrm{N}_{\nu-3}(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2\nu-4}{2\nu-1}\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}z}\left\{z^{\nu-1}\mathrm{N}_{\nu-1}(z) - z^{\nu}\left[\mathrm{N}_{\nu-2}(z) \mp \mathrm{i}\mathrm{N}_{\nu-1}(z)\right]\right\} \\
&\quad - \frac{\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}z}}{2\nu+1}\left\{z^{\nu}\mathrm{N}_{\nu}(z) - z^{\nu+1}\left[\mathrm{N}_{\nu-1}(z) \mp \mathrm{i}\mathrm{N}_{\nu}(z)\right]\right\} \\
&\quad - \frac{3!}{\pi}\frac{2^{\nu-1}\Gamma(\nu-1)}{(2\nu-1)(2\nu+1)},
\end{aligned}
\tag{14.59}
$$

$$\int_0^z t^\nu \mathrm{N}_{\nu-3}(t)\,\cos t\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{2\nu-4}{2\nu-1}\Big\{z^{\nu-1}\mathrm{N}_{\nu-1}(z)\cos z - z^\nu\big[\mathrm{N}_{\nu-2}(z)\cos z + \mathrm{N}_{\nu-1}(z)\sin z\big]\Big\}$$
$$- \frac{1}{2\nu+1}\Big\{z^\nu \mathrm{N}_\nu(z)\cos z - z^{\nu+1}\big[\mathrm{N}_{\nu-1}(z)\cos z + \mathrm{N}_\nu(z)\sin z\big]\Big\}$$
$$- \frac{3!}{\pi}\frac{2^{\nu-1}\Gamma(\nu-1)}{(2\nu-1)(2\nu+1)}, \tag{14.60}$$

$$\int_0^z t^\nu \mathrm{N}_{\nu-3}(t)\,\sin t\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{2\nu-4}{2\nu-1}\Big\{z^{\nu-1}\mathrm{N}_{\nu-1}(z)\sin z - z^\nu\big[\mathrm{N}_{\nu-2}(z)\sin z - \mathrm{N}_{\nu-1}(z)\cos z\big]\Big\}$$
$$- \frac{1}{2\nu+1}\Big\{z^\nu \mathrm{N}_\nu(z)\sin z - z^{\nu+1}\big[\mathrm{N}_{\nu-1}(z)\sin z - \mathrm{N}_\nu(z)\cos z\big]\Big\}; \tag{14.61}$$

$$\int_0^z \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}(t-z)} t^\nu \mathrm{J}_{\nu-3}(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{2\nu-4}{2\nu-1}\Big\{z^{\nu-1}\mathrm{J}_{\nu-1}(z) - z^\nu\big[\mathrm{J}_{\nu-2}(z) \mp \mathrm{i}\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\big]\Big\}$$
$$- \frac{1}{2\nu+1}\Big\{z^\nu \mathrm{J}_\nu(z) - z^{\nu+1}\big[\mathrm{J}_{\nu-1}(z) \mp \mathrm{i}\mathrm{J}_\nu(z)\big]\Big\}, \tag{14.62}$$

$$\int_0^z t^\nu \mathrm{J}_{\nu-3}(t)\,\cos(z-t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{2\nu-4}{2\nu-1}\big[z^{\nu-1}\mathrm{J}_{\nu-1}(z) - z^\nu \mathrm{J}_{\nu-2}(z)\big]$$
$$- \frac{1}{2\nu+1}\big[z^\nu \mathrm{J}_\nu(z) - z^{\nu+1}\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\big], \tag{14.63}$$

$$\int_0^z t^\nu \mathrm{J}_{\nu-3}(t)\,\sin(z-t)\,\mathrm{d}t = -\frac{2\nu-4}{2\nu-1}z^\nu \mathrm{J}_{\nu-1}(z) + \frac{z^{\nu+1}}{2\nu+1}\mathrm{J}_\nu(z); \tag{14.64}$$

$$\int_0^z \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}(t-z)} t^\nu \mathrm{N}_{\nu-3}(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{2\nu-4}{2\nu-1}\Big\{z^{\nu-1}\mathrm{N}_{\nu-1}(z) - z^\nu\big[\mathrm{N}_{\nu-2}(z) \mp \mathrm{i}\mathrm{N}_{\nu-1}(z)\big]\Big\}$$
$$- \frac{1}{2\nu+1}\Big\{z^\nu \mathrm{N}_\nu(z) - z^{\nu+1}\big[\mathrm{N}_{\nu-1}(z) \mp \mathrm{i}\mathrm{N}_\nu(z)\big]\Big\}$$
$$- \frac{3!}{\pi}\frac{2^{\nu-1}\Gamma(\nu-1)}{(2\nu-1)(2\nu+1)}\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}z}, \tag{14.65}$$

$$\int_0^z t^\nu \mathrm{N}_{\nu-3}(t)\,\cos(z-t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{2\nu-4}{2\nu-1}\big[z^{\nu-1}\mathrm{N}_{\nu-1}(z) - z^\nu \mathrm{N}_{\nu-2}(z)\big] - \frac{1}{2\nu+1}\big[z^\nu \mathrm{N}_\nu(z) - z^{\nu+1}\mathrm{N}_{\nu-1}(z)\big]$$

$$-\frac{3!}{\pi}\frac{2^{\nu-1}\Gamma(\nu-1)}{(2\nu-1)(2\nu+1)}\cos z, \tag{14.66}$$

$$\int_0^z t^{\nu}\mathrm{N}_{\nu-3}(t)\sin(z-t)\,\mathrm{d}t$$
$$=-\frac{2\nu-4}{2\nu-1}z^{\nu}\mathrm{N}_{\nu-1}(z)+\frac{z^{\nu+1}}{2\nu+1}\mathrm{N}_{\nu}(z)-\frac{3!}{\pi}\frac{2^{\nu-1}\Gamma(\nu-1)}{(2\nu-1)(2\nu+1)}\sin z. \tag{14.67}$$

积分 (14.56) — (14.67) 的成立条件是 $\mathrm{Re}\,\nu>1$.

例 14.12 计算不定积分 $\int \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}z}z^{-\nu}\,\mathscr{C}_{\nu}(z)\,\mathrm{d}z$.

解 仍将待求的积分写成 $\int \mathrm{e}^{-pz}z^{-\nu}\,\mathscr{C}_{\nu}(z)\,\mathrm{d}z$，其中 $p=\pm\mathrm{i}$.

与例 14.9 类似，直接将待求积分分部积分，即可得到

$$\begin{aligned}&\int \mathrm{e}^{-pz}z^{-\nu}\,\mathscr{C}_{\nu}(z)\,\mathrm{d}z\\&=z\cdot\mathrm{e}^{-pz}z^{-\nu}\,\mathscr{C}_{\nu}(z)-\int z\cdot\left[\mathrm{e}^{-pz}z^{-\nu}\,\mathscr{C}_{\nu}(z)\right]'\mathrm{d}z\\&=\mathrm{e}^{-pz}z^{1-\nu}\,\mathscr{C}_{\nu}(z)-\int z\left[-p\mathrm{e}^{-pz}z^{-\nu}\,\mathscr{C}_{\nu}(z)-\mathrm{e}^{-pz}z^{-\nu}\,\mathscr{C}_{\nu+1}(z)\right]\mathrm{d}z\\&=\mathrm{e}^{-pz}z^{1-\nu}\,\mathscr{C}_{\nu}(z)+p\int \mathrm{e}^{-pz}z^{1-\nu}\,\mathscr{C}_{\nu}(z)\,\mathrm{d}z\\&\quad+\int \mathrm{e}^{-pz}z^{1-\nu}\left[\frac{2\nu}{z}\,\mathscr{C}_{\nu}(z)-\,\mathscr{C}_{\nu-1}(z)\right]\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}&(1-2\nu)\int \mathrm{e}^{-pz}z^{-\nu}\,\mathscr{C}_{\nu}(z)\,\mathrm{d}z\\&=\mathrm{e}^{-pz}z^{1-\nu}\,\mathscr{C}_{\nu}(z)+\int \mathrm{e}^{-pz}z^{1-\nu}\left[p\,\mathscr{C}_{\nu}(z)-\,\mathscr{C}_{\nu-1}(z)\right]\mathrm{d}z\\&=\mathrm{e}^{-pz}z^{1-\nu}\,\mathscr{C}_{\nu}(z)+\frac{1}{p}\int\left[-p\,\mathrm{e}^{-pz}z^{1-\nu}\,\mathscr{C}_{\nu-1}(z)-\mathrm{e}^{-pz}z^{1-\nu}\,\mathscr{C}_{\nu}(z)\right]\mathrm{d}z\\&=\mathrm{e}^{-pz}z^{1-\nu}\,\mathscr{C}_{\nu}(z)+\frac{1}{p}\int\left[\mathrm{e}^{-pz}z^{1-\nu}\,\mathscr{C}_{\nu-1}(z)\right]'\mathrm{d}z\\&=\mathrm{e}^{-pz}z^{1-\nu}\,\mathscr{C}_{\nu}(z)+\frac{1}{p}\left[\mathrm{e}^{-pz}z^{1-\nu}\,\mathscr{C}_{\nu-1}(z)\right]+C.\end{aligned}$$

代入 $p=\mp\mathrm{i}$，当 $\nu\neq1/2$ 时就有

$$\int \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}z}z^{-\nu}\,\mathscr{C}_{\nu}(z)\,\mathrm{d}z=\frac{1}{1-2\nu}\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}z}z^{1-\nu}\left[\,\mathscr{C}_{\nu}(z)\pm\mathrm{i}\,\mathscr{C}_{\nu-1}(z)\right]+C. \tag{14.68}$$

也可以进一步写成变上限积分的形式. 对于 Bessel 函数，有

$$\int_0^z \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}t}t^{-\nu}\mathrm{J}_{\nu}(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{1-2\nu}\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}t}t^{1-\nu}\left[\mathrm{J}_{\nu}(t)\pm\mathrm{i}\mathrm{J}_{\nu-1}(t)\right]\Big|_0^z$$

$$= \frac{1}{1-2\nu}\left\{\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}z}z^{1-\nu}\left[\mathrm{J}_\nu(z)\pm\mathrm{i}\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\right]\mp\mathrm{i}\,\frac{2^{1-\nu}\,\Gamma(1-\nu)}{\pi}\sin\pi\nu\right\}, \tag{14.69}$$

由此即可导出

$$\int_0^z t^{-\nu}\mathrm{J}_\nu(t)\cos t\,\mathrm{d}t = \frac{z^{1-\nu}}{1-2\nu}\left[\mathrm{J}_\nu(z)\cos z - \mathrm{J}_{\nu-1}(z)\sin z\right], \tag{14.70}$$

$$\int_0^z t^{-\nu}\mathrm{J}_\nu(t)\sin t\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{1-2\nu}\left\{z^{1-\nu}\left[\mathrm{J}_\nu(z)\sin z + \mathrm{J}_{\nu-1}(z)\cos z\right] - \frac{2^{1-\nu}\,\Gamma(1-\nu)}{\pi}\sin\pi\nu\right\}. \tag{14.71}$$

还可以将 (14.69) 式改写成

$$\int_0^z \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}(t-z)}t^{-\nu}\mathrm{J}_\nu(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{1-2\nu}\left\{z^{1-\nu}\left[\mathrm{J}_\nu(z)\pm\mathrm{i}\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\right]\mp\mathrm{i}\,\frac{2^{1-\nu}\,\Gamma(1-\nu)}{\pi}\sin\pi\nu\cdot\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}z}\right\}. \tag{14.72}$$

所以又能得到

$$\int_0^z t^{-\nu}\mathrm{J}_\nu(t)\cos(z-t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{1-2\nu}\left[z^{1-\nu}\mathrm{J}_\nu(z) - \frac{2^{1-\nu}\,\Gamma(1-\nu)}{\pi}\sin\pi\nu\cdot\sin z\right], \tag{14.73}$$

$$\int_0^z t^{-\nu}\mathrm{J}_\nu(t)\sin(z-t)\,\mathrm{d}t$$
$$= -\frac{1}{1-2\nu}\left[z^{1-\nu}\mathrm{J}_{\nu-1}(z) - \frac{2^{1-\nu}\,\Gamma(1-\nu)}{\pi}\sin\pi\nu\cdot\cos z\right]. \tag{14.74}$$

☞ **讨论** (14.68) 式也适用于 Neumann 函数. 在 $\mathrm{Re}\,\nu < 1/2$ 的条件下，可以有下列变上限积分:

$$\int_0^z \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}t}t^{-\nu}\mathrm{N}_\nu(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{1-2\nu}\left\{\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}z}z^{1-\nu}\left[\mathrm{N}_\nu(z)\pm\mathrm{i}\mathrm{N}_{\nu-1}(z)\right]\mp\mathrm{i}\,\frac{2^{1-\nu}\,\Gamma(1-\nu)}{\pi}\cos\pi\nu\right\}, \tag{14.75}$$

$$\int_0^z t^{-\nu}\mathrm{N}_\nu(t)\cos t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{1-2\nu}z^{1-\nu}\left[\mathrm{N}_\nu(z)\cos z - \mathrm{N}_{\nu-1}(z)\sin z\right], \tag{14.76}$$

$$\int_0^z t^{-\nu}\mathrm{N}_\nu(t)\sin t\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{1-2\nu}\left\{z^{1-\nu}\left[\mathrm{N}_\nu(z)\sin z + \mathrm{N}_{\nu-1}(z)\cos z\right] - \frac{2^{1-\nu}\,\Gamma(1-\nu)}{\pi}\cos\pi\nu\right\}; \tag{14.77}$$

$$\int_0^z \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}(t-z)}t^{-\nu}\mathrm{N}_\nu(t)\,\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{1-2\nu}\left\{z^{1-\nu}\left[\mathrm{N}_\nu(z)\pm\mathrm{i}\mathrm{N}_{\nu-1}(z)\right]\mp\mathrm{i}\,\frac{2^{1-\nu}\,\Gamma(1-\nu)}{\pi}\cos\pi\nu\cdot\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}z}\right\},\tag{14.78}$$

$$\int_0^z t^{-\nu}\mathrm{N}_\nu(t)\cos(z-t)\,\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{1-2\nu}\left[z^{1-\nu}\mathrm{N}_\nu(z)-\frac{2^{1-\nu}\,\Gamma(1-\nu)}{\pi}\cos\pi\nu\cdot\sin z\right],\tag{14.79}$$

$$\int_0^z t^{-\nu}\mathrm{N}_\nu(t)\sin(z-t)\,\mathrm{d}t$$
$$=-\frac{1}{1-2\nu}\left[z^{1-\nu}\mathrm{N}_{\nu-1}(z)-\frac{2^{1-\nu}\,\Gamma(1-\nu)}{\pi}\cos\pi\nu\cdot\cos z\right].\tag{14.80}$$

例 14.13 考虑不定积分$\int \mathrm{e}^{-pz}z^{-\nu}\,\mathscr{C}_{\nu+1}(z)\,\mathrm{d}z$. 直接对其分部积分，也能得到递推关系

$$\int \mathrm{e}^{-pz}z^{-\nu}\,\mathscr{C}_{\nu+1}(z)\,\mathrm{d}z=-\mathrm{e}^{-pz}z^{-\nu}\,\mathscr{C}_\nu(z)-p\int \mathrm{e}^{-pz}z^{-\nu}\,\mathscr{C}_\nu(z)\,\mathrm{d}z.$$

令 $p=\mp\mathrm{i}$，则可代入 (14.68) 式的结果，从而得到

$$\int \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}z}z^{-\nu}\,\mathscr{C}_{\nu+1}(z)\,\mathrm{d}z$$
$$=-\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}z}z^{-\nu}\,\mathscr{C}_\nu(z)\pm\int \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}z}z^{-\nu}\,\mathscr{C}_\nu(z)\,\mathrm{d}z$$
$$=-\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}z}z^{-\nu}\,\mathscr{C}_\nu(z)+\frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}z}z^{1-\nu}}{1-2\nu}\Big[\pm\,\mathscr{C}_\nu(z)+\mathrm{i}\,\mathscr{C}_{\nu-1}(z)\Big]+C\tag{14.81a}$$
$$=-\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}z}z^{-\nu}\,\mathscr{C}_\nu(z)\pm\frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}z}z^{1-\nu}}{1-2\nu}\,\mathscr{C}_\nu(z)-\frac{\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}z}z^{1-\nu}}{1-2\nu}\left[\frac{2\nu}{z}\,\mathscr{C}_\nu(z)-\,\mathscr{C}_{\nu+1}(z)\right]+C$$
$$=\frac{\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}z}z^{1-\nu}}{1-2\nu}\Big[\,\mathscr{C}_{\nu+1}(z)\pm\mathrm{i}\,\mathscr{C}_\nu(z)\Big]-\frac{\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}z}z^{-\nu}}{1-2\nu}\,\mathscr{C}_\nu(z)+C.\tag{14.81b}$$

同样可以写成变上限积分的形式：

$$\int_0^z \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}t}t^{-\nu}\mathrm{J}_{\nu+1}(t)\,\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{1-2\nu}\left\{\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}z}z^{1-\nu}\left[\mathrm{J}_{\nu+1}(z)\pm\mathrm{i}\mathrm{J}_\nu(z)\right]-\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}z}z^{-\nu}\mathrm{J}_\nu(z)+\frac{1}{2^\nu\Gamma(\nu+1)}\right\}.\tag{14.82}$$

由此还可以推出

$$\int_0^z t^{-\nu}\mathrm{J}_{\nu+1}(t)\cos t\,\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{1-2\nu}\left\{z^{1-\nu}\big[\mathrm{J}_{\nu+1}(z)\cos z-\mathrm{J}_\nu(z)\sin z\big]-z^{-\nu}\mathrm{J}_\nu(z)\cos z+\frac{1}{2^\nu\Gamma(\nu+1)}\right\},\tag{14.83}$$

$$\int_0^z t^{-\nu}\mathrm{J}_{\nu+1}(t)\sin t\,\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{1-2\nu}\left\{z^{1-\nu}\big[\mathrm{J}_{\nu+1}(z)\sin z+\mathrm{J}_\nu(z)\sin z\big]-z^{-\nu}\mathrm{J}_\nu(z)\sin z\right\}.\tag{14.84}$$

再将 (14.82) 式改写成

$$\int_0^z \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}(t-z)}t^{-\nu}\mathrm{J}_{\nu+1}(t)\,\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{1-2\nu}\left\{z^{1-\nu}\big[\mathrm{J}_{\nu+1}(z)\pm\mathrm{i}\mathrm{J}_\nu(z)\big]-z^{-\nu}\mathrm{J}_\nu(z)+\frac{1}{2^\nu\Gamma(\nu+1)}\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}z}\right\},\tag{14.85}$$

由此又可以推出

$$\int_0^z t^{-\nu}\mathrm{J}_{\nu+1}(t)\cos(z-t)\,\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{1-2\nu}\left[z^{1-\nu}\mathrm{J}_{\nu+1}(z)-z^{-\nu}\mathrm{J}_\nu(z)+\frac{\cos z}{2^\nu\Gamma(\nu+1)}\right],\tag{14.86}$$

$$\int_0^z t^{-\nu}\mathrm{J}_{\nu+1}(t)\sin(z-t)\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{1-2\nu}\left[z^{1-\nu}\mathrm{J}_\nu(z)+\frac{\sin z}{2^\nu\Gamma(\nu+1)}\right].\tag{14.87}$$

对于 Neumann 函数，也有类似的结果：

$$\int_0^z \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}t}t^{-\nu}\mathrm{N}_{\nu+1}(t)\,\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{1-2\nu}\left\{\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}z}z^{1-\nu}\big[\mathrm{N}_{\nu+1}(z)\pm\mathrm{i}\mathrm{N}_\nu(z)\big]-\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}z}z^{-\nu}\mathrm{N}_\nu(z)-\frac{2^{-\nu}\Gamma(-\nu)}{\pi}\cos\pi\nu\right\},\tag{14.88}$$

$$\int_0^z t^{-\nu}\mathrm{N}_{\nu+1}(t)\cos t\,\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{1-2\nu}\left\{z^{1-\nu}\big[\mathrm{N}_{\nu+1}(z)\cos z-\mathrm{N}_\nu(z)\sin z\big]-z^{-\nu}\mathrm{N}_\nu(z)\cos z\right\}$$
$$-\frac{2^{-\nu}\Gamma(-\nu)}{1-2\nu}\,\frac{\cos\pi\nu}{\pi},\tag{14.89}$$

$$\int_0^z t^{-\nu}\mathrm{N}_{\nu+1}(t)\sin t\,\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{1-2\nu}\left\{z^{1-\nu}\big[\mathrm{N}_{\nu+1}(z)\sin z+\mathrm{N}_\nu(z)\sin z\big]-z^{-\nu}\mathrm{N}_\nu(z)\sin z\right\};\tag{14.90}$$

$$\int_0^z \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}(t-z)}t^{-\nu}\mathrm{N}_{\nu+1}(t)\,\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{1-2\nu}\left\{z^{1-\nu}\left[\mathrm{N}_{\nu+1}(z)\pm\mathrm{i}\mathrm{N}_\nu(z)\right]-z^{-\nu}\mathrm{N}_\nu(z)-\frac{2^{-\nu}\Gamma(-\nu)}{\pi}\cos\pi\nu\cdot\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}z}\right\},\tag{14.91}$$

$$\int_0^z t^{-\nu}\mathrm{N}_{\nu+1}(t)\cos(z-t)\,\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{1-2\nu}\left[z^{1-\nu}\mathrm{N}_{\nu+1}(z)-z^{-\nu}\mathrm{N}_\nu(z)-\frac{2^{-\nu}\Gamma(-\nu)}{\pi}\cos\pi\nu\cdot\cos z\right],\tag{14.92}$$

$$\int_0^z t^{-\nu}\mathrm{N}_{\nu+1}(t)\sin(z-t)\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{1-2\nu}\left[z^{1-\nu}\mathrm{N}_\nu(z)+\frac{2^{-\nu}\Gamma(-\nu)}{\pi}\cos\pi\nu\cdot\sin z\right].\tag{14.93}$$

成立条件为 $\mathrm{Re}\,\nu<0$.

例 14.14 仿照例 14.11，由柱函数的递推关系 (14.22b) 也能证明

$$\int \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}z}z^{-\nu}\,\mathscr{C}_{\nu+n+2}(z)\,\mathrm{d}z$$
$$=(2\nu+2n+2)\int \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}z}z^{-\nu-1}\,\mathscr{C}_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{d}z-\int \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}z}z^{-\nu}\,\mathscr{C}_{\nu+n}(z)\,\mathrm{d}z.\tag{14.94}$$

于是，根据上面已经计算得的积分 $\int \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}z}z^{-\nu}\,\mathscr{C}_\nu(z)\,\mathrm{d}z$ 和 $\int \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}z}z^{-\nu}\,\mathscr{C}_{\nu+1}(z)\,\mathrm{d}z$，就可以导出全部积分

$$\int \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}z}z^{-\nu}\,\mathscr{C}_{\nu+n}(z)\,\mathrm{d}z,\qquad n=2,3,4,\cdots.$$

作为示例，下面列出 $n=2$ 的结果，它们的成立条件是 $\mathrm{Re}\,\nu<-1/2$:

$$\int_0^z \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}t}t^{-\nu}\mathrm{J}_{\nu+2}(t)\,\mathrm{d}t$$
$$=-\frac{2\nu+2}{2\nu+1}\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}z}z^{-\nu}\left[\mathrm{J}_{\nu+1}(z)\pm\mathrm{i}\mathrm{J}_\nu(z)\right]$$
$$+\frac{\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}z}z^{1-\nu}}{2\nu-1}\left[\mathrm{J}_\nu(z)\pm\mathrm{i}\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\right]\pm\frac{2\mathrm{i}}{\pi}\frac{2^{-\nu}\Gamma(-\nu)}{(1-2\nu)(1+2\nu)}\sin\pi\nu,\tag{14.95}$$

$$\int_0^z t^{-\nu}\mathrm{J}_{\nu+2}(t)\,\cos t\,\mathrm{d}t$$
$$=-\frac{2\nu+2}{2\nu+1}z^{-\nu}\left[\mathrm{J}_{\nu+1}(z)\cos z-\mathrm{J}_\nu(z)\sin z\right]$$
$$+\frac{z^{1-\nu}}{2\nu-1}\left[\mathrm{J}_\nu(z)\cos z-\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\sin z\right],\tag{14.96}$$

$$\begin{aligned}&\int_0^z t^{-\nu}\mathrm{J}_{\nu+2}(t)\,\sin t\,\mathrm{d}t\\&\quad=-\frac{2\nu+2}{2\nu+1}z^{-\nu}\big[\mathrm{J}_{\nu+1}(z)\sin z+\mathrm{J}_\nu(z)\cos z\big]\\&\qquad+\frac{z^{1-\nu}}{2\nu-1}\big[\mathrm{J}_\nu(z)\sin z+\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\cos z\big]+\frac{2}{\pi}\frac{2^{-\nu}\Gamma(-\nu)}{(1-2\nu)(1+2\nu)}\sin\pi\nu;\end{aligned}\tag{14.97}$$

$$\begin{aligned}&\int_0^z \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}(t-z)}t^{-\nu}\mathrm{J}_{\nu+2}(t)\,\mathrm{d}t\\&\quad=-\frac{2\nu+2}{2\nu+1}z^{-\nu}\big[\mathrm{J}_{\nu+1}(z)\pm\mathrm{i}\mathrm{J}_\nu(z)\big]\\&\qquad+\frac{z^{1-\nu}}{2\nu-1}\big[\mathrm{J}_\nu(z)\pm\mathrm{i}\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\big]\pm\frac{2\mathrm{i}}{\pi}\frac{2^{-\nu}\Gamma(-\nu)}{(1-2\nu)(1+2\nu)}\sin\pi\nu\,\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}z},\end{aligned}\tag{14.98}$$

$$\begin{aligned}&\int_0^z t^{-\nu}\mathrm{J}_{\nu+2}(t)\,\cos(z-t)\,\mathrm{d}t\\&\quad=-\frac{2\nu+2}{2\nu+1}z^{-\nu}\mathrm{J}_{\nu+1}(z)+\frac{z^{1-\nu}}{2\nu-1}\mathrm{J}_\nu(z)+\frac{2}{\pi}\frac{2^{-\nu}\Gamma(-\nu)}{(1-2\nu)(1+2\nu)}\sin\pi\nu\cdot\sin z,\end{aligned}\tag{14.99}$$

$$\begin{aligned}&\int_0^z t^{-\nu}\mathrm{J}_{\nu+2}(t)\,\sin(z-t)\,\mathrm{d}t\\&\quad=\frac{2\nu+2}{2\nu+1}z^{-\nu}\mathrm{J}_\nu(z)-\frac{z^{1-\nu}}{2\nu-1}\mathrm{J}_{\nu-1}(z)-\frac{2}{\pi}\frac{2^{-\nu}\Gamma(-\nu)}{(1-2\nu)(1+2\nu)}\sin\pi\nu\cdot\cos z;\end{aligned}\tag{14.100}$$

$$\begin{aligned}&\int_0^z \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}t}t^{-\nu}\mathrm{N}_{\nu+2}(t)\,\mathrm{d}t\\&\quad=-\frac{2\nu+2}{2\nu+1}\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}z}z^{-\nu}\big[\mathrm{N}_{\nu+1}(z)\pm\mathrm{i}\mathrm{N}_\nu(z)\big]\\&\qquad+\frac{\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}z}z^{1-\nu}}{2\nu-1}\big[\mathrm{N}_\nu(z)\pm\mathrm{i}\mathrm{N}_{\nu-1}(z)\big]\pm\frac{2\mathrm{i}}{\pi}\frac{2^{-\nu}\Gamma(-\nu)}{(1-2\nu)(1+2\nu)}\cos\pi\nu,\end{aligned}\tag{14.101}$$

$$\begin{aligned}&\int_0^z t^{-\nu}\mathrm{N}_{\nu+2}(t)\,\cos t\,\mathrm{d}t\\&\quad=-\frac{2\nu+2}{2\nu+1}z^{-\nu}\big[\mathrm{N}_{\nu+1}(z)\cos z-\mathrm{N}_\nu(z)\sin z\big]\\&\qquad+\frac{z^{1-\nu}}{2\nu-1}\big[\mathrm{N}_\nu(z)\cos z-\mathrm{N}_{\nu-1}(z)\sin z\big],\end{aligned}\tag{14.102}$$

$$\begin{aligned}&\int_0^z t^{-\nu}\mathrm{N}_{\nu+2}(t)\,\sin t\,\mathrm{d}t\\&\quad=-\frac{2\nu+2}{2\nu+1}z^{-\nu}\big[\mathrm{N}_{\nu+1}(z)\sin z+\mathrm{N}_\nu(z)\cos z\big]\\&\qquad+\frac{z^{1-\nu}}{2\nu-1}\big[\mathrm{N}_\nu(z)\sin z+\mathrm{N}_{\nu-1}(z)\cos z\big]+\frac{2}{\pi}\frac{2^{-\nu}\Gamma(-\nu)}{(1-2\nu)(1+2\nu)}\cos\pi\nu;\end{aligned}\tag{14.103}$$

$$\int_0^z \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}(t-z)} t^{-\nu} \mathrm{N}_{\nu+2}(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= -\frac{2\nu+2}{2\nu+1} z^{-\nu}\left[\mathrm{N}_{\nu+1}(z) \pm \mathrm{i}\mathrm{N}_\nu(z)\right]$$
$$+ \frac{z^{1-\nu}}{2\nu-1}\left[\mathrm{N}_\nu(z) \pm \mathrm{i}\mathrm{N}_{\nu-1}(z)\right] \pm \frac{2\mathrm{i}}{\pi}\frac{2^{-\nu}\Gamma(-\nu)}{(1-2\nu)(1+2\nu)}\cos\pi\nu\cdot \mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}z}, \tag{14.104}$$

$$\int_0^z t^{-\nu}\mathrm{N}_{\nu+2}(t)\,\cos(z-t)\,\mathrm{d}t$$
$$= -\frac{2\nu+2}{2\nu+1} z^{-\nu}\mathrm{N}_{\nu+1}(z) + \frac{z^{1-\nu}}{2\nu-1}\mathrm{N}_\nu(z)$$
$$+ \frac{2}{\pi}\frac{2^{-\nu}\Gamma(-\nu)}{(1-2\nu)(1+2\nu)}\cos\pi\nu\cdot\sin z, \tag{14.105}$$

$$\int_0^z t^{-\nu}\mathrm{N}_{\nu+2}(t)\,\sin(z-t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{2\nu+2}{2\nu+1} z^{-\nu}\mathrm{N}_\nu(z) - \frac{z^{1-\nu}}{2\nu-1}\mathrm{N}_{\nu-1}(z) - \frac{2}{\pi}\frac{2^{-\nu}\Gamma(-\nu)}{(1-2\nu)(1+2\nu)}\cos\pi\nu\cdot\cos z. \tag{14.106}$$

同样也能列出 $n=3$ 的结果，它们的成立条件是 $\mathrm{Re}\,\nu < -1$：

$$\int_0^z \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}t} t^{-\nu}\mathrm{J}_{\nu+3}(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= -\frac{2\nu+4}{2\nu+1}\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}z}\left\{z^{-\nu}\left[\mathrm{J}_{\nu+2}(z) \pm \mathrm{i}\mathrm{J}_{\nu+1}(z)\right] - z^{-1-\nu}\mathrm{J}_{\nu+1}(z)\right\}$$
$$+ \frac{\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}z}}{2\nu-1}\left\{z^{1-\nu}\left[\mathrm{J}_{\nu+1}(z) \pm \mathrm{i}\mathrm{J}_\nu(z)\right] - z^{-\nu}\mathrm{J}_\nu(z)\right\}$$
$$+ \frac{3!}{\pi}\frac{2^{-\nu-1}\Gamma(-\nu-1)}{(2\nu-1)(2\nu+1)}\sin\pi\nu, \tag{14.107}$$

$$\int_0^z t^{-\nu}\mathrm{J}_{\nu+3}(t)\,\cos t\,\mathrm{d}t$$
$$= -\frac{2\nu+4}{2\nu+1}\left\{z^{-\nu}\left[\mathrm{J}_{\nu+2}(z)\cos z - \mathrm{J}_{\nu+1}(z)\sin z\right] - z^{-\nu-1}\mathrm{J}_{\nu+1}(z)\cos z\right\}$$
$$+ \frac{1}{2\nu-1}\left\{z^{1-\nu}\left[\mathrm{J}_{\nu+1}(z)\cos z - \mathrm{J}_\nu(z)\sin z\right] - z^{-\nu}\mathrm{J}_\nu(z)\cos z\right\}$$
$$+ \frac{3!}{\pi}\frac{2^{-\nu-1}\Gamma(-\nu-1)}{(2\nu-1)(2\nu+1)}\sin\pi\nu, \tag{14.108}$$

$$\int_0^z t^{-\nu}\mathrm{J}_{\nu+3}(t)\,\sin t\,\mathrm{d}t$$
$$= -\frac{2\nu+4}{2\nu+1}\left\{z^{-\nu}\left[\mathrm{J}_{\nu+2}(z)\sin z + \mathrm{J}_{\nu+1}(z)\cos z\right] - z^{-\nu-1}\mathrm{J}_{\nu+1}(z)\sin z\right\}$$
$$+ \frac{1}{2\nu-1}z^{1-\nu}\left\{\left[\mathrm{J}_{\nu+1}(z)\sin z + \mathrm{J}_\nu(z)\cos z\right] - z^{-\nu}\mathrm{J}_\nu(z)\sin z\right\}; \tag{14.109}$$

$$\int_0^z \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}(t-z)} t^{-\nu} \mathrm{J}_{\nu+3}(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= -\frac{2\nu+4}{2\nu+1}\left\{z^{-\nu}\left[\mathrm{J}_{\nu+2}(z) \pm \mathrm{i}\mathrm{J}_{\nu+1}(z)\right] - z^{-\nu-1}\mathrm{J}_{\nu+1}(z)\right\}$$
$$+ \frac{1}{2\nu-1}\left\{z^{1-\nu}\left[\mathrm{J}_{\nu+1}(z) \pm \mathrm{i}\mathrm{J}_{\nu}(z)\right] - z^{-\nu}\mathrm{J}_{\nu}(z)\right\}$$
$$+ \frac{3!}{\pi}\frac{2^{-\nu-1}\Gamma(-\nu-1)}{(2\nu-1)(2\nu+1)}\sin\pi\nu\cdot\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}z}, \tag{14.110}$$

$$\int_0^z t^{-\nu}\mathrm{J}_{\nu+3}(t)\,\cos(z-t)\,\mathrm{d}t$$
$$= -\frac{2\nu+4}{2\nu+1}\left\{z^{-\nu}\mathrm{J}_{\nu+2}(z) - z^{-\nu-1}\mathrm{J}_{\nu+1}(z)\right\} + \frac{1}{2\nu-1}\left\{z^{1-\nu}\mathrm{J}_{\nu+1}(z) - z^{-\nu}\mathrm{J}_{\nu}(z)\right\}$$
$$+ \frac{3!}{\pi}\frac{2^{-\nu-1}\Gamma(-\nu-1)}{(2\nu-1)(2\nu+1)}\sin\pi\nu\cdot\cos z, \tag{14.111}$$

$$\int_0^z t^{-\nu}\mathrm{J}_{\nu+3}(t)\,\sin(z-t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{2\nu+4}{2\nu+1}z^{-\nu}\mathrm{J}_{\nu+1}(z) - \frac{z^{1-\nu}}{2\nu-1}\mathrm{J}_{\nu}(z) + \frac{3!}{\pi}\frac{2^{-\nu-1}\Gamma(-\nu-1)}{(2\nu-1)(2\nu+1)}\sin\pi\nu\cdot\sin z; \tag{14.112}$$

$$\int_0^z \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}t} t^{-\nu}\mathrm{N}_{\nu+3}(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= -\frac{2\nu+4}{2\nu+1}\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}z}\left\{z^{-\nu}\left[\mathrm{N}_{\nu+2}(z) \pm \mathrm{i}\mathrm{N}_{\nu+1}(z)\right] - z^{-1-\nu}\mathrm{N}_{\nu+1}(z)\right\}$$
$$+ \frac{\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}z}}{2\nu-1}\left\{z^{1-\nu}\left[\mathrm{N}_{\nu+1}(z) \pm \mathrm{i}\mathrm{N}_{\nu}(z)\right] - z^{-\nu}\mathrm{N}_{\nu}(z)\right\}$$
$$+ \frac{3!}{\pi}\frac{2^{-\nu-1}\Gamma(-\nu-1)}{(2\nu-1)(2\nu+1)}\cos\pi\nu, \tag{14.113}$$

$$\int_0^z t^{-\nu}\mathrm{N}_{\nu+3}(t)\,\cos t\,\mathrm{d}t$$
$$= -\frac{2\nu+4}{2\nu+1}\left\{z^{-\nu}\left[\mathrm{N}_{\nu+2}(z)\cos z - \mathrm{N}_{\nu+1}(z)\sin z\right] - z^{-\nu-1}\mathrm{N}_{\nu+1}(z)\cos z\right\}$$
$$+ \frac{1}{2\nu-1}\left\{z^{1-\nu}\left[\mathrm{N}_{\nu+1}(z)\cos z - \mathrm{N}_{\nu}(z)\sin z\right] - z^{-\nu}\mathrm{N}_{\nu}(z)\cos z\right\}$$
$$+ \frac{3!}{\pi}\frac{2^{-\nu-1}\Gamma(-\nu-1)}{(2\nu-1)(2\nu+1)}\cos\pi\nu, \tag{14.114}$$

$$\int_0^z t^{-\nu}\mathrm{N}_{\nu+3}(t)\,\sin t\,\mathrm{d}t$$
$$= -\frac{2\nu+4}{2\nu+1}\left\{z^{-\nu}\left[\mathrm{N}_{\nu+2}(z)\sin z + \mathrm{N}_{\nu+1}(z)\cos z\right] - z^{-\nu-1}\mathrm{N}_{\nu+1}(z)\sin z\right\}$$
$$+ \frac{z^{1-\nu}}{2\nu-1}\left\{\left[\mathrm{N}_{\nu+1}(z)\sin z + \mathrm{N}_{\nu}(z)\cos z\right] - z^{-\nu}\mathrm{N}_{\nu}(z)\sin z\right\}; \tag{14.115}$$

$$\int_0^z \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}(t-z)}t^{-\nu}\mathrm{N}_{\nu+3}(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= -\frac{2\nu+4}{2\nu+1}\Big\{z^{-\nu}\big[\mathrm{N}_{\nu+2}(z)\pm\mathrm{i}\mathrm{N}_{\nu+1}(z)\big]-z^{-\nu-1}\mathrm{N}_{\nu+1}(z)\Big\}$$
$$+\frac{1}{2\nu-1}\Big\{z^{1-\nu}\big[\mathrm{N}_{\nu+1}(z)\pm\mathrm{i}\mathrm{N}_{\nu}(z)\big]-z^{-\nu}\mathrm{N}_{\nu}(z)\Big\}$$
$$+\frac{3!}{\pi}\frac{2^{-\nu-1}\Gamma(-\nu-1)}{(2\nu-1)(2\nu+1)}\cos\pi\nu\cdot\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}z}, \tag{14.116}$$

$$\int_0^z t^{-\nu}\mathrm{N}_{\nu+3}(t)\cos(z-t)\,\mathrm{d}t$$
$$= -\frac{2\nu+4}{2\nu+1}\Big\{z^{-\nu}\mathrm{N}_{\nu+2}(z)-z^{-\nu-1}\mathrm{N}_{\nu+1}(z)\Big\}$$
$$+\frac{1}{2\nu-1}\Big\{z^{1-\nu}\mathrm{N}_{\nu+1}(z)-z^{-\nu}\mathrm{N}_{\nu}(z)\Big\}+\frac{3!}{\pi}\frac{2^{-\nu-1}\Gamma(-\nu-1)}{(2\nu-1)(2\nu+1)}\cos\pi\nu\cdot\cos z, \tag{14.117}$$

$$\int_0^z t^{-\nu}\mathrm{N}_{\nu+3}(t)\sin(z-t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{2\nu+4}{2\nu+1}z^{-\nu}\mathrm{N}_{\nu+1}(z)-\frac{z^{1-\nu}}{2\nu-1}\mathrm{N}_{\nu}(z)+\frac{3!}{\pi}\frac{2^{-\nu-1}\Gamma(-\nu-1)}{(2\nu-1)(2\nu+1)}\cos\pi\nu\cdot\sin z. \tag{14.118}$$

例 14.15 还可以从 Laplace 变换的角度考察 (14.30)，(14.31) 及 (14.38) 式．例如，由

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt}\cos t\,\mathrm{d}t = \frac{p}{p^2+1}, \tag{14.119}$$
$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt}\sin t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{p^2+1} \tag{14.120}$$

及 (14.17) 式，根据 Laplace 变换的卷积定理就有

$$\int_0^t \cos(t-\tau)\tau^{\nu}\mathrm{J}_{\nu}(\tau)\,\mathrm{d}\tau \risingdotseq \frac{p}{p^2+1}\cdot\frac{2^{\nu}\Gamma(\nu+1/2)}{\sqrt{\pi}(1+p^2)^{\nu+1/2}}=\frac{2^{\nu}\Gamma(\nu+1/2)\,p}{\sqrt{\pi}(1+p^2)^{\nu+3/2}},$$
$$\int_0^t \sin(t-\tau)\tau^{\nu}\mathrm{J}_{\nu}(\tau)\,\mathrm{d}\tau \risingdotseq \frac{1}{p^2+1}\cdot\frac{2^{\nu}\Gamma(\nu+1/2)}{\sqrt{\pi}(1+p^2)^{\nu+1/2}}=\frac{2^{\nu}\Gamma(\nu+1/2)}{\sqrt{\pi}(1+p^2)^{\nu+3/2}}.$$

对照 (14.18) 及 (14.19) 式，就能导出 (14.30) 和 (14.31) 式．

基于同样的想法，就可以得到一系列卷积型的积分公式，例如：

$$\int_0^z \mathrm{J}_{\nu}(x)\mathrm{J}_{-\nu}(z-x)\,\mathrm{d}x=\sin z, \qquad -1<\operatorname{Re}\nu<1, \tag{14.121}$$
$$\int_0^z \mathrm{J}_{\nu}(x)\mathrm{J}_{1-\nu}(z-x)\,\mathrm{d}x=\mathrm{J}_0(z)-\cos z, \qquad -1<\operatorname{Re}\nu<2, \tag{14.122}$$

$$\int_0^z \mathrm{J}_\mu(x)\mathrm{J}_\nu(z-x)\,\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{1}{\mu}\,\mathrm{J}_{\mu+\nu}(z), \qquad \mathrm{Re}\,\mu>0,\ \mathrm{Re}\,\nu>-1, \tag{14.123}$$

$$\int_0^z \frac{\mathrm{J}_\mu(x)}{x}\frac{\mathrm{J}_\nu(z-x)}{z-x}\,\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\nu}\right)\frac{1}{z}\,\mathrm{J}_{\mu+\nu}(z), \qquad \mathrm{Re}\,\mu>0,\ \mathrm{Re}\,\nu>0, \tag{14.124}$$

$$\int_0^z x^\mu(z-x)^\nu \mathrm{J}_\mu(x)\mathrm{J}_\nu(z-x)\,\mathrm{d}x = \frac{\Gamma(\mu+1/2)\,\Gamma(\nu+1/2)}{\sqrt{2\pi}\,\Gamma(\mu+\nu+1)}z^{\mu+\nu+1/2}\mathrm{J}_{\mu+\nu+1/2}(z),$$
$$\mathrm{Re}\,\mu>-\frac{1}{2},\ \mathrm{Re}\,\nu>-\frac{1}{2}, \tag{14.125}$$

$$\int_0^z x^\mu(z-x)^{\nu+1} \mathrm{J}_\mu(x)\mathrm{J}_\nu(z-x)\,\mathrm{d}x = \frac{\Gamma(\mu+1/2)\,\Gamma(\nu+3/2)}{\sqrt{2\pi}\,\Gamma(\mu+\nu+2)}z^{\mu+\nu+3/2}\mathrm{J}_{\mu+\nu+1/2}(z),$$
$$\mathrm{Re}\,\mu>-1/2,\ \mathrm{Re}\,\nu>-1. \tag{14.126}$$

§14.4 虚宗量柱函数的不定积分

仿照上一节的计算，也可以导出虚宗量柱函数的不定积分

$$\int \mathrm{e}^{-pt}t^{\pm\nu}\,\mathscr{D}_{\pm(\nu-n)}(t)\,\mathrm{d}t, \qquad p=\pm1,$$

其中 $\mathscr{D}_\nu(z)$ 代表虚宗量柱函数 $\mathrm{I}_\nu(z)$ 或 $\mathrm{K}_\nu(z)$. 在计算中还需要用到虚宗量柱函数的递推关系

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\big[z^\nu\,\mathscr{D}_\nu(z)\big] = \alpha z^\nu\,\mathscr{D}_{\nu-1}, \tag{14.127a}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\big[z^{-\nu}\,\mathscr{D}_\nu(z)\big] = \alpha z^{-\nu}\,\mathscr{D}_{\nu+1}, \tag{14.127b}$$

$$\frac{2\nu}{z}\,\mathscr{D}_\nu(z) = \alpha\big[\mathscr{D}_{\nu-1}(z) - \mathscr{D}_{\nu+1}(z)\big], \tag{14.127c}$$

其中对于 $\mathrm{I}_\nu(z)$，$\alpha=1$；对于 $\mathrm{K}_\nu(z)$，$\alpha=-1$.

例 14.16 计算积分 $\int \mathrm{e}^{-pz}z^\nu\,\mathscr{D}_\nu(z)\,\mathrm{d}z,\ p=\pm1$.

解 直接分部积分，就能得到

$$\begin{aligned}
&\int \mathrm{e}^{-pz}z^\nu\,\mathscr{D}_\nu(z)\,\mathrm{d}z\\
&\quad= z\cdot z^\nu\,\mathscr{D}_\nu(z) - \int z\cdot\Big[\mathrm{e}^{-pz}z^\nu\,\mathscr{D}_\nu(z)\Big]'\,\mathrm{d}z\\
&\quad= \mathrm{e}^{-pz}z^{\nu+1}\,\mathscr{D}_\nu(z) + p\int \mathrm{e}^{-pz}z^{\nu+1}\,\mathscr{D}_\nu(z)\,\mathrm{d}z - \alpha\int \mathrm{e}^{-pz}z^{\nu+1}\,\mathscr{D}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{d}z\\
&\quad= \mathrm{e}^{-pz}z^{\nu+1}\,\mathscr{D}_\nu(z) + p\int \mathrm{e}^{-pz}z^{\nu+1}\,\mathscr{D}_\nu(z)\,\mathrm{d}z\\
&\qquad - \int \mathrm{e}^{-pz}z^{\nu+1}\left[\frac{2\nu}{z}\,\mathscr{D}_\nu(z) + \alpha\,\mathscr{D}_{\nu+1}(z)\right]\mathrm{d}z.
\end{aligned}$$

上式右端也出现了待求的积分，二者合并，即得

$$
\begin{aligned}
&(2\nu+1)\int \mathrm{e}^{-pz}z^{\nu}\mathscr{D}_{\nu}(z)\,\mathrm{d}z\\
&\qquad=\mathrm{e}^{-pz}z^{\nu+1}\mathscr{D}_{\nu}(z)+p\,\alpha\int\Big[\alpha\mathrm{e}^{-pz}z^{\nu+1}\mathscr{D}_{\nu}(z)-p\,\mathrm{e}^{-pz}z^{\nu+1}\mathscr{D}_{\nu+1}(z)\Big]\,\mathrm{d}z\\
&\qquad=\mathrm{e}^{-pz}z^{\nu+1}\mathscr{D}_{\nu}(z)+p\,\alpha\,\mathrm{e}^{-pz}z^{\nu+1}\mathscr{D}_{\nu+1}(z)+C,
\end{aligned}
$$

因此

$$
\int \mathrm{e}^{-pz}z^{\nu}\mathscr{D}_{\nu}(z)\,\mathrm{d}z=\frac{\mathrm{e}^{-pz}z^{\nu+1}}{2\nu+1}\Big[\mathscr{D}_{\nu}(z)+p\,\alpha\mathscr{D}_{\nu+1}(z)\Big]+C. \tag{14.128}
$$

应用于 $\mathrm{I}_{\nu}(z)$，$\alpha=1$，则上式变为

$$
\int \mathrm{e}^{-pz}z^{\nu}\mathrm{I}_{\nu}(z)\,\mathrm{d}z=\frac{\mathrm{e}^{-pz}z^{\nu+1}}{2\nu+1}\Big[\mathrm{I}_{\nu}(z)+p\,\mathrm{I}_{\nu+1}(z)\Big]+C. \tag{14.129}
$$

或者写成变上限积分的形式 (成立条件为 $\mathrm{Re}\,\nu>-1/2$)：

$$
\int_0^z \mathrm{e}^{-t}t^{\nu}\mathrm{I}_{\nu}(t)\,\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{e}^{-z}z^{\nu+1}}{2\nu+1}\big[\mathrm{I}_{\nu}(z)+\mathrm{I}_{\nu+1}(z)\big], \tag{14.130a}
$$

$$
\int_0^z \mathrm{e}^{t}t^{\nu}\mathrm{I}_{\nu}(t)\,\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{e}^{z}z^{\nu+1}}{2\nu+1}\big[\mathrm{I}_{\nu}(z)-\mathrm{I}_{\nu+1}(z)\big]; \tag{14.130b}
$$

还可以重新组合为

$$
\int_0^z t^{\nu}\mathrm{I}_{\nu}(t)\cosh t\,\mathrm{d}t=\frac{z^{\nu+1}}{2\nu+1}\big[\mathrm{I}_{\nu}(z)\cosh z-\mathrm{I}_{\nu+1}(z)\sinh z\big], \tag{14.131a}
$$

$$
\int_0^z t^{\nu}\mathrm{I}_{\nu}(t)\sinh t\,\mathrm{d}t=\frac{z^{\nu+1}}{2\nu+1}\big[\mathrm{I}_{\nu}(z)\sinh z-\mathrm{I}_{\nu+1}(z)\cosh z\big]. \tag{14.131b}
$$

同样，对于 $\mathrm{K}_{\nu}(z)$，$\alpha=-1$，则 (14.128) 式变为

$$
\int \mathrm{e}^{-pz}z^{\nu}\mathrm{K}_{\nu}(z)\,\mathrm{d}z=\frac{\mathrm{e}^{-pz}z^{\nu+1}}{2\nu+1}\Big[\mathrm{K}_{\nu}(z)-p\mathrm{K}_{\nu+1}(z)\Big]+C. \tag{14.132}
$$

也可以写成变上限积分的形式：

$$
\int_0^z \mathrm{e}^{-t}t^{\nu}\mathrm{K}_{\nu}(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2\nu+1}\Big\{\mathrm{e}^{-z}z^{\nu+1}\big[\mathrm{K}_{\nu}(z)-\mathrm{K}_{\nu+1}(z)\big]+2^{\nu}\Gamma(\nu+1)\Big\}, \tag{14.133a}
$$

$$
\int_0^z \mathrm{e}^{t}t^{\nu}\mathrm{K}_{\nu}(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2\nu+1}\Big\{\mathrm{e}^{z}z^{\nu+1}\big[\mathrm{K}_{\nu}(z)+\mathrm{K}_{\nu+1}(z)\big]-2^{\nu}\Gamma(\nu+1)\Big\} \tag{14.133b}
$$

及

$$
\int_0^z t^{\nu}\mathrm{K}_{\nu}(t)\cosh t\,\mathrm{d}t=\frac{z^{\nu+1}}{2\nu+1}\big[\mathrm{K}_{\nu}(z)\cosh z-\mathrm{K}_{\nu+1}(z)\sinh z\big], \tag{14.134a}
$$

$$\int_0^z t^\nu \mathrm{K}_\nu(t)\sinh t\,\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{2\nu+1}\Big\{z^{\nu+1}\big[\mathrm{K}_\nu(z)\sinh z+\mathrm{K}_{\nu+1}(z)\cosh z\big]-2^\nu\Gamma(\nu+1)\Big\}. \tag{14.134b}$$

还可以将 (14.130a) 与 (14.130b) 两式改写为

$$\int_0^z \mathrm{e}^{z-t}t^\nu \mathrm{I}_\nu(t)\,\mathrm{d}t=\frac{z^{\nu+1}}{2\nu+1}\big[\mathrm{I}_\nu(z)+\mathrm{I}_{\nu+1}(z)\big], \tag{14.135a}$$
$$\int_0^z \mathrm{e}^{t-z}t^\nu \mathrm{I}_\nu(t)\,\mathrm{d}t=\frac{z^{\nu+1}}{2\nu+1}\big[\mathrm{I}_\nu(z)-\mathrm{I}_{\nu+1}(z)\big], \tag{14.135b}$$

并进一步组合成

$$\int_0^z \cosh(z-t)\,t^\nu \mathrm{I}_\nu(t)\,\mathrm{d}t=\frac{z^{\nu+1}}{2\nu+1}\mathrm{I}_\nu(z), \tag{14.136a}$$
$$\int_0^z \sinh(z-t)\,t^\nu \mathrm{I}_\nu(t)\,\mathrm{d}t=\frac{z^{\nu+1}}{2\nu+1}\mathrm{I}_{\nu+1}(z). \tag{14.136b}$$

同样，由 (14.133a) 与 (14.133b) 两式也能导出

$$\int_0^z \mathrm{e}^{z-t}t^\nu \mathrm{K}_\nu(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2\nu+1}\Big\{z^{\nu+1}\big[\mathrm{K}_\nu(z)-\mathrm{K}_{\nu+1}(z)\big]+2^\nu\Gamma(\nu+1)\,\mathrm{e}^z\Big\}, \tag{14.137a}$$
$$\int_0^z \mathrm{e}^{t-z}t^\nu \mathrm{K}_\nu(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2\nu+1}\Big\{z^{\nu+1}\big[\mathrm{K}_\nu(z)+\mathrm{K}_{\nu+1}(z)\big]-2^\nu\Gamma(\nu+1)\,\mathrm{e}^{-z}\Big\}, \tag{14.137b}$$
$$\int_0^z \cosh(z-t)\,t^\nu \mathrm{K}_\nu(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2\nu+1}\big[z^{\nu+1}\mathrm{K}_\nu(z)+2^\nu\Gamma(\nu+1)\sinh z\big], \tag{14.138a}$$
$$\int_0^z \sinh(z-t)\,t^\nu \mathrm{K}_\nu(t)\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{2\nu+1}\big[z^{\nu+1}\mathrm{K}_{\nu+1}(z)-2^\nu\Gamma(\nu+1)\cosh z\big]. \tag{14.138b}$$

例 14.17 类似于例 14.16，直接分部积分可得

$$\int \mathrm{e}^{-pz}z^\nu \mathscr{D}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{d}z$$
$$=\frac{\mathrm{e}^{-pz}}{2\nu+1}\Big\{\alpha z^\nu \mathscr{D}_\nu(z)+z^{\nu+1}\big[\mathscr{D}_{\nu-1}(z)+p\,\alpha\,\mathscr{D}_\nu(z)\big]\Big\}+C. \tag{14.139}$$

应用于 $\mathrm{I}_\nu(z)$ 与 $\mathrm{K}_\nu(z)$，有

$$\int \mathrm{e}^{-pz}z^\nu \mathrm{I}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{d}z=\frac{\mathrm{e}^{-pz}}{2\nu+1}\Big\{z^\nu \mathrm{I}_\nu(z)+z^{\nu+1}\big[\mathrm{I}_{\nu-1}(z)+p\,\mathrm{I}_\nu(z)\big]\Big\}+C, \tag{14.140}$$
$$\int \mathrm{e}^{-pz}z^\nu \mathrm{K}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{d}z=\frac{\mathrm{e}^{-pz}}{2\nu+1}\Big\{z^\nu \mathrm{K}_\nu(z)+z^{\nu+1}\big[\mathrm{K}_{\nu-1}(z)-p\,\mathrm{K}_\nu(z)\big]\Big\}+C. \tag{14.141}$$

于是，对于 $\mathrm{I}_\nu(z)$ 与 $\mathrm{K}_\nu(z)$，当 $\mathrm{Re}\,\nu>0$ 时就分别有

$$\int_0^z \mathrm{e}^{-t}t^\nu \mathrm{I}_{\nu-1}(t)\,\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{e}^{-z}}{2\nu+1}\Big\{z^{\nu+1}\big[\mathrm{I}_{\nu-1}(z)+\mathrm{I}_\nu(z)\big]+z^\nu \mathrm{I}_\nu(z)\Big\}, \tag{14.142a}$$

$$\int_0^z \mathrm{e}^t t^\nu \mathrm{I}_{\nu-1}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^z}{2\nu+1}\Big\{z^{\nu+1}\big[\mathrm{I}_{\nu-1}(z)-\mathrm{I}_\nu(z)\big]+z^\nu \mathrm{I}_\nu(z)\Big\} \tag{14.142b}$$

与

$$\int_0^z \mathrm{e}^{-t} t^\nu \mathrm{K}_{\nu-1}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{-z}}{2\nu+1}\Big\{z^{\nu+1}\big[\mathrm{K}_{\nu-1}(z)-\mathrm{K}_\nu(z)\big]-z^\nu \mathrm{K}_\nu(z)\Big\}+\frac{2^{\nu-1}\Gamma(\nu)}{2\nu+1}, \tag{14.143a}$$

$$\int_0^z \mathrm{e}^{t} t^\nu \mathrm{K}_{\nu-1}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{z}}{2\nu+1}\Big\{z^{\nu+1}\big[\mathrm{K}_{\nu-1}(z)+\mathrm{K}_\nu(z)\big]-z^\nu \mathrm{K}_\nu(z)\Big\}+\frac{2^{\nu-1}\Gamma(\nu)}{2\nu+1}. \tag{14.143b}$$

在此基础上，还能导出

$$\int_0^z \mathrm{e}^{z-t} t^\nu \mathrm{I}_{\nu-1}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\nu+1}\Big\{z^{\nu+1}\big[\mathrm{I}_{\nu-1}(z)+\mathrm{I}_\nu(z)\big]+z^\nu \mathrm{I}_\nu(z)\Big\}, \tag{14.144a}$$

$$\int_0^z \mathrm{e}^{t-z} t^\nu \mathrm{I}_{\nu-1}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\nu+1}\Big\{z^{\nu+1}\big[\mathrm{I}_{\nu-1}(z)-\mathrm{I}_\nu(z)\big]+z^\nu \mathrm{I}_\nu(z)\Big\}, \tag{14.144b}$$

$$\int_0^z \cosh(z-t)\, t^\nu \mathrm{I}_{\nu-1}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\nu+1}\Big\{z^{\nu+1}\mathrm{I}_{\nu-1}(z)+z^\nu \mathrm{I}_\nu(z)\Big\}, \tag{14.145a}$$

$$\int_0^z \sinh(z-t)\, t^\nu \mathrm{I}_{\nu-1}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{z^{\nu+1}}{2\nu+1}\mathrm{I}_\nu(z), \tag{14.145b}$$

$$\int_0^z \mathrm{e}^{z-t} t^\nu \mathrm{K}_{\nu-1}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\nu+1}\Big\{z^{\nu+1}\big[\mathrm{K}_{\nu-1}(z)-\mathrm{K}_\nu(z)\big]-z^\nu \mathrm{K}_\nu(z)\Big\}+\frac{2^{\nu-1}\Gamma(\nu)}{2\nu+1}\,\mathrm{e}^z, \tag{14.146a}$$

$$\int_0^z \mathrm{e}^{t-z} t^\nu \mathrm{K}_{\nu-1}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\nu+1}\Big\{z^{\nu+1}\big[\mathrm{K}_{\nu-1}(z)+\mathrm{K}_\nu(z)\big]-z^\nu \mathrm{K}_\nu(z)\Big\}+\frac{2^{\nu-1}\Gamma(\nu)}{2\nu+1}\,\mathrm{e}^{-z}, \tag{14.146b}$$

$$\int_0^z \cosh(z-t)\, t^\nu \mathrm{K}_{\nu-1}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\nu+1}\big[z^{\nu+1}\mathrm{K}_{\nu-1}(z)-z^\nu \mathrm{K}_\nu(z)\big]+\frac{2^{\nu-1}\Gamma(\nu)}{2\nu+1}\cosh z, \tag{14.147a}$$

$$\int_0^z \sinh(z-t)\, t^\nu \mathrm{K}_{\nu-1}(t)\,\mathrm{d}t = -\frac{z^{\nu+1}}{2\nu+1}\mathrm{K}_\nu(z)+\frac{2^{\nu-1}\Gamma(\nu)}{2\nu+1}\sinh z. \tag{14.147b}$$

例 14.18 利用递推关系 (14.127)，可以直接证明

$$\int \mathrm{e}^{-pz} z^\nu \mathscr{D}_{\nu-n-2}(z)\,\mathrm{d}z = 2(\nu-n-1)\,\alpha\int \mathrm{e}^{-pz} z^{\nu-1}\mathscr{D}_{\nu-n-1}(z)\,\mathrm{d}z+\int \mathrm{e}^{-pz} z^\nu \mathscr{D}_{\nu-n}(z)\,\mathrm{d}z, \tag{14.148}$$

因此，由上面已经计算得的积分 $\int e^{\mp z}z^{\nu}\mathscr{Z}_{\nu}(z)\,dz$ 和 $\int e^{\mp z}z^{\nu}\mathscr{Z}_{\nu-1}(z)\,dz$ 出发，就能导出全部积分

$$\int e^{\mp z}z^{\nu}\mathscr{Z}_{\nu-n}(z)\,dz, \qquad n=2,3,4,\cdots.$$

例如，当 $n=2$ 时，对于 $I_{\nu}(z)$，有

$$\begin{aligned}&\int_0^z e^{-t}t^{\nu}I_{\nu-2}(t)\,dt\\&\quad=\frac{2\nu-2}{2\nu-1}e^{-z}z^{\nu}\big[I_{\nu-1}(z)+I_{\nu}(z)\big]+\frac{e^{-z}z^{\nu+1}}{2\nu+1}\big[I_{\nu}(z)+I_{\nu+1}(z)\big],\end{aligned}\tag{14.149}$$

$$\begin{aligned}&\int_0^z e^{t}t^{\nu}I_{\nu-2}(t)\,dt\\&\quad=\frac{2\nu-2}{2\nu-1}e^{z}z^{\nu}\big[I_{\nu-1}(z)-I_{\nu}(z)\big]+\frac{e^{z}z^{\nu+1}}{2\nu+1}\big[I_{\nu}(z)-I_{\nu+1}(z)\big],\end{aligned}\tag{14.150}$$

$$\begin{aligned}&\int_0^z t^{\nu}I_{\nu-2}(t)\cosh t\,dt\\&\quad=\frac{2\nu-2}{2\nu-1}z^{\nu}\big[I_{\nu-1}(z)\cosh z-I_{\nu}(z)\sinh z\big]\\&\qquad+\frac{z^{\nu+1}}{2\nu+1}\big[I_{\nu}(z)\cosh z-I_{\nu+1}(z)\sinh z\big],\end{aligned}\tag{14.151}$$

$$\begin{aligned}&\int_0^z t^{\nu}I_{\nu-2}(t)\sinh t\,dt\\&\quad=\frac{2\nu-2}{2\nu-1}z^{\nu}\big[I_{\nu-1}(z)\sinh z-I_{\nu}(z)\cosh z\big]\\&\qquad+\frac{z^{\nu+1}}{2\nu+1}\big[I_{\nu}(z)\sinh z-I_{\nu+1}(z)\cosh z\big];\end{aligned}\tag{14.152}$$

$$\begin{aligned}&\int_0^z e^{z-t}t^{\nu}I_{\nu-2}(t)\,dt\\&\quad=\frac{2\nu-2}{2\nu-1}z^{\nu}\big[I_{\nu-1}(z)+I_{\nu}(z)\big]+\frac{z^{\nu+1}}{2\nu+1}\big[I_{\nu}(z)+I_{\nu+1}(z)\big],\end{aligned}\tag{14.153}$$

$$\begin{aligned}&\int_0^z e^{t-z}t^{\nu}I_{\nu-2}(t)\,dt\\&\quad=\frac{2\nu-2}{2\nu-1}z^{\nu}\big[I_{\nu-1}(z)-I_{\nu}(z)\big]+\frac{z^{\nu+1}}{2\nu+1}\big[I_{\nu}(z)-I_{\nu+1}(z)\big],\end{aligned}\tag{14.154}$$

$$\int_0^z t^{\nu}I_{\nu-2}(t)\cosh(z-t)\,dt=\frac{2\nu-2}{2\nu-1}z^{\nu}I_{\nu-1}(z)+\frac{z^{\nu+1}}{2\nu+1}I_{\nu}(z),\tag{14.155}$$

$$\int_0^z t^{\nu}I_{\nu-2}(t)\sinh(z-t)\,dt=\frac{2\nu-2}{2\nu-1}z^{\nu}I_{\nu}(z)+\frac{z^{\nu+1}}{2\nu+1}I_{\nu+1}(z).\tag{14.156}$$

类似地，对于 $K_{\nu}(z)$，也有

$$\int_0^z e^{-t}t^\nu K_{\nu-2}(t)\,dt$$
$$= -\frac{2\nu-2}{2\nu-1}e^{-z}z^\nu\big[K_{\nu-1}(z)-K_\nu(z)\big]+\frac{e^{-z}z^{\nu+1}}{2\nu+1}\big[K_\nu(z)-K_{\nu+1}(z)\big]$$
$$+\frac{2^\nu\Gamma(\nu)}{(2\nu-1)(2\nu+1)}, \tag{14.157}$$

$$\int_0^z e^{t}t^\nu K_{\nu-2}(t)\,dt$$
$$= -\frac{2\nu-2}{2\nu-1}e^{z}z^\nu\big[K_{\nu-1}(z)+K_\nu(z)\big]+\frac{e^{z}z^{\nu+1}}{2\nu+1}\big[K_\nu(z)+K_{\nu+1}(z)\big]$$
$$-\frac{2^\nu\Gamma(\nu)}{(2\nu-1)(2\nu+1)}, \tag{14.158}$$

$$\int_0^z t^\nu K_{\nu-2}(t)\cosh t\,dt$$
$$= -\frac{2\nu-2}{2\nu-1}z^\nu\big[K_{\nu-1}(z)\cosh z+K_\nu(z)\sinh z\big]$$
$$+\frac{z^{\nu+1}}{2\nu+1}\big[K_\nu(z)\cosh z+K_{\nu+1}(z)\sinh z\big], \tag{14.159}$$

$$\int_0^z t^\nu K_{\nu-2}(t)\sinh t\,dt$$
$$= -\frac{2\nu-2}{2\nu-1}z^\nu\big[K_{\nu-1}(z)\sinh z+K_\nu(z)\cosh z\big]$$
$$+\frac{z^{\nu+1}}{2\nu+1}\big[K_\nu(z)\sinh z+K_{\nu+1}(z)\cosh z\big]-\frac{2^\nu\Gamma(\nu)}{(2\nu-1)(2\nu+1)}; \tag{14.160}$$

$$\int_0^z e^{z-t}t^\nu K_{\nu-2}(t)\,dt$$
$$= -\frac{2\nu-2}{2\nu-1}z^\nu\big[K_{\nu-1}(z)-K_\nu(z)\big]+\frac{z^{\nu+1}}{2\nu+1}\big[K_\nu(z)-K_{\nu+1}(z)\big]$$
$$+\frac{2^\nu\Gamma(\nu)}{(2\nu-1)(2\nu+1)}e^z, \tag{14.161}$$

$$\int_0^z e^{t-z}t^\nu K_{\nu-2}(t)\,dt$$
$$= -\frac{2\nu-2}{2\nu-1}z^\nu\big[K_{\nu-1}(z)+K_\nu(z)\big]+\frac{z^{\nu+1}}{2\nu+1}\big[K_\nu(z)+K_{\nu+1}(z)\big]$$
$$-\frac{2^\nu\Gamma(\nu)}{(2\nu-1)(2\nu+1)}e^{-z}, \tag{14.162}$$

$$\int_0^z t^\nu K_{\nu-2}(t)\cosh(z-t)\,dt$$
$$= -\frac{2\nu-2}{2\nu-1}z^\nu K_{\nu-1}(z)+\frac{z^{\nu+1}}{2\nu+1}K_\nu(z)+\frac{2^\nu\Gamma(\nu)}{(2\nu-1)(2\nu+1)}\sinh z, \tag{14.163}$$

$$\int_0^z t^\nu \mathrm{K}_{\nu-2}(t)\sinh(z-t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{2\nu-2}{2\nu-1} z^\nu \mathrm{K}_\nu(z) - \frac{z^{\nu+1}}{2\nu+1}\mathrm{K}_{\nu+1}(z) + \frac{2^\nu\Gamma(\nu)}{(2\nu-1)(2\nu+1)}\cosh z. \tag{14.164}$$

(14.149) — (14.164) 诸式的成立条件是 $\mathrm{Re}\,\nu > 1/2$.

同样，当 $n=3$ 时，对于 $\mathrm{I}_\nu(z)$，有

$$\int_0^z \mathrm{e}^{-t} t^\nu \mathrm{I}_{\nu-3}(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{2\nu-4}{2\nu-1}\mathrm{e}^{-z}\left\{z^{\nu-1}\mathrm{I}_{\nu-1}(z) + z^\nu\left[\mathrm{I}_{\nu-2}(z)+\mathrm{I}_{\nu-1}(z)\right]\right\}$$
$$+ \frac{\mathrm{e}^{-z}}{2\nu+1}\left\{z^\nu\mathrm{I}_\nu(z) + z^{\nu+1}\left[\mathrm{I}_{\nu-1}(z)+\mathrm{I}_\nu(z)\right]\right\}, \tag{14.165}$$

$$\int_0^z \mathrm{e}^{t} t^\nu \mathrm{I}_{\nu-3}(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{2\nu-4}{2\nu-1}\mathrm{e}^{z}\left\{z^{\nu-1}\mathrm{I}_{\nu-1}(z) + z^\nu\left[\mathrm{I}_{\nu-2}(z)-\mathrm{I}_{\nu-1}(z)\right]\right\}$$
$$+ \frac{\mathrm{e}^{z}}{2\nu+1}\left\{z^\nu\mathrm{I}_\nu(z) + z^{\nu+1}\left[\mathrm{I}_{\nu-1}(z)-\mathrm{I}_\nu(z)\right]\right\}, \tag{14.166}$$

$$\int_0^z t^\nu \mathrm{I}_{\nu-3}(t)\cosh t\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{2\nu-4}{2\nu-1}\left\{z^{\nu-1}\mathrm{I}_{\nu-1}(z)\cosh z + z^\nu\left[\mathrm{I}_{\nu-2}(z)\cosh z-\mathrm{I}_{\nu-1}(z)\sinh z\right]\right\}$$
$$+ \frac{1}{2\nu+1}\left\{z^\nu\mathrm{I}_\nu(z)\cosh z + z^{\nu+1}\left[\mathrm{I}_{\nu-1}(z)\cosh z-\mathrm{I}_\nu(z)\sinh z\right]\right\}, \tag{14.167}$$

$$\int_0^z t^\nu \mathrm{I}_{\nu-3}(t)\sinh t\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{2\nu-4}{2\nu-1}\left\{z^{\nu-1}\mathrm{I}_{\nu-1}(z)\sinh z + z^\nu\left[\mathrm{I}_{\nu-2}(z)\sinh z-\mathrm{I}_{\nu-1}(z)\cosh z\right]\right\}$$
$$+ \frac{1}{2\nu+1}\left\{z^\nu\mathrm{I}_\nu(z)\sinh z + z^{\nu+1}\left[\mathrm{I}_{\nu-1}(z)\sinh z-\mathrm{I}_\nu(z)\cosh z\right]\right\}; \tag{14.168}$$

$$\int_0^z \mathrm{e}^{z-t} t^\nu \mathrm{I}_{\nu-3}(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{2\nu-4}{2\nu-1}\left\{z^{\nu-1}\mathrm{I}_{\nu-1}(z) + z^\nu\left[\mathrm{I}_{\nu-2}(z)+\mathrm{I}_{\nu-1}(z)\right]\right\}$$
$$+ \frac{1}{2\nu+1}\left\{z^\nu\mathrm{I}_\nu(z) + z^{\nu+1}\left[\mathrm{I}_{\nu-1}(z)+\mathrm{I}_\nu(z)\right]\right\}, \tag{14.169}$$

$$\int_0^z \mathrm{e}^{t-z} t^\nu \mathrm{I}_{\nu-3}(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{2\nu-4}{2\nu-1}\left\{z^{\nu-1}\mathrm{I}_{\nu-1}(z) + z^\nu\left[\mathrm{I}_{\nu-2}(z)-\mathrm{I}_{\nu-1}(z)\right]\right\}$$

$$+\frac{1}{2\nu+1}\Big\{z^{\nu}\mathrm{I}_{\nu}(z)+z^{\nu+1}\big[\mathrm{I}_{\nu-1}(z)-\mathrm{I}_{\nu}(z)\big]\Big\}, \tag{14.170}$$

$$\int_0^z t^{\nu}\mathrm{I}_{\nu-3}(t)\cosh(z-t)\,\mathrm{d}t$$
$$=\frac{2\nu-4}{2\nu-1}\Big\{z^{\nu-1}\mathrm{I}_{\nu-1}(z)+z^{\nu}\mathrm{I}_{\nu-2}(z)\Big\}$$
$$+\frac{1}{2\nu+1}\Big\{z^{\nu}\mathrm{I}_{\nu}(z)+z^{\nu+1}\mathrm{I}_{\nu-1}(z)\Big\}, \tag{14.171}$$

$$\int_0^z t^{\nu}\mathrm{I}_{\nu-3}(t)\sinh(z-t)\,\mathrm{d}t=\frac{2\nu-4}{2\nu-1}z^{\nu}\mathrm{I}_{\nu-1}(z)+\frac{z^{\nu+1}}{2\nu+1}\mathrm{I}_{\nu}(z). \tag{14.172}$$

完全类似，对于 $\mathrm{K}_{\nu}(z)$，也有

$$\int_0^z \mathrm{e}^{-t}t^{\nu}\mathrm{K}_{\nu-3}(t)\,\mathrm{d}t$$
$$=\frac{2\nu-4}{2\nu-1}\mathrm{e}^{-z}\Big\{z^{\nu-1}\mathrm{K}_{\nu-1}(z)-z^{\nu}\big[\mathrm{K}_{\nu-2}(z)-\mathrm{K}_{\nu-1}(z)\big]\Big\}$$
$$+\frac{\mathrm{e}^{-z}}{2\nu+1}\Big\{-z^{\nu}\mathrm{K}_{\nu}(z)+z^{\nu+1}\big[\mathrm{K}_{\nu-1}(z)-\mathrm{K}_{\nu}(z)\big]\Big\}+\frac{3!\,2^{\nu-2}\Gamma(\nu-1)}{(2\nu-1)(2\nu+1)}, \tag{14.173}$$

$$\int_0^z \mathrm{e}^{t}t^{\nu}\mathrm{K}_{\nu-3}(t)\,\mathrm{d}t$$
$$=\frac{2\nu-4}{2\nu-1}\mathrm{e}^{z}\Big\{z^{\nu-1}\mathrm{K}_{\nu-1}(z)-z^{\nu}\big[\mathrm{K}_{\nu-2}(z)+\mathrm{K}_{\nu-1}(z)\big]\Big\}$$
$$+\frac{\mathrm{e}^{z}}{2\nu+1}\Big\{-z^{\nu}\mathrm{K}_{\nu}(z)+z^{\nu+1}\big[\mathrm{K}_{\nu-1}(z)+\mathrm{K}_{\nu}(z)\big]\Big\}+\frac{3!\,2^{\nu-2}\Gamma(\nu-1)}{(2\nu-1)(2\nu+1)}, \tag{14.174}$$

$$\int_0^z t^{\nu}\mathrm{K}_{\nu-3}(t)\cosh t\,\mathrm{d}t$$
$$=\frac{2\nu-4}{2\nu-1}\Big\{z^{\nu-1}\mathrm{K}_{\nu-1}(z)\cosh z-z^{\nu}\big[\mathrm{K}_{\nu-2}(z)\cosh z+\mathrm{K}_{\nu-1}(z)\sinh z\big]\Big\}$$
$$+\frac{1}{2\nu+1}\Big\{-z^{\nu}\mathrm{K}_{\nu}(z)\cosh z+z^{\nu+1}\big[\mathrm{K}_{\nu-1}(z)\cosh z+\mathrm{K}_{\nu}(z)\sinh z\big]\Big\}$$
$$+\frac{3!\,2^{\nu-2}\Gamma(\nu-1)}{(2\nu-1)(2\nu+1)}, \tag{14.175}$$

$$\int_0^z t^{\nu}\mathrm{K}_{\nu-3}(t)\sinh t\,\mathrm{d}t$$
$$=\frac{2\nu-4}{2\nu-1}\Big\{z^{\nu-1}\mathrm{K}_{\nu-1}(z)\sinh z-z^{\nu}\big[\mathrm{K}_{\nu-2}(z)\sinh z+\mathrm{K}_{\nu-1}(z)\cosh z\big]$$
$$+\frac{1}{2\nu+1}\Big\{-z^{\nu}\mathrm{K}_{\nu}(z)\sinh z+z^{\nu+1}\big[\mathrm{K}_{\nu-1}(z)\sinh z+\mathrm{K}_{\nu}(z)\cosh z\big]\Big\}; \tag{14.176}$$

$$\int_0^z \mathrm{e}^{z-t}t^{\nu}\mathrm{K}_{\nu-3}(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{2\nu-4}{2\nu-1}\Big\{z^{\nu-1}\mathrm{K}_{\nu-1}(z) - z^{\nu}\big[\mathrm{K}_{\nu-2}(z) - \mathrm{K}_{\nu-1}(z)\big]\Big\}$$
$$+ \frac{1}{2\nu+1}\Big\{-z^{\nu}\mathrm{K}_{\nu}(z) + z^{\nu+1}\big[\mathrm{K}_{\nu-1}(z) - \mathrm{K}_{\nu}(z)\big]\Big\} + \frac{3!\,2^{\nu-2}\Gamma(\nu-1)}{(2\nu-1)(2\nu+1)}\,\mathrm{e}^{z}, \tag{14.177}$$

$$\int_0^z \mathrm{e}^{t-z}t^{\nu}\mathrm{K}_{\nu-3}(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{2\nu-4}{2\nu-1}\Big\{z^{\nu-1}\mathrm{K}_{\nu-1}(z) - z^{\nu}\big[\mathrm{K}_{\nu-2}(z) + \mathrm{K}_{\nu-1}(z)\big]$$
$$+ \frac{1}{2\nu+1}\Big\{-z^{\nu}\mathrm{K}_{\nu}(z) + z^{\nu+1}\big[\mathrm{K}_{\nu-1}(z) + \mathrm{K}_{\nu}(z)\big]\Big\} + \frac{3!\,2^{\nu-2}\Gamma(\nu-1)}{(2\nu-1)(2\nu+1)}\,\mathrm{e}^{-z}, \tag{14.178}$$

$$\int_0^z t^{\nu}\mathrm{K}_{\nu-3}(t)\cosh(z-t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{2\nu-4}{2\nu-1}\Big\{z^{\nu-1}\mathrm{K}_{\nu-1}(z) - z^{\nu}\mathrm{K}_{\nu-2}(z)\Big\}$$
$$+ \frac{1}{2\nu+1}\Big\{-z^{\nu}\mathrm{K}_{\nu}(z) + z^{\nu+1}\mathrm{K}_{\nu-1}(z)\Big\} + \frac{3!\,2^{\nu-2}\Gamma(\nu-1)}{(2\nu-1)(2\nu+1)}\cosh z, \tag{14.179}$$

$$\int_0^z t^{\nu}\mathrm{K}_{\nu-3}(t)\sinh(z-t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{2\nu-4}{2\nu-1}z^{\nu}\mathrm{K}_{\nu-1}(z) - \frac{z^{\nu+1}}{2\nu+1}\mathrm{K}_{\nu}(z) + \frac{3!\,2^{\nu-2}\Gamma(\nu-1)}{(2\nu-1)(2\nu+1)}\sinh z. \tag{14.180}$$

(14.165) — (14.180) 诸式的成立条件是 $\mathrm{Re}\,\nu > 1$.

例 14.19　计算 $\int \mathrm{e}^{\mp z}z^{-\nu}\mathscr{D}_{\nu+n}(z)\,\mathrm{d}z$ 型的积分.

仿照例 14.12 中的做法，就能得到

$$\int \mathrm{e}^{\mp z}z^{-\nu}\mathscr{D}_{\nu}(z)\mathrm{d}z$$
$$= \frac{1}{1-2\nu}\mathrm{e}^{\mp z}z^{1-\nu}\big[\mathscr{D}_{\nu}(z) + p\,\alpha\,\mathscr{D}_{\nu-1}(z)\big] + C, \qquad \nu \neq 1/2. \tag{14.181}$$

因此，对于第一类虚宗量柱函数 $\mathrm{I}_{\nu}(z)$，有

$$\int_0^z \mathrm{e}^{-t}t^{-\nu}\mathrm{I}_{\nu}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{1-2\nu}\bigg\{\mathrm{e}^{-z}z^{1-\nu}\big[\mathrm{I}_{\nu}(z) + \mathrm{I}_{\nu-1}(z)\big] - \frac{2^{1-\nu}}{\Gamma(\nu)}\bigg\}, \tag{14.182a}$$

$$\int_0^z \mathrm{e}^{t}t^{-\nu}\mathrm{I}_{\nu}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{1-2\nu}\bigg\{\mathrm{e}^{z}z^{1-\nu}\big[\mathrm{I}_{\nu}(z) - \mathrm{I}_{\nu-1}(z)\big] + \frac{2^{1-\nu}}{\Gamma(\nu)}\bigg\}. \tag{14.182b}$$

由此还能组合成

$$\int_0^z t^{-\nu}\mathrm{I}_\nu(t)\cosh t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{1-2\nu}z^{1-\nu}\big[\mathrm{I}_\nu(z)\cosh z-\mathrm{I}_{\nu-1}(z)\sinh z\big], \tag{14.183a}$$

$$\int_0^z t^{-\nu}\mathrm{I}_\nu(t)\sinh t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{1-2\nu}\left\{z^{1-\nu}\big[\mathrm{I}_\nu(z)\sinh z-\mathrm{I}_{\nu-1}(z)\cosh z\big]+\frac{2^{1-\nu}}{\Gamma(\nu)}\right\}. \tag{14.183b}$$

或可将 (14.182) 式改写成

$$\int_0^z \mathrm{e}^{z-t}t^{-\nu}\mathrm{I}_\nu(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{1-2\nu}\left\{z^{1-\nu}\big[\mathrm{I}_\nu(z)+\mathrm{I}_{\nu-1}(z)\big]-\frac{2^{1-\nu}}{\Gamma(\nu)}\mathrm{e}^z\right\}, \tag{14.184a}$$

$$\int_0^z \mathrm{e}^{t-z}t^{-\nu}\mathrm{I}_\nu(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{1-2\nu}\left\{z^{1-\nu}\big[\mathrm{I}_\nu(z)-\mathrm{I}_{\nu-1}(z)\big]+\frac{2^{1-\nu}}{\Gamma(\nu)}\mathrm{e}^z\right\}, \tag{14.184b}$$

又可进一步推出

$$\int_0^z \cosh(z-t)\,t^{-\nu}\mathrm{I}_\nu(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{1-2\nu}\left[z^{1-\nu}\mathrm{I}_\nu(z)-\frac{2^{1-\nu}}{\Gamma(\nu)}\sinh z\right], \tag{14.185a}$$

$$\int_0^z \sinh(z-t)\,t^{-\nu}\mathrm{I}_\nu(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{1-2\nu}\left[z^{1-\nu}\mathrm{I}_{\nu-1}(z)-\frac{2^{1-\nu}}{\Gamma(\nu)}\cosh z\right]. \tag{14.185b}$$

当 $\nu=1/2$ 时，(14.181) 式不适用，需要另行计算. 这时得到的结果是

$$\begin{aligned}\int_0^z \mathrm{e}^{-t}t^{-1/2}\mathrm{I}_{1/2}(t)\,\mathrm{d}t&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^z \mathrm{e}^{-t}\frac{\sinh t}{t}\,\mathrm{d}t\\&=\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\big[\gamma+\ln(2z)-\mathrm{Ei}\,(-2z)\big],\end{aligned} \tag{14.186a}$$

$$\begin{aligned}\int_0^z \mathrm{e}^{t}t^{-1/2}\mathrm{I}_{1/2}(t)\,\mathrm{d}t&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^z \mathrm{e}^{t}\frac{\sinh t}{t}\,\mathrm{d}t\\&=\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\big[\gamma+\ln(2z)-\mathrm{Ei}\,(2z)\big].\end{aligned} \tag{14.186b}$$

对于 $\mathrm{K}_\nu(z)$，需在 (14.181) 式中代入 $\alpha=-1$，也可以得到一系列结果. 但根据 $\mathrm{K}_\nu(z)=\mathrm{K}_{-\nu}(z)$，就能将它们化为 (14.137)，(14.138) 及 (14.146)，(14.147) 诸式，只需将该处的 ν 改写为 $-\nu$ 即可，故而这里不再列出.

例 14.20 仿照例 14.13 中的做法，也能导出

$$\begin{aligned}&\int \mathrm{e}^{\mp z}z^{-\nu}\mathscr{D}_{\nu+1}(z)\mathrm{d}z\\&=\frac{1}{1-2\nu}\mathrm{e}^{\mp z}\Big\{\alpha z^{-\nu}\mathscr{D}_\nu(z)+z^{1-\nu}\big[\mathscr{D}_{\nu+1}(z)+p\,\alpha\,\mathscr{D}_\nu(z)\big]\Big\}+C.\end{aligned} \tag{14.187}$$

于是，对于 $\mathrm{I}_\nu(z)$，又能得到

$$\int_0^z \mathrm{e}^{-t}t^{-\nu}\mathrm{I}_{\nu+1}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{-z}}{1-2\nu}\Big\{z^{-\nu}\mathrm{I}_\nu(z)+z^{1-\nu}\big[\mathrm{I}_\nu(z)+\mathrm{I}_{\nu-1}(z)\big]\Big\}-\frac{1}{1-2\nu}\frac{1}{2^\nu\,\Gamma(\nu+1)}, \tag{14.188a}$$

$$\int_0^z \mathrm{e}^{t}t^{-\nu}\mathrm{I}_{\nu+1}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{-z}}{1-2\nu}\Big\{z^{-\nu}\mathrm{I}_\nu(z)+z^{1-\nu}\big[-\mathrm{I}_\nu(z)+\mathrm{I}_{\nu-1}(z)\big]\Big\}-\frac{1}{1-2\nu}\frac{1}{2^\nu\,\Gamma(\nu+1)}, \tag{14.188b}$$

$$\int_0^z t^{-\nu}\mathrm{I}_{\nu+1}(t)\cosh t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{1-2\nu}\Big\{z^{-\nu}\mathrm{I}_\nu(z)\cosh z+z^{1-\nu}\big[\mathrm{I}_{\nu+1}(z)\cosh z-\mathrm{I}_\nu(z)\sinh z\big]\Big\} -\frac{1}{1-2\nu}\frac{1}{2^\nu\,\Gamma(\nu+1)}, \tag{14.189a}$$

$$\int_0^z t^{-\nu}\mathrm{I}_{\nu+1}(t)\sinh t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{1-2\nu}\Big\{z^{-\nu}\mathrm{I}_\nu(z)\sinh z+z^{1-\nu}\big[\mathrm{I}_{\nu+1}(z)\sinh z-\mathrm{I}_\nu(z)\cosh z\big]\Big\} \tag{14.189b}$$

及

$$\int_0^z \mathrm{e}^{z-t}t^{-\nu}\mathrm{I}_{\nu+1}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{1-2\nu}\Big\{z^{-\nu}\mathrm{I}_\nu(z)+z^{1-\nu}\big[\mathrm{I}_\nu(z)+\mathrm{I}_{\nu+1}(z)\big]\Big\}-\frac{1}{1-2\nu}\frac{\mathrm{e}^{z}}{2^\nu\,\Gamma(\nu+1)}, \tag{14.190a}$$

$$\int_0^z \mathrm{e}^{t-z}t^{-\nu}\mathrm{I}_{\nu+1}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{1-2\nu}\Big\{z^{-\nu}\mathrm{I}_\nu(z)+z^{1-\nu}\big[-\mathrm{I}_\nu(z)+\mathrm{I}_{\nu+1}(z)\big]\Big\}-\frac{1}{1-2\nu}\frac{\mathrm{e}^{-z}}{2^\nu\,\Gamma(\nu+1)}, \tag{14.190b}$$

$$\int_0^z \cosh(z-t)\,t^{-\nu}\mathrm{I}_{\nu+1}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{1-2\nu}\big[z^{-\nu}\mathrm{I}_\nu(z)+z^{1-\nu}\mathrm{I}_{\nu+1}(z)\big]-\frac{1}{1-2\nu}\frac{1}{2^\nu\,\Gamma(\nu+1)}\cosh z, \tag{14.191a}$$

$$\int_0^z \sinh(z-t)\,t^{-\nu}\mathrm{I}_{\nu+1}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{z^{1-\nu}}{1-2\nu}\mathrm{I}_\nu(z)-\frac{1}{1-2\nu}\frac{1}{2^\nu\,\Gamma(\nu+1)}\sinh z. \tag{14.191b}$$

基于与例 14.19 同样的理由，这里也不再列出 $\int \mathrm{e}^{\mp z}z^{-\nu}\mathrm{K}_{\nu+1}(z)\,\mathrm{d}z$ 等积分.

例 14.21 根据递推关系 (14.127)，也能够证明

$$\int \mathrm{e}^{\mp z} z^{-\nu} \mathscr{D}_{\nu+n+2}(z)\mathrm{d}z = \int \mathrm{e}^{\mp z} z^{-\nu} \mathscr{D}_{\nu+n}(z)\mathrm{d}z - 2(\nu+n+1)\alpha \int \mathrm{e}^{\mp z} z^{-(\nu+1)} \mathscr{D}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{d}z. \quad (14.192)$$

因此，由前面已经得到的积分 $\int \mathrm{e}^{\mp z} z^{-\nu} \mathrm{I}_{\nu}(z)\,\mathrm{d}z$ 和 $\int \mathrm{e}^{\mp z} z^{-\nu} \mathrm{I}_{\nu+1}(z)\,\mathrm{d}z$ 出发，就能导出全部积分

$$\int \mathrm{e}^{\mp z} z^{-\nu} \mathrm{I}_{\nu+n}(z)\,\mathrm{d}z, \qquad n = 2, 3, 4, \cdots.$$

例如，当 $n = 2$ 时，有

$$\int_0^z \mathrm{e}^{-t} t^{-\nu} \mathrm{I}_{\nu+2}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2\nu+2}{2\nu+1}\mathrm{e}^{-z} z^{-\nu}\big[\mathrm{I}_{\nu+1}(z) + \mathrm{I}_{\nu}(z)\big] + \frac{\mathrm{e}^{-z} z^{1-\nu}}{1-2\nu}\big[\mathrm{I}_{\nu}(z) + \mathrm{I}_{\nu-1}(z)\big] + \frac{1}{(2\nu-1)(2\nu+1)}\frac{2!}{2^{\nu}\,\Gamma(\nu+1)}, \quad (14.193\text{a})$$

$$\int_0^z \mathrm{e}^{t} t^{-\nu} \mathrm{I}_{\nu+2}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2\nu+2}{2\nu+1}\mathrm{e}^{z} z^{-\nu}\big[\mathrm{I}_{\nu+1}(z) - \mathrm{I}_{\nu}(z)\big] + \frac{\mathrm{e}^{z} z^{1-\nu}}{1-2\nu}\big[\mathrm{I}_{\nu}(z) - \mathrm{I}_{\nu-1}(z)\big] - \frac{1}{(2\nu-1)(2\nu+1)}\frac{2!}{2^{\nu}\,\Gamma(\nu+1)}, \quad (14.193\text{b})$$

$$\int_0^z t^{-\nu} \mathrm{I}_{\nu+2}(t)\cosh t\,\mathrm{d}t = \frac{2\nu+2}{2\nu+1} z^{-\nu}\big[\mathrm{I}_{\nu+1}(z)\cosh z - \mathrm{I}_{\nu}(z)\sinh z\big] + \frac{z^{1-\nu}}{1-2\nu}\big[\mathrm{I}_{\nu}(z)\cosh z - \mathrm{I}_{\nu-1}(z)\sinh z\big], \quad (14.194\text{a})$$

$$\int_0^z t^{-\nu} \mathrm{I}_{\nu+2}(t)\sinh t\,\mathrm{d}t = \frac{2\nu+2}{2\nu+1} z^{-\nu}\big[\mathrm{I}_{\nu+1}(z)\sinh z - \mathrm{I}_{\nu}(z)\cosh z\big] + \frac{z^{1-\nu}}{1-2\nu}\big[\mathrm{I}_{\nu}(z)\sinh z - \mathrm{I}_{\nu-1}(z)\cosh z\big] - \frac{1}{(2\nu-1)(2\nu+1)}\frac{2!}{2^{\nu}\,\Gamma(\nu+1)}; \quad (14.194\text{b})$$

$$\int_0^z \mathrm{e}^{z-t} t^{-\nu} \mathrm{I}_{\nu+2}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2\nu+2}{2\nu+1} z^{-\nu}\big[\mathrm{I}_{\nu+1}(z) + \mathrm{I}_{\nu}(z)\big] + \frac{z^{1-\nu}}{1-2\nu}\big[\mathrm{I}_{\nu}(z) + \mathrm{I}_{\nu-1}(z)\big]$$

$$+\frac{1}{(2\nu-1)(2\nu+1)}\frac{2!}{\Gamma(\nu+1)}\frac{\mathrm{e}^{z}}{2^{\nu}},\tag{14.195a}$$

$$\begin{aligned}&\int_0^z \mathrm{e}^{t-z}t^{-\nu}\mathrm{I}_{\nu+2}(t)\,\mathrm{d}t\\&\quad=\frac{2\nu+2}{2\nu+1}z^{-\nu}\left[\mathrm{I}_{\nu+1}(z)-\mathrm{I}_{\nu}(z)\right]+\frac{z^{1-\nu}}{1-2\nu}\left[\mathrm{I}_{\nu}(z)-\mathrm{I}_{\nu-1}(z)\right]\\&\qquad-\frac{1}{(2\nu-1)(2\nu+1)}\frac{2!}{\Gamma(\nu+1)}\frac{\mathrm{e}^{-z}}{2^{\nu}},\end{aligned}\tag{14.195b}$$

$$\begin{aligned}&\int_0^z t^{-\nu}\mathrm{I}_{\nu+2}(t)\cosh(z-t)\,\mathrm{d}t\\&\quad=\frac{2\nu+2}{2\nu+1}z^{-\nu}\mathrm{I}_{\nu+1}(z)+\frac{z^{1-\nu}}{1-2\nu}\mathrm{I}_{\nu}(z)-\frac{1}{(2\nu-1)(2\nu+1)}\frac{2!}{\Gamma(\nu+1)}\frac{\sinh z}{2^{\nu}},\end{aligned}\tag{14.196a}$$

$$\begin{aligned}&\int_0^z t^{-\nu}\mathrm{I}_{\nu+2}(t)\sinh(z-t)\,\mathrm{d}t\\&\quad=\frac{2\nu+2}{2\nu+1}z^{-\nu}\mathrm{I}_{\nu}(z)+\frac{z^{1-\nu}}{1-2\nu}\mathrm{I}_{\nu-1}(z)+\frac{1}{(2\nu-1)(2\nu+1)}\frac{2!}{\Gamma(\nu+1)}\frac{\cosh z}{2^{\nu}}.\end{aligned}\tag{14.196b}$$

同样，当 $n=3$ 时，有

$$\begin{aligned}&\int_0^z \mathrm{e}^{-t}t^{-\nu}\mathrm{I}_{\nu+3}(t)\,\mathrm{d}t\\&\quad=\frac{2\nu+4}{2\nu+1}\mathrm{e}^{-z}\Big\{z^{-(\nu+1)}\mathrm{I}_{\nu+1}(z)+z^{-\nu}\left[\mathrm{I}_{\nu+2}(z)+\mathrm{I}_{\nu+1}(z)\right]\Big\}\\&\qquad+\frac{\mathrm{e}^{-z}}{1-2\nu}\Big\{z^{-\nu}\mathrm{I}_{\nu}(z)+z^{1-\nu}\left[\mathrm{I}_{\nu+1}(z)+\mathrm{I}_{\nu}(z)\right]\Big\}\\&\qquad+\frac{1}{(2\nu-1)(2\nu+1)}\frac{3!}{2^{\nu+1}\Gamma(\nu+2)},\end{aligned}\tag{14.197a}$$

$$\begin{aligned}&\int_0^z \mathrm{e}^{t}t^{-\nu}\mathrm{I}_{\nu+3}(t)\,\mathrm{d}t\\&\quad=\frac{2\nu+4}{2\nu+1}\mathrm{e}^{z}\Big\{z^{-(\nu+1)}\mathrm{I}_{\nu+1}(z)+z^{-\nu}\left[\mathrm{I}_{\nu+2}(z)-\mathrm{I}_{\nu+1}(z)\right]\Big\}\\&\qquad+\frac{\mathrm{e}^{z}}{1-2\nu}\Big\{z^{-\nu}\mathrm{I}_{\nu}(z)+z^{1-\nu}\left[\mathrm{I}_{\nu+1}(z)-\mathrm{I}_{\nu}(z)\right]\Big\}\\&\qquad+\frac{1}{(2\nu-1)(2\nu+1)}\frac{3!}{2^{\nu+1}\Gamma(\nu+2)},\end{aligned}\tag{14.197b}$$

$$\begin{aligned}&\int_0^z t^{-\nu}\mathrm{I}_{\nu+3}(t)\cosh t\,\mathrm{d}t\\&\quad=\frac{2\nu+4}{2\nu+1}\Big\{z^{-(\nu+1)}\mathrm{I}_{\nu+1}(z)\cosh z+z^{-\nu}\left[\mathrm{I}_{\nu+2}(z)\cosh z-\mathrm{I}_{\nu+1}(z)\sinh z\right]\Big\}\\&\qquad+\frac{1}{1-2\nu}\Big\{z^{-\nu}\mathrm{I}_{\nu}(z)\cosh z+z^{1-\nu}\left[\mathrm{I}_{\nu+1}(z)\cosh z-\mathrm{I}_{\nu}(z)\sinh z\right]\Big\}\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{(2\nu-1)(2\nu+1)}\frac{3!}{2^{\nu+1}\Gamma(\nu+2)},\tag{14.198a}$$

$$\begin{aligned}&\int_0^z t^{-\nu}\mathrm{I}_{\nu+3}(t)\sinh t\,\mathrm{d}t\\&=\frac{2\nu+4}{2\nu+1}\Big\{z^{-(\nu+1)}\mathrm{I}_{\nu+1}(x)\sinh z+z^{-\nu}\big[\mathrm{I}_{\nu+2}(z)\sinh z-\mathrm{I}_{\nu+1}(z)\cosh z\big]\Big\}\\&\quad+\frac{1}{1-2\nu}\Big\{z^{-\nu}\mathrm{I}_\nu(x)\sinh z+z^{1-\nu}\big[\mathrm{I}_{\nu+1}(z)\sinh z-\mathrm{I}_\nu(z)\cosh z\big]\Big\};\end{aligned}\tag{14.198b}$$

$$\begin{aligned}&\int_0^z \mathrm{e}^{z-t}t^{-\nu}\mathrm{I}_{\nu+3}(t)\,\mathrm{d}t\\&=\frac{2\nu+4}{2\nu+1}\Big\{z^{-(\nu+1)}\mathrm{I}_{\nu+!}(z)+z^{-\nu}\big[\mathrm{I}_{\nu+2}(z)+\mathrm{I}_{\nu+1}(z)\big]\Big\}\\&\quad+\frac{1}{1-2\nu}\Big\{z^{-\nu}\mathrm{I}_\nu(z)+z^{1-\nu}\big[\mathrm{I}_{\nu+1}(z)+\mathrm{I}_\nu(z)\big]\Big\}\\&\quad+\frac{1}{(2\nu-1)(2\nu+1)}\frac{3!}{\Gamma(\nu+2)}\frac{\mathrm{e}^z}{2^{\nu+1}},\end{aligned}\tag{14.199a}$$

$$\begin{aligned}&\int_0^z \mathrm{e}^{t-z}t^{-\nu}\mathrm{I}_{\nu+3}(t)\,\mathrm{d}t\\&=\frac{2\nu+4}{2\nu+1}\Big\{z^{-(\nu+1)}\mathrm{I}_{\nu+1}(z)+z^{-\nu}\big[\mathrm{I}_{\nu+2}(z)-\mathrm{I}_{\nu+1}(z)\big]\Big\}\\&\quad+\frac{1}{1-2\nu}\Big\{z^{-\nu}\mathrm{I}_\nu(z)+z^{1-\nu}\big[\mathrm{I}_\nu(z)-\mathrm{I}_{\nu-1}(z)\big]\Big\}\\&\quad+\frac{1}{(2\nu-1)(2\nu+1)}\frac{3!}{\Gamma(\nu+2)}\frac{\mathrm{e}^{-z}}{2^{\nu+1}},\end{aligned}\tag{14.199b}$$

$$\begin{aligned}&\int_0^z t^{-\nu}\mathrm{I}_{\nu+3}(t)\cosh(z-t)\,\mathrm{d}t\\&=\frac{2\nu+4}{2\nu+1}\Big\{z^{-(\nu+1)}\mathrm{I}_{\nu+1}(z)+z^{-\nu}\mathrm{I}_{\nu+2}(z)\Big\}+\frac{1}{1-2\nu}\Big\{z^{-\nu}\mathrm{I}_\nu(z)+z^{1-\nu}\mathrm{I}_{\nu+1}(z)\Big\}\\&\quad+\frac{1}{(2\nu-1)(2\nu+1)}\frac{3!}{\Gamma(\nu+2)}\frac{\cosh z}{2^{\nu+1}},\end{aligned}\tag{14.200a}$$

$$\begin{aligned}&\int_0^z t^{-\nu}\mathrm{I}_{\nu+3}(t)\sinh(z-t)\,\mathrm{d}t\\&=\frac{2\nu+4}{2\nu+1}z^{-\nu}\mathrm{I}_{\nu+1}(z)+\frac{z^{1-\nu}}{1-2\nu}\mathrm{I}_{\nu-1}(z)+\frac{1}{(2\nu-1)(2\nu+1)}\frac{3!}{\Gamma(\nu+2)}\frac{\sinh z}{2^{\nu+1}}.\end{aligned}\tag{14.200b}$$

§14.5　Bessel 函数的某些间断积分

例 14.22　证明$\displaystyle\int_0^\infty\frac{\sin p}{p}\mathrm{J}_0(rp)\,\mathrm{d}p=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}, & 0\leqslant r\leqslant 1,\\ \arcsin\dfrac{1}{r}, & r>1.\end{cases}$

证　在上述积分中代入 Bessel 函数 $\mathrm{J}_0(rp)$ 的积分表示，有

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\sin p}{p}\mathrm{J}_0(rp)\,\mathrm{d}p &= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin p}{p}\left[\int_0^\pi \cos(rp\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta\right]\mathrm{d}p \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \mathrm{d}\theta\int_0^\infty \frac{1}{p}\sin p\cos(rp\sin\theta)\,\mathrm{d}p \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \mathrm{d}\theta\int_0^\infty \frac{1}{p}\big[\sin(1+r\sin\theta)p+\sin(1-r\sin\theta)p\big]\,\mathrm{d}p \\ &= \frac{1}{4}\int_0^\pi \left(\frac{1+r\sin\theta}{|1+r\sin\theta|}+\frac{1-r\sin\theta}{|1-r\sin\theta|}\right)\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \left(\frac{1+r\sin\theta}{|1+r\sin\theta|}+\frac{1-r\sin\theta}{|1-r\sin\theta|}\right)\mathrm{d}\theta.\end{aligned}$$

当 $0\leqslant r\leqslant 1$ 时，有

$$\frac{1+r\sin\theta}{|1+r\sin\theta|}=1,\qquad \frac{1-r\sin\theta}{|1-r\sin\theta|}=1,$$

所以

$$\int_0^\infty \frac{\sin p}{p}\mathrm{J}_0(rp)\,\mathrm{d}p=\frac{\pi}{2}. \tag{14.201a}$$

对于 $r=1$ 的特殊情形，也可以参见本章 §14.1 中的 (14.14b) 式.

当 $r>1$ 时，注意：

$$\text{若 } 0\leqslant\theta<\arcsin\frac{1}{r},\quad \text{则 } r\sin\theta<1,\quad \frac{1+r\sin\theta}{|1+r\sin\theta|}=1,\quad \frac{1-r\sin\theta}{|1-r\sin\theta|}=1;$$

$$\text{若 } \arcsin\frac{1}{r}<\theta\leqslant\frac{\pi}{2},\quad \text{则 } r\sin\theta>1,\quad \frac{1+r\sin\theta}{|1+r\sin\theta|}=1,\quad \frac{1-r\sin\theta}{|1-r\sin\theta|}=-1,$$

所以

$$\int_0^\infty \frac{\sin p}{p}\mathrm{J}_0(rp)\,\mathrm{d}p=\frac{1}{2}\int_0^{\arcsin 1/r}2\,\mathrm{d}\theta=\arcsin\frac{1}{r}. \tag{14.201b}$$

命题得证. □

例 14.23　证明 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin p}{p}\,\mathrm{J}_1(rp)\,\mathrm{d}p=\begin{cases}\dfrac{1}{r}\left(1-\sqrt{1-r^2}\right), & 0<r\leqslant 1,\\[2mm] \dfrac{1}{r}, & r>1.\end{cases}$

证　采用和例 14.22 同样的做法，代入 Bessel 函数 $\mathrm{J}_1(rp)$ 的积分表示

$$\mathrm{J}_1(rp)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(rp\sin\theta-\theta)\,\mathrm{d}\theta=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\sin(rp\sin\theta)\,\sin\theta\,\mathrm{d}\theta,$$

并交换积分次序，即得

$$\int_0^\infty \frac{\sin p}{p}\,\mathrm{J}_1(rp)\,\mathrm{d}p=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^\infty \frac{1}{p}\sin p\,\sin(rp\sin\theta)\,\mathrm{d}p$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{\infty}\frac{1}{p}\left[\cos(1-r\sin\theta)p-\cos(1+r\sin\theta)p\right]\,\mathrm{d}p \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\ln\frac{1+r\sin\theta}{1-r\sin\theta}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{\pi}\left[-\cos\theta\ln\frac{1+r\sin\theta}{1-r\sin\theta}\bigg|_0^{\pi/2}+\int_0^{\pi/2}\left(\frac{r\cos\theta}{1+r\sin\theta}+\frac{r\cos\theta}{1-r\sin\theta}\right)\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\right] \\
&= \frac{2r}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^2\theta}{1-r^2\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta.
\end{aligned}
$$

当 $r=1$ 时，显然就有

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin p}{p}\,\mathrm{J}_1(p)\,\mathrm{d}p=1;$$

当 $r\neq 1$ 时，则可作变换 $t=\tan\theta$，将所求积分化为

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\infty}\frac{\sin p}{p}\,\mathrm{J}_1(rp)\,\mathrm{d}p &= \frac{2r}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1}{1+(1-r^2)t^2}\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{\pi r}\int_0^{\infty}\left[\frac{1}{1+t^2}-\frac{1-r^2}{1+(1-r^2)t^2}\right]\mathrm{d}t,
\end{aligned}
$$

于是即可求得

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin p}{p}\,\mathrm{J}_1(rp)\,\mathrm{d}p=\begin{cases}\dfrac{1}{r}\left(1-\sqrt{1-r^2}\right), & 0<r<1,\\[2mm] \dfrac{1}{r}, & r>1.\end{cases}\tag{14.202}$$

命题得证. □

☞ **讨论**

1. 还可以将 (14.202) 式改写成

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin\alpha p}{p}\,\mathrm{J}_1(p)\,\mathrm{d}p=\begin{cases}\alpha, & 0\leqslant\alpha<1,\\[2mm] \alpha-\sqrt{\alpha^2-1}, & \alpha>1.\end{cases}\tag{14.202$'$}$$

对 α 求导，即得

$$\int_0^{\infty}\cos\alpha p\,\mathrm{J}_1(p)\,\mathrm{d}p=\begin{cases}1, & 0<\alpha<1,\\[2mm] 1-\dfrac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2-1}}, & \alpha>1,\end{cases}\tag{14.203a}$$

或者写成

$$\int_0^\infty \cos p\,\mathrm{J}_1(rp)\,\mathrm{d}p = \begin{cases} \dfrac{1}{r}\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{1-r^2}}\right), & 0<r<1, \\ 1, & r>1. \end{cases} \tag{14.203b}$$

但当 $r=1$ 时，有

$$\cos p\mathrm{J}_1(p) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi p}}\cos p \cos\left(p-\frac{3\pi}{4}\right) = -\sqrt{\frac{1}{\pi p}}\frac{1+\cos 2p-\sin 2p}{2},$$

所以积分 $\int_0^\infty \cos p\mathrm{J}_1(p)\,\mathrm{d}p$ 发散.

2. 直接分部积分，可得

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \sin p\,\mathrm{J}_0(rp)\,\mathrm{d}p &= -\cos p\,\mathrm{J}_0(rp)\Big|_0^\infty - r\int_0^\infty \cos p\,\mathrm{J}_1(rp)\,\mathrm{d}p \\ &= 1 - r\int_0^\infty \cos p\,\mathrm{J}_1(rp)\,\mathrm{d}p,\end{aligned}$$

所以

$$\int_0^\infty \sin p\,\mathrm{J}_0(rp)\,\mathrm{d}p = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1-r^2}}, & 0<r<1, \\ \infty, & r=1, \\ 0, & r>1. \end{cases} \tag{14.204}$$

例 14.24 证明 $\int_0^\infty \mathrm{J}_0(p)\mathrm{J}_1(rp)\mathrm{d}p = \begin{cases} 0, & r<1, \\ \dfrac{1}{2}, & r=1, \\ \dfrac{1}{r}, & r>1. \end{cases}$

证 代入 Bessel 函数 $\mathrm{J}_0(p)$ 的积分表示

$$\mathrm{J}_0(p) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(p\sin\theta)\mathrm{d}\theta = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos(p\sin\theta)\mathrm{d}\theta,$$

并交换积分次序，即得

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \mathrm{J}_0(p)\mathrm{J}_1(rp)\mathrm{d}p &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^\infty \cos(p\sin\theta)\mathrm{J}_1(rp)\mathrm{d}p \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\theta}{r}\int_0^\infty \cos\left(\frac{q\sin\theta}{r}\right)\mathrm{J}_1(q)\,\mathrm{d}q.\end{aligned}$$

利用 (14.203a) 式的结果，就可以得到 $r > 1$ 时有

$$\int_0^\infty \mathrm{J}_0(p)\mathrm{J}_1(rp)\mathrm{d}p = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{1}{r}\mathrm{d}\theta = \frac{1}{r}. \tag{14.205a}$$

当 $r = 1$ 时，因为 $\mathrm{J}_1(p) = -\mathrm{J}_0'(p)$，所以

$$\int_0^\infty \mathrm{J}_0(p)\mathrm{J}_1(p)\mathrm{d}p = -\frac{1}{2}\mathrm{J}_0^2(p)\Big|_0^\infty = \frac{1}{2}. \tag{14.205b}$$

同时，直接积分可证明

$$r\int_0^\infty \mathrm{J}_0(p)\mathrm{J}_1(rp)\mathrm{d}p + \int_0^\infty \mathrm{J}_0(rp)\mathrm{J}_1(p)\mathrm{d}p = -\mathrm{J}_0(p)\mathrm{J}_0(rp)\Big|_0^\infty = 1,$$

因此，又可得到 $0 < r < 1$ 时有

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \mathrm{J}_0(p)\mathrm{J}_1(rp)\mathrm{d}p &= \frac{1}{r}\left(1 - \int_0^\infty \mathrm{J}_0(rp)\mathrm{J}_1(p)\mathrm{d}p\right)\\ &= \frac{1}{r}\left(1 - \frac{1}{r}\int_0^\infty \mathrm{J}_0(q)\mathrm{J}_1(q/r)\mathrm{d}q\right) = 0. \end{aligned}\tag{14.205c}$$

命题得证. □

第十五章　柱函数的 Christoffel 型求和公式

本章是第十二章的继续，讨论柱函数及相关函数的 Christoffel 型求和公式. 推导方法完全类似于第十二章，不再赘述.

§15.1　柱函数的求和公式

先以 Bessel 函数为例. Bessel 函数的两个递推关系是:

$$\frac{2\nu}{z}\,\mathrm{J}_\nu(z)=\mathrm{J}_{\nu+1}(z)+\mathrm{J}_{\nu-1}(z), \tag{15.1a}$$

$$2\mathrm{J}'_\nu(z)=-\mathrm{J}_{\nu+1}(z)+\mathrm{J}_{\nu-1}(z). \tag{15.1b}$$

由这两个递推关系可以得到求和公式[①]:

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n}(\nu+k)\,\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{J}_{\nu+k}(\zeta)\\&\quad=\frac{1}{2}\,\frac{z\zeta}{z-\zeta}\Big\{-\Big[\mathrm{J}_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{J}_{\nu+n}(\zeta)-\mathrm{J}_{\nu+n}(z)\,\mathrm{J}_{\nu+n+1}(\zeta)\Big]\\&\qquad+\Big[\mathrm{J}_\nu(z)\,\mathrm{J}_{\nu-1}(\zeta)-\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{J}_\nu(\zeta)\Big]\Big\},\end{aligned} \tag{15.2}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n}(\nu+k)\,\mathrm{J}^2_{\nu+k}(z)\\&\quad=\frac{z^2}{2}\Big\{\Big[\mathrm{J}_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{J}'_{\nu+n}(z)-\mathrm{J}_{\nu+n}(z)\,\mathrm{J}'_{\nu+n+1}(z)\Big]\\&\qquad-\Big[\mathrm{J}_\nu(z)\,\mathrm{J}'_{\nu-1}(z)-\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{J}'_\nu(z)\Big]\Big\},\end{aligned} \tag{15.3}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\nu+k)\,\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{J}_{\nu+k}(\zeta)\\&\quad=\frac{1}{2}\,\frac{z\zeta}{z+\zeta}\Big\{(-1)^n\Big[\mathrm{J}_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{J}_{\nu+n}(\zeta)+\mathrm{J}_{\nu+n}(z)\,\mathrm{J}_{\nu+n+1}(\zeta)\Big]\\&\qquad+\Big[\mathrm{J}_\nu(z)\,\mathrm{J}_{\nu-1}(\zeta)+\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{J}_\nu(\zeta)\Big]\Big\},\end{aligned} \tag{15.4}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\nu+k)\,\mathrm{J}^2_{\nu+k}(z)=\frac{z}{2}\Big[(-1)^n\mathrm{J}_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{J}_{\nu+n}(z)+\mathrm{J}_\nu(z)\,\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\Big], \tag{15.5}$$

① 在本章列出的求和公式中，均约定 $\mathrm{Re}\,\nu\geqslant 0$，特别申明者除外.

$$\sum_{k=0}^{n}(\nu+k)\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{J}_{-\nu-k}(\zeta)$$
$$=\frac{1}{2}\frac{z\zeta}{\zeta+z}\Big\{\Big[\mathrm{J}_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{J}_{-\nu-n}(\zeta)-\mathrm{J}_{\nu+n}(z)\,\mathrm{J}_{-\nu-n-1}(\zeta)\Big]$$
$$-\Big[\mathrm{J}_{\nu}(z)\,\mathrm{J}_{1-\nu}(\zeta)-\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{J}_{-\nu}(\zeta)\Big]\Big\}, \tag{15.6}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(\nu+k)\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)$$
$$=\frac{z}{4}\Big\{\Big[\mathrm{J}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{J}_{-\nu-n}(z)-\mathrm{J}_{\nu+n}(z)\mathrm{J}_{-\nu-n-1}(z)\Big]$$
$$-\Big[\mathrm{J}_{\nu}(z)\mathrm{J}_{1-\nu}(z)-\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\mathrm{J}_{-\nu}(z)\Big]\Big\} \tag{15.7a}$$
$$=\frac{z}{2}\Big[\mathrm{J}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{J}_{-\nu-n}(z)-\mathrm{J}_{\nu}(z)\mathrm{J}_{1-\nu}(z)\Big]+\frac{1+(-1)^n}{2\pi} \tag{15.7b}$$
$$=-\frac{z}{2}\Big[\mathrm{J}_{\nu+n}(z)\mathrm{J}_{-\nu-n-1}(z)-\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\mathrm{J}_{-\nu}(z)\Big]-\frac{1+(-1)^n}{2\pi}, \tag{15.7c}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\nu+k)\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{J}_{-\nu-k}(\zeta)$$
$$=\frac{1}{2}\frac{z\zeta}{\zeta-z}\Big\{(-1)^n\Big[\mathrm{J}_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{J}_{-\nu-n}(\zeta)+\mathrm{J}_{\nu+n}(z)\,\mathrm{J}_{-\nu-n-1}(\zeta)\Big]$$
$$+\Big[\mathrm{J}_{\nu}(z)\,\mathrm{J}_{1-\nu}(\zeta)+\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{J}_{-\nu}(\zeta)\Big]\Big\}, \tag{15.8}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\nu+k)\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)$$
$$=\frac{z^2}{2}\Big\{(-1)^n\Big[\mathrm{J}_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{J}'_{-\nu-n}(z)+\mathrm{J}_{\nu+n}(z)\,\mathrm{J}'_{-\nu-n-1}(z)\Big]$$
$$+\Big[\mathrm{J}_{\nu}(z)\,\mathrm{J}'_{1-\nu}(z)+\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{J}'_{-\nu}(z)\Big]\Big\} \tag{15.9a}$$
$$=-\frac{z^2}{2}\Big\{(-1)^n\Big[\mathrm{J}'_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{J}_{-\nu-n}(z)+\mathrm{J}'_{\nu+n}(z)\,\mathrm{J}_{-\nu-n-1}(z)\Big]$$
$$+\Big[\mathrm{J}'_{\nu}(z)\,\mathrm{J}_{1-\nu}(z)+\mathrm{J}'_{\nu-1}(z)\,\mathrm{J}_{-\nu}(z)\Big]\Big\}, \tag{15.9b}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(\nu+k)\,\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)\,\mathrm{J}_{-\nu-k}(\zeta)$$
$$=\frac{1}{2}\frac{z\zeta}{z-\zeta}\Big\{\Big[\mathrm{J}_{-\nu-n-1}(z)\,\mathrm{J}_{-\nu-n}(\zeta)-\mathrm{J}_{-\nu-n}(z)\,\mathrm{J}_{-\nu-n-1}(\zeta)\Big]$$
$$-\Big[\mathrm{J}_{-\nu}(z)\,\mathrm{J}_{1-\nu}(\zeta)-\mathrm{J}_{1-\nu}(z)\,\mathrm{J}_{-\nu}(\zeta)\Big]\Big\}, \tag{15.10}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(\nu+k)\,\mathrm{J}^2_{-\nu-k}(z)$$
$$=\frac{z^2}{2}\Big\{-\Big[\mathrm{J}_{-\nu-n-1}(z)\,\mathrm{J}'_{-\nu-n}(z)-\mathrm{J}'_{-\nu-n-1}(z)\,\mathrm{J}_{-\nu-n}(z)\Big]$$
$$+\Big[\mathrm{J}_{-\nu}(z)\,\mathrm{J}'_{1-\nu}(z)-\mathrm{J}'_{-\nu}(z)\,\mathrm{J}_{1-\nu}(z)\Big]\Big\}, \tag{15.11}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\nu+k)\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)\,\mathrm{J}_{-\nu-k}(\zeta)$$
$$=\frac{1}{2}\frac{z\zeta}{z-\zeta}\Big\{(-1)^{n+1}\Big[\mathrm{J}_{-\nu-n-1}\mathrm{J}_{-\nu-n}(\zeta)-\mathrm{J}_{-\nu-n}\mathrm{J}_{-\nu-n-1}(\zeta)\Big]$$
$$-\Big[\mathrm{J}_{-\nu}(z)\mathrm{J}_{1-\nu}(\zeta)-\mathrm{J}_{1-\nu}(z)\mathrm{J}_{-\nu}(\zeta)\Big]\Big\}, \tag{15.12}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\nu+k)\mathrm{J}^2_{-\nu-k}(z)=\frac{z}{2}\Big[(-1)^{n+1}\mathrm{J}_{-\nu-n-1}\mathrm{J}_{-\nu-n}(z)-\mathrm{J}_{-\nu}(z)\mathrm{J}_{1-\nu}(z)\Big], \tag{15.13}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\Big[\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{J}'_{\nu+k}(\zeta)+\mathrm{J}'_{\nu+k}(z)\,\mathrm{J}'_{\nu+k}(\zeta)\Big]$$
$$=\frac{1}{2}\Big\{-\Big[\mathrm{J}_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{J}_{\nu+n}(\zeta)+\mathrm{J}_{\nu+n}(z)\,\mathrm{J}_{\nu+n+1}(\zeta)\Big]$$
$$+\Big[\mathrm{J}_{\nu}(z)\,\mathrm{J}_{\nu-1}(\zeta)+\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{J}_{\nu}(\zeta)\Big]\Big\}, \tag{15.14}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{J}'_{\nu+k}(z)=-\mathrm{J}_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{J}_{\nu+n}(z)+\mathrm{J}_{\nu}(z)\,\mathrm{J}_{\nu-1}(z), \tag{15.15}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\Big[\mathrm{J}'_{\nu+k}(z)\,\mathrm{J}_{\nu+k}(\zeta)-\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{J}'_{\nu+k}(\zeta)\Big]$$
$$=\frac{1}{2}\Big\{(-1)^{n+1}\Big[\mathrm{J}_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{J}_{\nu+n}(\zeta)-\mathrm{J}_{\nu+n}(z)\,\mathrm{J}_{\nu+n+1}(\zeta)\Big]$$
$$-\Big[\mathrm{J}_{\nu}(z)\,\mathrm{J}_{\nu-1}(\zeta)-\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{J}_{\nu}(\zeta)\Big]\Big\}, \tag{15.16}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\Big\{z^2\mathrm{J}'^2_{\nu+k}(z)+\Big[z^2-(\nu+k)^2\Big]\mathrm{J}^2_{\nu+k}(z)+z\,\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{J}'_{\nu+k}(z)\Big\}$$
$$=\frac{z^2}{2}\Big\{(-1)^{n+1}\Big[\mathrm{J}_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{J}'_{\nu+n}(z)-\mathrm{J}_{\nu+n}(z)\,\mathrm{J}'_{\nu+n+1}(z)\Big]$$
$$-\Big[\mathrm{J}_{\nu}(z)\,\mathrm{J}'_{\nu-1}(z)-\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{J}'_{\nu}(z)\Big]\Big\}, \tag{15.17}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\Big[\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{J}'_{-\nu-k}(\zeta)-\mathrm{J}'_{\nu+k}(z)\,\mathrm{J}_{-\nu-k}(\zeta)\Big]$$
$$=\frac{1}{2}\Big\{\Big[\mathrm{J}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{J}_{-\nu-n}(\zeta)+\mathrm{J}_{\nu+n}(z)\mathrm{J}_{-\nu-n-1}(\zeta)\Big]$$
$$-\Big[\mathrm{J}_{\nu}(z)\mathrm{J}_{1-\nu}(\zeta)+\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\mathrm{J}_{-\nu}(\zeta)\Big]\Big\}, \tag{15.18}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\Big\{\Big[z^2-(\nu+k)^2\Big]\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)+z^2\mathrm{J}'_{\nu+k}(z)\mathrm{J}'_{-\nu-k}(z)$$
$$+\frac{z}{2}\Big[\mathrm{J}'_{\nu+k}(z)\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)+\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{J}'_{-\nu-k}(z)\Big]\Big\}$$
$$=\frac{z^2}{4}\Big\{-\Big[\mathrm{J}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{J}'_{-\nu-n}(z)-\mathrm{J}'_{\nu+n+1}(z)\mathrm{J}_{-\nu-n}(z)$$
$$+\mathrm{J}_{\nu+n}(z)\mathrm{J}'_{-\nu-n-1}(z)-\mathrm{J}'_{\nu+n}(z)\mathrm{J}_{-\nu-n-1}(z)\Big]$$
$$+\Big[\mathrm{J}_{\nu}(z)\mathrm{J}'_{1-\nu}(z)-\mathrm{J}'_{\nu}(z)\mathrm{J}_{1-\nu}(z)+\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\mathrm{J}'_{-\nu}(z)-\mathrm{J}'_{\nu-1}(z)\mathrm{J}_{\nu}(z)\Big]\Big\}, \tag{15.19}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\Big[\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{J}'_{-\nu-k}(\zeta)+\mathrm{J}'_{\nu+k}(z)\,\mathrm{J}_{-\nu-k}(\zeta)\Big]$$
$$=\frac{1}{2}\Big\{(-1)^{n+1}\Big[\mathrm{J}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{J}_{-\nu-n}(\zeta)-\mathrm{J}_{\nu+n}(z)\mathrm{J}_{-\nu-n-1}(\zeta)\Big]$$
$$-\Big[\mathrm{J}_{\nu}(z)\mathrm{J}_{1-\nu}(\zeta)-\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\mathrm{J}_{-\nu}(\zeta)\Big]\Big\}, \tag{15.20}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\Big[\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{J}'_{-\nu-k}(z)+\mathrm{J}'_{\nu+k}(z)\,\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)\Big]$$
$$=\frac{1}{2}\Big\{(-1)^{n+1}\Big[\mathrm{J}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{J}_{-\nu-n}(z)-\mathrm{J}_{\nu+n}(z)\mathrm{J}_{-\nu-n-1}(z)\Big]$$
$$-\Big[\mathrm{J}_{\nu}(z)\mathrm{J}_{1-\nu}(z)-\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\mathrm{J}_{-\nu}(z)\Big]\Big\}, \tag{15.21}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\Big[\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)\mathrm{J}'_{-\nu-k}(\zeta)+\mathrm{J}'_{-\nu-k}(z)\mathrm{J}_{-\nu-k}(\zeta)\Big]$$
$$=\frac{1}{2}\Big\{\Big[\mathrm{J}_{-\nu-n-1}(z)\mathrm{J}_{-\nu-n}(\zeta)+\mathrm{J}_{-\nu-n}(z)\mathrm{J}_{-\nu-n-1}(\zeta)\Big]$$
$$-\Big[\mathrm{J}_{-\nu}(z)\mathrm{J}_{1-\nu}(\zeta)+\mathrm{J}_{1-\nu}(z)\mathrm{J}_{-\nu}(\zeta)\Big]\Big\}, \tag{15.22}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)\mathrm{J}'_{-\nu-k}(z)=\frac{1}{2}\Big\{\mathrm{J}_{-\nu-n-1}(z)\mathrm{J}_{-\nu-n}(z)-\mathrm{J}_{-\nu}(z)\mathrm{J}_{1-\nu}(z)\Big\}, \tag{15.23}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\Big[\mathrm{J}'_{-\nu-k}(z)\,\mathrm{J}_{-\nu-k}(\zeta)-\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)\,\mathrm{J}'_{-\nu-k}(\zeta)\Big]$$
$$=\frac{1}{2}\Big\{(-1)^n\Big[\mathrm{J}_{-\nu-n-1}(z)\,\mathrm{J}_{-\nu-n}(\zeta)-\mathrm{J}_{-\nu-n}(z)\,\mathrm{J}_{-\nu-n-1}(\zeta)\Big]$$
$$+\Big[\mathrm{J}_{-\nu}(z)\,\mathrm{J}_{1-\nu}(\zeta)-\mathrm{J}_{1-\nu}(z)\,\mathrm{J}_{-\nu}(\zeta)\Big]\Big\}, \tag{15.24}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\Big\{z^2\mathrm{J}'^2_{-\nu-k}(z)+\Big[z^2-(\nu+k)^2\Big]\mathrm{J}^2_{-\nu-k}(z)+z\,\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)\,\mathrm{J}'_{-\nu-k}(z)\Big\}$$
$$=\frac{z^2}{2}\Big\{(-1)^n\Big[\mathrm{J}_{-\nu-n-1}(z)\,\mathrm{J}'_{-\nu-n}(z)-\mathrm{J}'_{-\nu-n-1}(z)\,\mathrm{J}_{-\nu-n}(z)\Big]$$
$$+\Big[\mathrm{J}_{-\nu}(z)\,\mathrm{J}'_{1-\nu}(z)-\mathrm{J}'_{-\nu}(z)\,\mathrm{J}_{1-\nu}(z)\Big]\Big\}. \tag{15.25}$$

利用递推关系 (15.1)，还可以将 (15.17)，(15.19) 及 (15.25) 式分别化为

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\Big\{z\,\mathrm{J}^2_{\nu+k}(z)+\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{J}'_{\nu+k}(z)-z\,\mathrm{J}_{\nu+k+1}(z)\mathrm{J}_{\nu+k-1}(z)\Big\}$$
$$=\frac{z}{2}\Big\{(-1)^{n+1}\Big[\mathrm{J}_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{J}'_{\nu+n}(z)-\mathrm{J}_{\nu+n}(z)\,\mathrm{J}'_{\nu+n+1}(z)\Big]$$
$$-\Big[\mathrm{J}_{\nu}(z)\,\mathrm{J}'_{\nu-1}(z)-\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{J}'_{\nu}(z)\Big]\Big\}, \tag{15.17$'$}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\Big\{z\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)+\frac{1}{2}\Big[\mathrm{J}'_{\nu+k}(z)\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)+\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{J}'_{-\nu-k}(z)\Big]$$
$$+\frac{z}{2}\Big[\mathrm{J}_{\nu+k+1}(z)\mathrm{J}_{-\nu-k+1}(z)+\mathrm{J}_{\nu+k-1}(z)\mathrm{J}_{-\nu-k-1}(z)\Big]\Big\}$$
$$=\frac{z}{4}\Big\{-\Big[\mathrm{J}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{J}'_{-\nu-n}(z)-\mathrm{J}'_{\nu+n+1}(z)\mathrm{J}_{-\nu-n}(z)$$
$$+\mathrm{J}_{\nu+n}(z)\mathrm{J}'_{-\nu-n-1}(z)-\mathrm{J}'_{\nu+n}(z)\mathrm{J}_{-\nu-n-1}(z)\Big]$$
$$+\Big[\mathrm{J}_{\nu}(z)\mathrm{J}'_{1-\nu}(z)-\mathrm{J}'_{\nu}(z)\mathrm{J}_{1-\nu}(z)+\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\mathrm{J}'_{-\nu}(z)-\mathrm{J}'_{\nu-1}(z)\mathrm{J}_{\nu}(z)\Big]\Big\}, \tag{15.19$'$}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\Big\{z\,\mathrm{J}^2_{-\nu-k}(z)+\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)\,\mathrm{J}'_{-\nu-k}(z)-z\,\mathrm{J}_{-\nu-k-1}(z)\mathrm{J}_{-\nu-k+1}(z)\Big\}$$
$$=\frac{z}{2}\Big\{(-1)^n\Big[\mathrm{J}_{-\nu-n-1}(z)\,\mathrm{J}'_{-\nu-n}(z)-\mathrm{J}'_{-\nu-n-1}(z)\,\mathrm{J}_{-\nu-n}(z)\Big]$$
$$+\Big[\mathrm{J}_{-\nu}(z)\,\mathrm{J}'_{1-\nu}(z)-\mathrm{J}'_{-\nu}(z)\,\mathrm{J}_{1-\nu}(z)\Big]\Big\}. \tag{15.25$'$}$$

另外，由 Bessel 函数的 Wroński 行列式可以导出恒等式 (见第十三章，(13.32) 式)

$$\mathrm{J}_\nu(z)\,\mathrm{J}_{1-\nu}(z)+\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{J}_{-\nu}(z)=\frac{2}{\pi z}\,\sin\pi\nu,$$

因此还可以将 (15.21) 式改写为

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k&\Big[\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{J}'_{-\nu-k}(z)+\mathrm{J}'_{\nu+k}(z)\,\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)\Big]\\&=(-1)^{n+1}\mathrm{J}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{J}_{-\nu-n}(z)-\mathrm{J}_\nu(z)\mathrm{J}_{1-\nu}(z) &(15.21')\\&=(-1)^{n}\mathrm{J}_{\nu+n}(z)\mathrm{J}_{-\nu-n-1}(z)+\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\mathrm{J}_{-\nu}(z). &(15.21'')\end{aligned}$$

我们知道，递推关系 (15.1) 其实就是柱函数的定义. 因此，如果将柱函数 (例如 Neumann 函数和 Hankel 函数，当然也包括 Bessel 函数本身或者它们的适当组合) 记为 $\mathscr{C}_\nu(z)$，则也应当有

$$\frac{2\nu}{z}\,\mathscr{C}_\nu(z)=\mathscr{C}_{\nu+1}(z)+\mathscr{C}_{\nu-1}(z), \tag{15.26a}$$

$$2\,\mathscr{C}'_\nu(z)=-\,\mathscr{C}_{\nu+1}(z)+\mathscr{C}_{\nu-1}(z). \tag{15.26b}$$

因此，对于 Neumann 函数，就有下列求和公式：

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}&(\nu+k)\,\mathrm{N}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{N}_{\nu+k}(\zeta)\\&=\frac{1}{2}\,\frac{z\zeta}{z-\zeta}\Big\{-\Big[\mathrm{N}_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{N}_{\nu+n}(\zeta)-\mathrm{N}_{\nu+n}(z)\,\mathrm{N}_{\nu+n+1}(\zeta)\Big]\\&\qquad+\Big[\mathrm{N}_\nu(z)\,\mathrm{N}_{\nu-1}(\zeta)-\mathrm{N}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{N}_\nu(\zeta)\Big]\Big\}, &(15.27)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}&(\nu+k)\,\mathrm{N}^2_{\nu+k}(z)\\&=\frac{z^2}{2}\Big\{\Big[\mathrm{N}_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{N}'_{\nu+n}(z)-\mathrm{N}_{\nu+n}(z)\,\mathrm{N}'_{\nu+n+1}(z)\Big]\\&\qquad-\Big[\mathrm{N}_\nu(z)\,\mathrm{N}'_{\nu-1}(z)-\mathrm{N}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{N}'_\nu(z)\Big]\Big\}, &(15.28)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}&(-1)^k(\nu+k)\,\mathrm{N}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{N}_{\nu+k}(\zeta)\\&=\frac{1}{2}\,\frac{z\zeta}{z+\zeta}\Big\{(-1)^n\Big[\mathrm{N}_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{N}_{\nu+n}(\zeta)+\mathrm{N}_{\nu+n}(z)\,\mathrm{N}_{\nu+n+1}(\zeta)\Big]\\&\qquad+\Big[\mathrm{N}_\nu(z)\,\mathrm{N}_{\nu-1}(\zeta)+\mathrm{N}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{N}_\nu(\zeta)\Big]\Big\}, &(15.29)\end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\nu+k)\,\mathrm{N}^2_{\nu+k}(z)=\frac{z}{2}\Big[(-1)^n\mathrm{N}_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{N}_{\nu+n}(z)+\mathrm{N}_\nu(z)\,\mathrm{N}_{\nu-1}(z)\Big], \tag{15.30}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(\nu+k)\mathrm{N}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{N}_{-\nu-k}(\zeta)$$
$$=\frac{1}{2}\frac{z\zeta}{\zeta+z}\Big\{\Big[\mathrm{N}_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{N}_{-\nu-n}(\zeta)-\mathrm{N}_{\nu+n}(z)\,\mathrm{N}_{-\nu-n-1}(\zeta)\Big]$$
$$-\Big[\mathrm{N}_{\nu}(z)\,\mathrm{N}_{1-\nu}(\zeta)-\mathrm{N}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{N}_{-\nu}(\zeta)\Big]\Big\},\tag{15.31}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(\nu+k)\mathrm{N}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{N}_{-\nu-k}(z)$$
$$=\frac{z}{4}\Big\{\Big[\mathrm{N}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{N}_{-\nu-n}(z)-\mathrm{N}_{\nu+n}(z)\mathrm{N}_{-\nu-n-1}(z)\Big]$$
$$-\Big[\mathrm{N}_{\nu}(z)\mathrm{N}_{1-\nu}(z)-\mathrm{N}_{\nu-1}(z)\mathrm{N}_{-\nu}(z)\Big]\Big\}\tag{15.32a}$$
$$=\frac{z}{2}\Big[\mathrm{N}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{N}_{-\nu-n}(z)-\mathrm{N}_{\nu}(z)\mathrm{N}_{1-\nu}(z)\Big]+\frac{1+(-1)^n}{2\pi}\tag{15.32b}$$
$$=-\frac{z}{2}\Big[\mathrm{N}_{\nu+n}(z)\mathrm{N}_{-\nu-n-1}(z)-\mathrm{N}_{\nu-1}(z)\mathrm{N}_{-\nu}(z)\Big]-\frac{1+(-1)^n}{2\pi},\tag{15.32c}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\nu+k)\mathrm{N}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{N}_{-\nu-k}(\zeta)$$
$$=\frac{1}{2}\frac{z\zeta}{\zeta-z}\Big\{(-1)^n\Big[\mathrm{N}_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{N}_{-\nu-n}(\zeta)+\mathrm{N}_{\nu+n}(z)\,\mathrm{N}_{-\nu-n-1}(\zeta)\Big]$$
$$+\Big[\mathrm{N}_{\nu}(z)\,\mathrm{N}_{1-\nu}(\zeta)+\mathrm{N}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{N}_{-\nu}(\zeta)\Big]\Big\},\tag{15.33}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\nu+k)\mathrm{N}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{N}_{-\nu-k}(z)$$
$$=\frac{z^2}{2}\Big\{(-1)^n\Big[\mathrm{N}_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{N}'_{-\nu-n}(z)+\mathrm{N}_{\nu+n}(z)\,\mathrm{N}'_{-\nu-n-1}(z)\Big]$$
$$+\Big[\mathrm{N}_{\nu}(z)\,\mathrm{N}'_{1-\nu}(z)+\mathrm{N}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{N}'_{-\nu}(z)\Big]\Big\}\tag{15.34a}$$
$$=-\frac{z^2}{2}\Big\{(-1)^n\Big[\mathrm{N}'_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{N}_{-\nu-n}(z)+\mathrm{N}'_{\nu+n}(z)\,\mathrm{N}_{-\nu-n-1}(z)\Big]$$
$$+\Big[\mathrm{N}'_{\nu}(z)\,\mathrm{N}_{1-\nu}(z)+\mathrm{N}'_{\nu-1}(z)\,\mathrm{N}_{-\nu}(z)\Big]\Big\},\tag{15.34b}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(\nu+k)\,\mathrm{N}_{-\nu-k}(z)\,\mathrm{N}_{-\nu-k}(\zeta)$$
$$=\frac{1}{2}\,\frac{z\zeta}{z-\zeta}\Big\{\Big[\mathrm{N}_{-\nu-n-1}(z)\,\mathrm{N}_{-\nu-n}(\zeta)-\mathrm{N}_{-\nu-n}(z)\,\mathrm{N}_{-\nu-n-1}(\zeta)\Big]$$
$$-\Big[\mathrm{N}_{-\nu}(z)\,\mathrm{N}_{1-\nu}(\zeta)-\mathrm{N}_{1-\nu}(z)\,\mathrm{N}_{-\nu}(\zeta)\Big]\Big\},\tag{15.35}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(\nu+k)\,\mathrm{N}_{-\nu-k}^{2}(z)$$
$$=\frac{z^2}{2}\Big\{-\Big[\mathrm{N}_{-\nu-n-1}(z)\,\mathrm{N}'_{-\nu-n}(z)-\mathrm{N}'_{-\nu-n-1}(z)\,\mathrm{N}_{-\nu-n}(z)\Big]$$
$$+\Big[\mathrm{N}_{-\nu}(z)\,\mathrm{N}'_{1-\nu}(z)-\mathrm{N}'_{-\nu}(z)\,\mathrm{N}_{1-\nu}(z)\Big]\Big\},\tag{15.36}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\nu+k)\mathrm{N}_{-\nu-k}(z)\,\mathrm{N}_{-\nu-k}(\zeta)$$
$$=\frac{1}{2}\frac{z\zeta}{z-\zeta}\Big\{(-1)^{n+1}\Big[\mathrm{N}_{-\nu-n-1}\mathrm{N}_{-\nu-n}(\zeta)-\mathrm{N}_{-\nu-n}\mathrm{N}_{-\nu-n-1}(\zeta)\Big]$$
$$-\Big[\mathrm{N}_{-\nu}(z)\mathrm{N}_{1-\nu}(\zeta)-\mathrm{N}_{1-\nu}(z)\mathrm{N}_{-\nu}(\zeta)\Big]\Big\},\tag{15.37}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\nu+k)\mathrm{N}_{-\nu-k}^{2}(z)=\frac{z}{2}\Big[(-1)^{n+1}\mathrm{N}_{-\nu-n-1}\mathrm{N}_{-\nu-n}(z)-\mathrm{N}_{-\nu}(z)\mathrm{N}_{1-\nu}(z)\Big],\tag{15.38}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\Big[\mathrm{N}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{N}'_{\nu+k}(\zeta)+\mathrm{N}'_{\nu+k}(z)\,\mathrm{N}_{\nu+k}(\zeta)\Big]$$
$$=\frac{1}{2}\Big\{-\Big[\mathrm{N}_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{N}_{\nu+n}(\zeta)+\mathrm{N}_{\nu+n}(z)\,\mathrm{N}_{\nu+n+1}(\zeta)\Big]$$
$$+\Big[\mathrm{N}_{\nu}(z)\,\mathrm{N}_{\nu-1}(\zeta)+\mathrm{N}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{N}_{\nu}(\zeta)\Big]\Big\},\tag{15.39}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\mathrm{N}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{N}'_{\nu+k}(z)=-\mathrm{N}_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{N}_{\nu+n}(z)+\mathrm{N}_{\nu}(z)\,\mathrm{N}_{\nu-1}(z),\tag{15.40}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\Big[\mathrm{N}'_{\nu+k}(z)\,\mathrm{N}_{\nu+k}(\zeta)-\mathrm{N}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{N}'_{\nu+k}(\zeta)\Big]$$
$$=\frac{1}{2}\Big\{(-1)^{n+1}\Big[\mathrm{N}_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{N}_{\nu+n}(\zeta)-\mathrm{N}_{\nu+n}(z)\,\mathrm{N}_{\nu+n+1}(\zeta)\Big]$$
$$-\Big[\mathrm{N}_{\nu}(z)\,\mathrm{N}_{\nu-1}(\zeta)-\mathrm{N}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{N}_{\nu}(\zeta)\Big]\Big\},\tag{15.41}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\Big\{z^2\mathrm{N}'^2_{\nu+k}(z)+\Big[z^2-(\nu+k)^2\Big]\mathrm{N}^2_{\nu+k}(z)+z\,\mathrm{N}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{N}'_{\nu+k}(z)\Big\}$$
$$=\frac{z^2}{2}\Big\{(-1)^{n+1}\Big[\mathrm{N}_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{N}'_{\nu+n}(z)-\mathrm{N}_{\nu+n}(z)\,\mathrm{N}'_{\nu+n+1}(z)\Big]$$
$$-\Big[\mathrm{N}_{\nu}(z)\,\mathrm{N}'_{\nu-1}(z)-\mathrm{N}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{N}'_{\nu}(z)\Big]\Big\},\tag{15.42}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\Big[\mathrm{N}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{N}'_{-\nu-k}(\zeta)-\mathrm{N}'_{\nu+k}(z)\,\mathrm{N}_{-\nu-k}(\zeta)\Big]$$

$$=\frac{1}{2}\bigg\{\Big[\mathrm{N}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{N}_{-\nu-n}(\zeta)+\mathrm{N}_{\nu+n}(z)\mathrm{N}_{-\nu-n-1}(\zeta)\Big]$$

$$-\Big[\mathrm{N}_{\nu}(z)\mathrm{N}_{1-\nu}(\zeta)+\mathrm{N}_{\nu-1}(z)\mathrm{N}_{-\nu}(\zeta)\Big]\bigg\}, \tag{15.43}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\bigg\{\Big[z^2-(\nu+k)^2\Big]\mathrm{N}_{\nu+k}(z)\mathrm{N}_{-\nu-k}(z)+z^2\mathrm{N}'_{\nu+k}(z)\mathrm{N}'_{-\nu-k}(z)$$

$$+\frac{z}{2}\Big[\mathrm{N}'_{\nu+k}(z)\mathrm{N}_{-\nu-k}(z)+\mathrm{N}_{\nu+k}(z)\mathrm{N}'_{-\nu-k}(z)\Big]\bigg\}$$

$$=\frac{z^2}{4}\bigg\{-\Big[\mathrm{N}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{N}'_{-\nu-n}(z)-\mathrm{N}'_{\nu+n+1}(z)\mathrm{N}_{-\nu-n}(z)$$

$$+\mathrm{N}_{\nu+n}(z)\mathrm{N}'_{-\nu-n-1}(z)-\mathrm{N}'_{\nu+n}(z)\mathrm{N}_{-\nu-n-1}(z)\Big]$$

$$+\Big[\mathrm{N}_{\nu}(z)\mathrm{N}'_{1-\nu}(z)-\mathrm{N}'_{\nu}(z)\mathrm{N}_{1-\nu}(z)+\mathrm{N}_{\nu-1}(z)\mathrm{N}'_{-\nu}(z)-\mathrm{N}'_{\nu-1}(z)\mathrm{N}_{\nu}(z)\Big]\bigg\}, \tag{15.44}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\Big[\mathrm{N}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{N}'_{-\nu-k}(\zeta)+\mathrm{N}'_{\nu+k}(z)\,\mathrm{N}_{-\nu-k}(\zeta)\Big]$$

$$=\frac{1}{2}\bigg\{(-1)^{n+1}\Big[\mathrm{N}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{N}_{-\nu-n}(\zeta)-\mathrm{N}_{\nu+n}(z)\mathrm{N}_{-\nu-n-1}(\zeta)\Big]$$

$$-\Big[\mathrm{N}_{\nu}(z)\mathrm{N}_{1-\nu}(\zeta)-\mathrm{N}_{\nu-1}(z)\mathrm{N}_{-\nu}(\zeta)\Big]\bigg\}, \tag{15.45}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\Big[\mathrm{N}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{N}'_{-\nu-k}(z)+\mathrm{N}'_{\nu+k}(z)\,\mathrm{N}_{-\nu-k}(z)\Big]$$

$$=\frac{1}{2}\bigg\{(-1)^{n+1}\Big[\mathrm{N}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{N}_{-\nu-n}(z)-\mathrm{N}_{\nu+n}(z)\mathrm{N}_{-\nu-n-1}(z)\Big]$$

$$-\Big[\mathrm{N}_{\nu}(z)\mathrm{N}_{1-\nu}(z)-\mathrm{N}_{\nu-1}(z)\mathrm{N}_{-\nu}(z)\Big]\bigg\} \tag{15.46a}$$

$$=(-1)^{n+1}\mathrm{N}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{N}_{-\nu-n}(z)-\mathrm{N}_{\nu}(z)\mathrm{N}_{1-\nu}(z) \tag{15.46b}$$

$$=(-1)^{n}\mathrm{N}_{\nu+n}(z)\mathrm{N}_{-\nu-n-1}(z)+\mathrm{N}_{\nu-1}(z)\mathrm{N}_{-\nu}(z), \tag{15.46c}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\Big[\mathrm{N}_{-\nu-k}(z)\mathrm{N}'_{-\nu-k}(\zeta)+\mathrm{N}'_{-\nu-k}(z)\mathrm{N}_{-\nu-k}(\zeta)\Big]$$

$$=\frac{1}{2}\bigg\{\Big[\mathrm{N}_{-\nu-n-1}(z)\mathrm{N}_{-\nu-n}(\zeta)+\mathrm{N}_{-\nu-n}(z)\mathrm{N}_{-\nu-n-1}(\zeta)\Big]$$

$$-\Big[\mathrm{N}_{-\nu}(z)\mathrm{N}_{1-\nu}(\zeta)+\mathrm{N}_{1-\nu}(z)\mathrm{N}_{-\nu}(\zeta)\Big]\Big\},\tag{15.47}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\mathrm{N}_{-\nu-k}(z)\mathrm{N}'_{-\nu-k}(z)=\frac{1}{2}\Big[\mathrm{N}_{-\nu-n-1}(z)\mathrm{N}_{-\nu-n}(z)-\mathrm{N}_{-\nu}(z)\mathrm{N}_{1-\nu}(z)\Big],\tag{15.48}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\Big[\mathrm{N}'_{-\nu-k}(z)\,\mathrm{N}_{-\nu-k}(\zeta)-\mathrm{N}_{-\nu-k}(z)\,\mathrm{N}'_{-\nu-k}(\zeta)\Big]\\&\quad=\frac{1}{2}\Big\{(-1)^n\Big[\mathrm{N}_{-\nu-n-1}(z)\,\mathrm{N}_{-\nu-n}(\zeta)-\mathrm{N}_{-\nu-n}(z)\,\mathrm{N}_{-\nu-n-1}(\zeta)\Big]\\&\qquad+\Big[\mathrm{N}_{-\nu}(z)\,\mathrm{N}_{1-\nu}(\zeta)-\mathrm{N}_{1-\nu}(z)\,\mathrm{N}_{-\nu}(\zeta)\Big]\Big\},\end{aligned}\tag{15.49}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\Big\{z^2\mathrm{N}'^2_{-\nu-k}(z)+\Big[z^2-(\nu+k)^2\Big]\mathrm{N}^2_{-\nu-k}(z)+z\,\mathrm{N}_{-\nu-k}(z)\,\mathrm{N}'_{-\nu-k}(z)\Big\}\\&\quad=\frac{z^2}{2}\Big\{(-1)^n\Big[\mathrm{N}_{-\nu-n-1}(z)\,\mathrm{N}'_{-\nu-n}(z)-\mathrm{N}'_{-\nu-n-1}(z)\,\mathrm{N}_{-\nu-n}(z)\Big]\\&\qquad+\Big[\mathrm{N}_{-\nu}(z)\,\mathrm{N}'_{1-\nu}(z)-\mathrm{N}'_{-\nu}(z)\,\mathrm{N}_{1-\nu}(z)\Big]\Big\}.\end{aligned}\tag{15.50}$$

将以上求和公式加以组合，还可以得到 Bessel 函数与 Neumann 函数之间的混合型求和公式，当然也可以导出涉及 Hankel 函数的求和公式.

另一方面，如果将上面得到的求和公式看成相应无穷级数的部分和，于是，在级数收敛的条件下，自然就可以令 $n\to\infty$，从而求得无穷级数的和函数. 这时需要用到具体柱函数 $C_\nu(z)$ 在阶 $\nu\to\infty$ 时的渐近行为. 至少在 ν 为正实数 (而 z 固定) 的条件下，有[①]

$$\mathrm{J}_\nu(z)\sim\frac{1}{\sqrt{2\pi\nu}}\Big(\frac{\mathrm{e}z}{2\nu}\Big)^{\nu},\qquad \mathrm{N}_\nu(z)\sim-\sqrt{\frac{2}{\pi\nu}}\Big(\frac{\mathrm{e}z}{2\nu}\Big)^{-\nu}.\tag{15.51}$$

因此，至少在 ν 为实数的条件下，有下列结果：

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\nu+k)\,\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{J}_{\nu+k}(\zeta)=\frac{1}{2}\Big[\mathrm{J}_\nu(z)\,\mathrm{J}_{\nu-1}(\zeta)-\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{J}_\nu(\zeta)\Big],\tag{15.52}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\nu+k)\,\mathrm{J}^2_{\nu+k}(z)=-\frac{z^2}{2}\Big[\mathrm{J}_\nu(z)\,\mathrm{J}'_{\nu-1}(z)-\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{J}'_\nu(z)\Big],\tag{15.53}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\nu+k)\,\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{J}_{\nu+k}(\zeta)=\frac{1}{2}\Big[\mathrm{J}_\nu(z)\,\mathrm{J}_{\nu-1}(\zeta)+\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{J}_\nu(\zeta)\Big],\tag{15.54}$$

① 见文献：M. Abramowitz, I. A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables.* Washington D C: U. S. National Bureau of Standards, 1965: 365.

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\nu+k)\,\mathrm{J}_{\nu+k}^2(z)=\frac{z}{2}\mathrm{J}_\nu(z)\,\mathrm{J}_{\nu-1}(z), \tag{15.55}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\Big[\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{J}'_{\nu+k}(\zeta)+\mathrm{J}'_{\nu+k}(z)\,\mathrm{J}'_{\nu+k}(\zeta)\Big]=\frac{1}{2}\Big[\mathrm{J}_\nu(z)\,\mathrm{J}_{\nu-1}(\zeta)+\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{J}_\nu(\zeta)\Big], \tag{15.56}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{J}'_{\nu+k}(z)=\mathrm{J}_\nu(z)\,\mathrm{J}_{\nu-1}(z), \tag{15.57}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\Big[\mathrm{J}'_{\nu+k}(z)\,\mathrm{J}_{\nu+k}(\zeta)-\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{J}'_{\nu+k}(\zeta)\Big]\\&\qquad=-\frac{1}{2}\Big[\mathrm{J}_\nu(z)\,\mathrm{J}_{\nu-1}(\zeta)-\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{J}_\nu(\zeta)\Big],\end{aligned} \tag{15.58}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\Big\{z^2\mathrm{J}'^2_{\nu+k}(z)+\Big[z^2-(\nu+k)^2\Big]\mathrm{J}_{\nu+k}^2(z)+z\,\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{J}'_{\nu+k}(z)\Big\}\\&\qquad=-\frac{z^2}{2}\Big[\mathrm{J}_\nu(z)\,\mathrm{J}'_{\nu-1}(z)-\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{J}'_\nu(z)\Big].\end{aligned} \tag{15.59}$$

至少当 ν 为实数时，在 $|z|<|\zeta|$ 的条件下还有下列求和公式：

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\nu+k)\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{J}_{-\nu-k}(\zeta)=-\frac{1}{2}\frac{z\zeta}{\zeta+z}\Big[\mathrm{J}_\nu(z)\,\mathrm{J}_{1-\nu}(\zeta)-\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{J}_{-\nu}(\zeta)\Big], \tag{15.60}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\nu+k)\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{J}_{-\nu-k}(\zeta)=\frac{1}{2}\frac{z\zeta}{\zeta-z}\Big[\mathrm{J}_\nu(z)\,\mathrm{J}_{1-\nu}(\zeta)+\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{J}_{-\nu}(\zeta)\Big], \tag{15.61}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{\infty}\Big[\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{J}'_{-\nu-k}(\zeta)-\mathrm{J}'_{\nu+k}(z)\,\mathrm{J}_{-\nu-k}(\zeta)\Big]\\&\qquad=-\frac{1}{2}\Big[\mathrm{J}_\nu(z)\mathrm{J}_{1-\nu}(\zeta)+\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\mathrm{J}_{-\nu}(\zeta)\Big],\end{aligned} \tag{15.62}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\Big[\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{J}'_{-\nu-k}(\zeta)+\mathrm{J}'_{\nu+k}(z)\,\mathrm{J}_{-\nu-k}(\zeta)\Big]\\&\qquad=-\frac{1}{2}\Big[\mathrm{J}_\nu(z)\mathrm{J}_{1-\nu}(\zeta)-\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\mathrm{J}_{-\nu}(\zeta)\Big].\end{aligned} \tag{15.63}$$

由柱函数的递推关系 (15.26)，还可以演绎出新的递推关系．例如，可以将它们组合成为

$$2\nu\Big[\frac{1}{z}\,\mathscr{C}_\nu(z)-\,\mathscr{C}'_\nu(z)\Big]=(\nu+1)\,\mathscr{C}_{\nu+1}(z)-(\nu-1)\,\mathscr{C}_{\nu-1}(z),$$

或者写成

$$2\nu^2\left[\frac{1}{z}\,\mathscr{C}_\nu(z) - \mathscr{C}_\nu'(z)\right] = \nu(\nu+1)\,\mathscr{C}_{\nu+1}(z) - \nu(\nu-1)\,\mathscr{C}_{\nu-1}(z). \tag{15.64}$$

从此式出发，重复前面的步骤，就可以得到下面的一系列求和公式：

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n}(\nu+k)^2\left\{\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{J}_{\nu+k}(\zeta) - \frac{z\zeta}{\zeta+z}\left[\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{J}'_{\nu+k}(\zeta) + \mathrm{J}'_{\nu+k}(z)\mathrm{J}_{\nu+k}(\zeta)\right]\right\}\\ &\quad= \frac{1}{2}\frac{z\zeta}{\zeta+z}\left\{(\nu+n+1)(\nu+n)\left[\mathrm{J}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{J}_{\nu+n}(\zeta) + \mathrm{J}_{\nu+n}(z)\mathrm{J}_{\nu+n+1}(\zeta)\right]\right.\\ &\qquad\left. - \nu(\nu-1)\left[\mathrm{J}_\nu(z)\mathrm{J}_{\nu-1}(\zeta) + \mathrm{J}_{\nu-1}(z)\mathrm{J}_\nu(\zeta)\right]\right\},\end{aligned} \tag{15.65}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n}(\nu+k)^2\left[\mathrm{J}^2_{\nu+k}(z) - z\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{J}'_{\nu+k}(z)\right]\\ &\quad= \frac{z}{2}\left[(\nu+n+1)(\nu+n)\mathrm{J}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{J}_{\nu+n}(z) - \nu(\nu-1)\mathrm{J}_\nu(z)\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\right],\end{aligned} \tag{15.66}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\nu+k)^2\left\{\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{J}_{\nu+k}(\zeta) + \frac{z\zeta}{\zeta-z}\left[\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{J}'_{\nu+k}(\zeta) - \mathrm{J}'_{\nu+k}(z)\mathrm{J}_{\nu+k}(\zeta)\right]\right\}\\ &\quad= \frac{1}{2}\frac{z\zeta}{\zeta-z}\left\{(-1)^n(\nu+n+1)(\nu+n)\left[\mathrm{J}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{J}_{\nu+n}(\zeta) - \mathrm{J}_{\nu+n}(z)\mathrm{J}_{\nu+n+1}(\zeta)\right]\right.\\ &\qquad\left. + \nu(\nu-1)\left[\mathrm{J}_\nu(z)\mathrm{J}_{\nu-1}(\zeta) - \mathrm{J}_{\nu-1}(z)\mathrm{J}_\nu(\zeta)\right]\right\},\end{aligned} \tag{15.67}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\nu+k)^2\left\{\left[1+(\nu+k)^2-z^2\right]\mathrm{J}^2_{\nu+k}(z) - z\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{J}'_{\nu+k}(z) - z^2\mathrm{J}'^2_{\nu+k}(z)\right\}\\ &\quad= \frac{z^2}{2}\left\{(-1)^n(\nu+n+1)(\nu+n)\left[\mathrm{J}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{J}'_{\nu+n}(z) - \mathrm{J}_{\nu+n}(z)\mathrm{J}'_{\nu+n+1}(z)\right]\right.\\ &\qquad\left. + \nu(\nu-1)\left[\mathrm{J}_\nu(z)\mathrm{J}'_{\nu-1}(z) - \mathrm{J}_{\nu-1}(z)\mathrm{J}'_\nu(z)\right]\right\},\end{aligned} \tag{15.68}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n}(\nu+k)^2\left\{\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{J}_{-\nu-k}(\zeta) + \frac{z\zeta}{\zeta-z}\left[\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{J}'_{-\nu-k}(\zeta) - \mathrm{J}'_{\nu+k}(z)\mathrm{J}_{-\nu-k}(\zeta)\right]\right\}\\ &\quad= \frac{1}{2}\frac{z\zeta}{\zeta-z}\left\{(\nu+n+1)(\nu+n)\left[\mathrm{J}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{J}_{-\nu-n}(\zeta) + \mathrm{J}_{\nu+n}(z)\mathrm{J}_{-\nu-n-1}(\zeta)\right]\right.\\ &\qquad\left. - \nu(\nu-1)\left[\mathrm{J}_\nu(z)\mathrm{J}_{1-\nu}(\zeta) + \mathrm{J}_{\nu-1}(z)\mathrm{J}_{-\nu}(\zeta)\right]\right\},\end{aligned} \tag{15.69}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n}(\nu+k)^2\left\{\left[1+(\nu+k)^2-z^2\right]\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)\right.\\ &\qquad\left. - \frac{z}{2}\left[\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{J}'_{-\nu-k}(z) + \mathrm{J}'_{\nu+k}(z)\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)\right] - z^2\mathrm{J}'_{\nu+k}(z)\mathrm{J}'_{-\nu-k}(z)\right\}\\ &\quad= \frac{z^2}{4}\left\{(\nu+n+1)(\nu+n)\left[\mathrm{J}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{J}'_{-\nu-n}(z) + \mathrm{J}_{\nu+n}(z)\mathrm{J}'_{-\nu-n-1}(z)\right.\right.\end{aligned}$$

$$- J'_{\nu+n+1}(z)J_{-\nu-n}(z) - J_{-\nu-n-1}(z)J'_{\nu+n}(z)\Big]$$

$$- \nu(\nu-1)\Big[J_{\nu}(z)J'_{1-\nu}(z)+J'_{\nu}(z)J_{1-\nu}(z)-J'_{-\nu}(z)J_{\nu-1}(z)-J_{-\nu}(z)J'_{\nu-1}(z)\Big]\Big\},\tag{15.70}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\nu+k)^2\Big\{J_{\nu+k}(z)J_{-\nu-k}(\zeta)-\frac{z\zeta}{\zeta+z}\Big[J_{\nu+k}(z)J'_{-\nu-k}(\zeta)+J'_{\nu+k}(z)J_{-\nu-k}(\zeta)\Big]\Big\}$$
$$=\frac{1}{2}\frac{z\zeta}{\zeta+z}\Big\{(-1)^n(\nu+n+1)(\nu+n)\Big[J_{\nu+n+1}(z)J_{-\nu-n}(\zeta)-J_{\nu+n}(z)J_{-\nu-n-1}(\zeta)\Big]$$
$$+\nu(\nu-1)\Big[J_{\nu}(z)J_{1-\nu}(\zeta)+J_{\nu-1}(z)J_{-\nu}(\zeta)\Big]\Big\},\tag{15.71}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\nu+k)^2\Big\{J_{\nu+k}(z)J_{-\nu-k}(z)-\frac{z}{2}\Big[J_{\nu+k}(z)J'_{-\nu-k}(z)+J'_{\nu+k}(z)J_{-\nu-k}(z)\Big]\Big\}$$
$$=\frac{z}{4}\Big\{(-1)^n(\nu+n+1)(\nu+n)\Big[J_{\nu+n+1}(z)J_{-\nu-n}(z)-J_{\nu+n}(z)J_{-\nu-n-1}(z)\Big]$$
$$+\nu(\nu-1)\Big[J_{\nu}(z)J_{1-\nu}(z)-J_{\nu-1}(z)J_{-\nu}(z)\Big]\Big\},\tag{15.72}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(\nu+k)^2\Big\{J_{-\nu-k}(z)J_{-\nu-k}(\zeta)-\frac{z\zeta}{\zeta+z}\Big[J_{-\nu-k}(z)J'_{-\nu-k}(\zeta)+J'_{-\nu-k}(z)J_{-\nu-k}(\zeta)\Big]\Big\}$$
$$=\frac{1}{2}\frac{z\zeta}{\zeta+z}\Big\{-(\nu+n+1)(\nu+n)\Big[J_{-\nu-n-1}(z)J_{-\nu-n}(\zeta)+J_{-\nu-n}(z)J_{-\nu-n-1}(\zeta)\Big]$$
$$+\nu(\nu-1)\Big[J_{-\nu}(z)J_{1-\nu}(\zeta)+J_{1-\nu}(z)J_{-\nu}(\zeta)\Big]\Big\},\tag{15.73}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(\nu+k)^2\Big[J^2_{-\nu-k}(z)-zJ_{-\nu-k}(z)J'_{-\nu-k}(z)\Big]$$
$$=\frac{z}{2}\Big[-(\nu+n+1)(\nu+n)J_{-\nu-n-1}(z)J_{-\nu-n}(z)+\nu(\nu-1)J_{-\nu}(z)J_{1-\nu}(z)\Big],\tag{15.74}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\nu+k)^2\Big\{J_{-\nu-k}(z)J_{-\nu-k}(\zeta)$$
$$+\frac{z\zeta}{\zeta-z}\Big[J_{-\nu-k}(z)J'_{-\nu-k}(\zeta)-J'_{-\nu-k}(z)J_{-\nu-k}(\zeta)\Big]\Big\}$$
$$=\frac{1}{2}\frac{z\zeta}{\zeta-z}\Big\{(-1)^{n+1}(\nu+n+1)(\nu+n)$$
$$\times\Big[J_{-\nu-n-1}(z)J_{-\nu-n}(\zeta)-J_{-\nu-n}(z)J_{-\nu-n-1}(\zeta)\Big]$$
$$-\nu(\nu-1)\Big[J_{-\nu}(z)J_{1-\nu}(\zeta)-J_{1-\nu}(z)J_{-\nu}(\zeta)\Big]\Big\},\tag{15.75}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\nu+k)^2\Big\{\Big[1+(\nu+k)^2-z^2\Big]\mathrm{J}_{-\nu-k}^2(z)-z\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)\mathrm{J}'_{-\nu-k}(z)-z^2\mathrm{J}'^2_{-\nu-k}(z)\Big]\Big\}$$

$$=\frac{z^2}{2}\Big\{(-1)^n(\nu+n+1)(\nu+n)\Big[\mathrm{J}'_{-\nu-n-1}(z)\mathrm{J}_{-\nu-n}(z)-\mathrm{J}_{-\nu-n-1}(z)\mathrm{J}'_{-\nu-n}(z)\Big]$$

$$+\nu(\nu-1)\Big[\mathrm{J}'_{-\nu}(z)\mathrm{J}_{1-\nu}(z)-\mathrm{J}_{-\nu}(z)\mathrm{J}'_{1-\nu}(z)\Big]\Big\}, \tag{15.76}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(\nu+k)^2\Big\{\mathrm{N}_{\nu+k}(z)\mathrm{N}_{\nu+k}(\zeta)-\frac{z\zeta}{\zeta+z}\Big[\mathrm{N}_{\nu+k}(z)\mathrm{N}'_{\nu+k}(\zeta)+\mathrm{N}'_{\nu+k}(z)\mathrm{N}_{\nu+k}(\zeta)\Big]\Big\}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{z\zeta}{\zeta+z}\Big\{(\nu+n+1)(\nu+n)\Big[\mathrm{N}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{N}_{\nu+n}(\zeta)+\mathrm{N}_{\nu+n}(z)\mathrm{N}_{\nu+n+1}(\zeta)\Big]$$

$$-\nu(\nu-1)\Big[\mathrm{N}_{\nu}(z)\mathrm{N}_{\nu-1}(\zeta)+\mathrm{N}_{\nu-1}(z)\mathrm{N}_{\nu}(\zeta)\Big]\Big\}, \tag{15.77}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(\nu+k)^2\Big\{\mathrm{N}^2_{\nu+k}(z)-z\mathrm{N}_{\nu+k}(z)\mathrm{N}'_{\nu+k}(z)\Big\}$$

$$=\frac{z}{2}\Big\{(\nu+n+1)(\nu+n)\mathrm{N}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{N}_{\nu+n}(z)-\nu(\nu-1)\mathrm{N}_{\nu}(z)\mathrm{N}_{\nu-1}(z)\Big\}, \tag{15.78}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\nu+k)^2\Big\{\mathrm{N}_{\nu+k}(z)\mathrm{N}_{\nu+k}(\zeta)+\frac{z\zeta}{\zeta-z}\Big[\mathrm{N}_{\nu+k}(z)\mathrm{N}'_{\nu+k}(\zeta)-\mathrm{N}'_{\nu+k}(z)\mathrm{N}_{\nu+k}(\zeta)\Big]\Big\}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{z\zeta}{\zeta-z}\Big\{(-1)^n(\nu+n+1)(\nu+n)\Big[\mathrm{N}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{N}_{\nu+n}(\zeta)-\mathrm{N}_{\nu+n}(z)\mathrm{N}_{\nu+n+1}(\zeta)\Big]$$

$$+\nu(\nu-1)\Big[\mathrm{N}_{\nu}(z)\mathrm{N}_{\nu-1}(\zeta)-\mathrm{N}_{\nu-1}(z)\mathrm{N}_{\nu}(\zeta)\Big]\Big\}, \tag{15.79}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\nu+k)^2\Big\{\Big[1+(\nu+k)^2-z^2\Big]\mathrm{N}^2_{\nu+k}(z)-z\mathrm{N}_{\nu+k}(z)\mathrm{N}'_{\nu+k}(z)-z^2\mathrm{N}'^2_{\nu+k}(z)\Big]\Big\}$$

$$=\frac{z^2}{2}\Big\{(-1)^n(\nu+n+1)(\nu+n)\Big[\mathrm{N}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{N}'_{\nu+n}(z)-\mathrm{N}_{\nu+n}(z)\mathrm{N}'_{\nu+n+1}(z)\Big]$$

$$+\nu(\nu-1)\Big[\mathrm{N}_{\nu}(z)\mathrm{N}'_{\nu-1}(z)-\mathrm{N}_{\nu-1}(z)\mathrm{N}'_{\nu}(z)\Big]\Big\}, \tag{15.80}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(\nu+k)^2\Big\{\mathrm{N}_{\nu+k}(z)\mathrm{N}_{-\nu-k}(\zeta)+\frac{z\zeta}{\zeta-z}\Big[\mathrm{N}_{\nu+k}(z)\mathrm{N}'_{-\nu-k}(\zeta)-\mathrm{N}'_{\nu+k}(z)\mathrm{N}_{-\nu-k}(\zeta)\Big]\Big\}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{z\zeta}{\zeta-z}\Big\{(\nu+n+1)(\nu+n)\Big[\mathrm{N}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{N}_{-\nu-n}(\zeta)+\mathrm{N}_{\nu+n}(z)\mathrm{N}_{-\nu-n-1}(\zeta)\Big]$$

$$-\nu(\nu-1)\Big[\mathrm{N}_{\nu}(z)\mathrm{N}_{1-\nu}(\zeta)+\mathrm{N}_{\nu-1}(z)\mathrm{N}_{-\nu}(\zeta)\Big]\Big\}, \tag{15.81}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(\nu+k)^2\Big\{\Big[1+(\nu+k)^2-z^2\Big]\mathrm{N}_{\nu+k}(z)\mathrm{N}_{-\nu-k}(z)$$

$$- \frac{z}{2}\Big[N_{\nu+k}(z)N'_{-\nu-k}(z) + N'_{\nu+k}(z)N_{-\nu-k}(z)\Big] - z^2N'_{\nu+k}(z)N'_{-\nu-k}(z)\Big\}$$

$$= \frac{z^2}{4}\Big\{(\nu+n+1)(\nu+n)\Big[N_{\nu+n+1}(z)N'_{-\nu-n}(z) + N_{\nu+n}(z)N'_{-\nu-n-1}(z)$$

$$- N'_{\nu+n+1}(z)N_{-\nu-n}(z) - N_{-\nu-n-1}(z)N'_{\nu+n}(z)\Big]$$

$$- \nu(\nu-1)\Big[N_{\nu}(z)N'_{1-\nu}(z) + N'_{\nu}(z)N_{1-\nu}(z)$$

$$- N'_{-\nu}(z)N_{\nu-1}(z) - N_{-\nu}(z)N'_{\nu-1}(z)\Big]\Big\}, \tag{15.82}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\nu+k)^2\Big\{N_{\nu+k}(z)N_{-\nu-k}(\zeta)$$

$$- \frac{z\zeta}{\zeta+z}\Big[N_{\nu+k}(z)N'_{-\nu-k}(\zeta) + N'_{\nu+k}(z)N_{-\nu-k}(\zeta)\Big]\Big\}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{z\zeta}{\zeta+z}\Big\{(-1)^n(\nu+n+1)(\nu+n)\Big[N_{\nu+n+1}(z)N_{-\nu-n}(\zeta) - N_{\nu+n}(z)N_{-\nu-n-1}(\zeta)\Big]$$

$$+ \nu(\nu-1)\Big[N_{\nu}(z)N_{1-\nu}(\zeta) + N_{\nu-1}(z)N_{-\nu}(\zeta)\Big]\Big\}, \tag{15.83}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\nu+k)^2\Big\{N_{\nu+k}(z)N_{-\nu-k}(z) - \frac{z}{2}\Big[N_{\nu+k}(z)N'_{-\nu-k}(z) + N'_{\nu+k}(z)N_{-\nu-k}(z)\Big]\Big\}$$

$$= \frac{z}{4}\Big\{(-1)^n(\nu+n+1)(\nu+n)\Big[N_{\nu+n+1}(z)N_{-\nu-n}(z) - N_{\nu+n}(z)N_{-\nu-n-1}(z)\Big]$$

$$+ \nu(\nu-1)\Big[N_{\nu}(z)N_{1-\nu}(z) - N_{\nu-1}(z)N_{-\nu}(z)\Big]\Big\}, \tag{15.84}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(\nu+k)^2\Big\{N_{-\nu-k}(z)N_{-\nu-k}(\zeta)$$

$$- \frac{z\zeta}{\zeta+z}\Big[N_{-\nu-k}(z)N'_{-\nu-k}(\zeta) + N'_{-\nu-k}(z)N_{-\nu-k}(\zeta)\Big]\Big\}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{z\zeta}{\zeta+z}\Big\{-(\nu+n+1)(\nu+n)\Big[N_{-\nu-n-1}(z)N_{-\nu-n}(\zeta) + N_{-\nu-n}(z)N_{-\nu-n-1}(\zeta)\Big]$$

$$+ \nu(\nu-1)\Big[N_{-\nu}(z)N_{1-\nu}(\zeta) + N_{1-\nu}(z)N_{-\nu}(\zeta)\Big]\Big\}, \tag{15.85}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(\nu+k)^2\Big[N^2_{-\nu-k}(z) - zN_{-\nu-k}(z)N'_{-\nu-k}(z)\Big]$$

$$= \frac{z}{2}\Big[-(\nu+n+1)(\nu+n)N_{-\nu-n-1}(z)N_{-\nu-n}(z) + \nu(\nu-1)N_{-\nu}(z)N_{1-\nu}(z)\Big], \tag{15.86}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}&(-1)^k(\nu+k)^2\Big\{\mathrm{N}_{-\nu-k}(z)\mathrm{N}_{-\nu-k}(\zeta)\\&+\frac{z\zeta}{\zeta-z}\Big[\mathrm{N}_{-\nu-k}(z)\mathrm{N}'_{-\nu-k}(\zeta)-\mathrm{N}'_{-\nu-k}(z)\mathrm{N}_{-\nu-k}(\zeta)\Big]\Big\}\\&=\frac{1}{2}\frac{z\zeta}{\zeta-z}\Big\{(-1)^{n+1}(\nu+n+1)(\nu+n)\\&\quad\times\Big[\mathrm{N}_{-\nu-n-1}(z)\mathrm{N}_{-\nu-n}(\zeta)-\mathrm{N}_{-\nu-n}(z)\mathrm{N}_{-\nu-n-1}(\zeta)\Big]\\&\quad-\nu(\nu-1)\Big[\mathrm{N}_{-\nu}(z)\mathrm{N}_{1-\nu}(\zeta)-\mathrm{N}_{1-\nu}(z)\mathrm{N}_{-\nu}(\zeta)\Big]\Big\},\end{aligned}\tag{15.87}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}&(-1)^k(\nu+k)^2\Big\{\Big[1+(\nu+k)^2-z^2\Big]\mathrm{N}^2_{-\nu-k}(z)-z\mathrm{N}_{-\nu-k}(z)\mathrm{N}'_{-\nu-k}(z)-z^2\mathrm{N}'^2_{-\nu-k}(z)\Big\}\\&=\frac{z^2}{2}\Big\{(-1)^n(\nu+n+1)(\nu+n)\Big[\mathrm{N}'_{-\nu-n-1}(z)\mathrm{N}_{-\nu-n}(z)-\mathrm{N}_{-\nu-n-1}(z)\mathrm{N}'_{-\nu-n}(z)\Big]\\&\quad+\nu(\nu-1)\Big[\mathrm{N}'_{-\nu}(z)\mathrm{N}_{1-\nu}(z)-\mathrm{N}_{-\nu}(z)\mathrm{N}'_{1-\nu}(z)\Big]\Big\}.\end{aligned}\tag{15.88}$$

至少当 ν 为实数时，以上的 (15.65) — (15.68) 式中可以取 $n\to\infty$，所得结果如下：

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}&(\nu+k)^2\Big\{\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{J}_{\nu+k}(\zeta)-\frac{z\zeta}{\zeta+z}\Big[\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{J}'_{\nu+k}(\zeta)+\mathrm{J}'_{\nu+k}(z)\mathrm{J}_{\nu+k}(\zeta)\Big]\Big\}\\&=-\frac{\nu(\nu-1)}{2}\frac{z\zeta}{\zeta+z}\Big[\mathrm{J}_{\nu}(z)\mathrm{J}_{\nu-1}(\zeta)+\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\mathrm{J}_{\nu}(\zeta)\Big],\end{aligned}\tag{15.89}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\nu+k)^2\Big[\mathrm{J}^2_{\nu+k}(z)-z\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{J}'_{\nu+k}(z)\Big]=-\frac{\nu(\nu-1)}{2}z\mathrm{J}_{\nu}(z)\mathrm{J}_{\nu-1}(z),\tag{15.90}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}&(-1)^k(\nu+k)^2\Big\{\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{J}_{\nu+k}(\zeta)+\frac{z\zeta}{\zeta-z}\Big[\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{J}'_{\nu+k}(\zeta)-\mathrm{J}'_{\nu+k}(z)\mathrm{J}_{\nu+k}(\zeta)\Big]\Big\}\\&=\frac{\nu(\nu-1)}{2}\frac{z\zeta}{\zeta-z}\Big[\mathrm{J}_{\nu}(z)\mathrm{J}_{\nu-1}(\zeta)-\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\mathrm{J}_{\nu}(\zeta)\Big],\end{aligned}\tag{15.91}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}&(-1)^k(\nu+k)^2\Big\{\Big[1+(\nu+k)^2-z^2\Big]\mathrm{J}^2_{\nu+k}(z)-z\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{J}'_{\nu+k}(z)-z^2\mathrm{J}'^2_{\nu+k}(z)\Big]\Big\}\\&=\frac{\nu(\nu-1)}{2}z^2\Big[\mathrm{J}_{\nu}(z)\mathrm{J}'_{\nu-1}(z)-\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\mathrm{J}'_{\nu}(z)\Big].\end{aligned}\tag{15.92}$$

在 ν 为实数及 $|z|<|\zeta|$ 的条件下，也可以将 (15.69) 与 (15.71) 两式过渡到 $n\to\infty$，从而得到

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\nu+k)^2\Big\{\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{J}_{-\nu-k}(\zeta)+\frac{z\zeta}{\zeta-z}\Big[\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{J}'_{-\nu-k}(\zeta)-\mathrm{J}'_{\nu+k}(z)\mathrm{J}_{-\nu-k}(\zeta)\Big]\Big\}$$

$$= -\frac{\nu(\nu-1)}{2}\frac{z\zeta}{\zeta-z}\Big[\mathrm{J}_\nu(z)\mathrm{J}_{1-\nu}(\zeta)+\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\mathrm{J}_{-\nu}(\zeta)\Big], \tag{15.93}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\nu+k)^2\left\{\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{J}_{-\nu-k}(\zeta)-\frac{z\zeta}{\zeta+z}\Big[\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{J}'_{-\nu-k}(\zeta)+\mathrm{J}'_{\nu+k}(z)\mathrm{J}_{-\nu-k}(\zeta)\Big]\right\}$$
$$= \frac{\nu(\nu-1)}{2}\frac{z\zeta}{\zeta+z}\Big[\mathrm{J}_\nu(z)\mathrm{J}_{1-\nu}(\zeta)+\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\mathrm{J}_{-\nu}(\zeta)\Big]. \tag{15.94}$$

类似地，也能将柱函数的递推关系 (15.26) 重新组合成

$$2\nu\Big[\frac{1}{z}\,\mathscr{C}_\nu(z)+\,\mathscr{C}'_\nu(z)\Big]=-(\nu-1)\,\mathscr{C}_{\nu+1}(z)+(1+\nu)\,\mathscr{C}_{\nu-1}(z),$$

或者写成

$$\frac{2}{(\nu-1)(\nu+1)}\Big[\frac{1}{z}\,\mathscr{C}_\nu(z)+\,\mathscr{C}'_\nu(z)\Big]=-\frac{1}{\nu(\nu+1)}\,\mathscr{C}_{\nu+1}(z)+\frac{1}{\nu(\nu-1)}\,\mathscr{C}_{\nu-1}(z). \tag{15.95}$$

由此出发，也可以得到一系列的求和公式. 限于篇幅，这里不再列出.

§15.2 柱函数的四次型求和公式

柱函数的特殊之处在于存在简单的平方型递推关系. 例如，将(15.26a) 式与 (15.26b) 式相乘，即得

$$\frac{4\nu}{z}\,\mathscr{C}_\nu(z)\,\mathscr{C}'_\nu(z)=-\,\mathscr{C}^2_{\nu+1}(z)+\,\mathscr{C}^2_{\nu-1}(z), \tag{15.96a}$$

同样，求此二式的平方和，又可得到

$$\frac{2\nu^2}{z^2}\,\mathscr{C}^2_\nu(z)+2\,\mathscr{C}'^2_\nu(z)=\,\mathscr{C}^2_{\nu+1}(z)+\,\mathscr{C}^2_{\nu-1}(z), \tag{15.96b}$$

而且，在这两个公式中代入 Hankel 函数，则还可以导出下列混合型的递推关系：

$$\frac{2\nu}{z}\Big[\mathrm{J}_\nu(z)\,\mathrm{N}'_\nu(z)+\mathrm{N}_\nu(z)\,\mathrm{J}'_\nu(z)\Big]=-\mathrm{J}_{\nu+1}(z)\mathrm{N}_{\nu+1}(z)+\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\mathrm{N}_{\nu-1}(z), \tag{15.96c}$$

$$\frac{2\nu^2}{z^2}\mathrm{J}_\nu(z)\mathrm{N}_\nu(z)+2\mathrm{J}'_\nu(z)\mathrm{N}'_\nu(z)=\mathrm{J}_{\nu+1}(z)\mathrm{N}_{\nu+1}(z)+\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\mathrm{N}_{\nu-1}(z). \tag{15.96d}$$

如果把上一节中得到的求和公式称为二次型的形式，则根据上面的递推关系 (15.96)，可就以导出四次型的求和公式.

由递推关系 (15.96a) 和 (15.96c) 出发，模仿二次型求和公式的推导方法，导出的四次型求和公式如下：

$$\sum_{k=0}^{n}(\nu+k)\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{J}_{\nu+k}(\zeta)\Big[\zeta\,\mathrm{J}'_{\nu+k}(z)\,\mathrm{J}_{\nu+k}(\zeta)+z\,\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{J}'_{\nu+k}(\zeta)\Big]$$
$$=\frac{z\zeta}{4}\bigg\{-\Big[\mathrm{J}^2_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{J}^2_{\nu+n}(\zeta)+\mathrm{J}^2_{\nu+n}(z)\,\mathrm{J}^2_{\nu+n+1}(\zeta)\Big]$$
$$+\Big[\mathrm{J}^2_{\nu}(z)\,\mathrm{J}^2_{\nu-1}(\zeta)+\mathrm{J}^2_{\nu-1}(z)\,\mathrm{J}^2_{\nu}(\zeta)\Big]\bigg\}, \tag{15.97}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\nu+k)\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{J}_{\nu+k}(\zeta)\Big[\zeta\,\mathrm{J}'_{\nu+k}(z)\,\mathrm{J}_{\nu+k}(\zeta)-z\,\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{J}'_{\nu+k}(\zeta)\Big]$$
$$=\frac{z\zeta}{4}\bigg\{(-1)^{n+1}\Big[\mathrm{J}^2_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{J}^2_{\nu+n}(\zeta)-\mathrm{J}^2_{\nu+n}(z)\,\mathrm{J}^2_{\nu+n+1}(\zeta)\Big]$$
$$-\Big[\mathrm{J}^2_{\nu}(z)\,\mathrm{J}^2_{\nu-1}(\zeta)-\mathrm{J}^2_{\nu-1}(z)\,\mathrm{J}^2_{\nu}(\zeta)\Big]\bigg\}, \tag{15.98}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(\nu+k)\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{J}_{-\nu-k}(\zeta)\Big[\zeta\,\mathrm{J}'_{\nu+k}(z)\,\mathrm{J}_{-\nu-k}(\zeta)+z\,\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{J}'_{-\nu-k}(\zeta)\Big]$$
$$=\frac{z\zeta}{4}\bigg\{-\Big[\mathrm{J}^2_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{J}^2_{-\nu-n}(\zeta)+\mathrm{J}^2_{\nu+n}(z)\,\mathrm{J}^2_{-\nu-n-1}(\zeta)\Big]$$
$$+\Big[\mathrm{J}^2_{\nu}(z)\,\mathrm{J}^2_{1-\nu}(\zeta)+\mathrm{J}^2_{\nu-1}(z)\,\mathrm{J}^2_{-\nu}(\zeta)\Big]\bigg\}, \tag{15.99}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\nu+k)\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{J}_{-\nu-k}(\zeta)\Big[\zeta\,\mathrm{J}'_{\nu+k}(z)\,\mathrm{J}_{-\nu-k}(\zeta)-z\,\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{J}'_{-\nu-k}(\zeta)\Big]$$
$$=\frac{z\zeta}{4}\bigg\{(-1)^{n+1}\Big[\mathrm{J}^2_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{J}^2_{-\nu-n}(\zeta)-\mathrm{J}^2_{\nu+n}(z)\,\mathrm{J}^2_{-\nu-n-1}(\zeta)\Big]$$
$$-\Big[\mathrm{J}^2_{\nu}(z)\,\mathrm{J}^2_{1-\nu}(\zeta)-\mathrm{J}^2_{\nu-1}(z)\,\mathrm{J}^2_{-\nu}(\zeta)\Big]\bigg\}, \tag{15.100}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(\nu+k)\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)\,\mathrm{J}_{-\nu-k}(\zeta)\Big[\zeta\,\mathrm{J}'_{-\nu-k}(z)\,\mathrm{J}_{-\nu-k}(\zeta)+z\,\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)\mathrm{J}'_{-\nu-k}(\zeta)\Big]$$
$$=\frac{z\zeta}{4}\bigg\{-\Big[\mathrm{J}^2_{-\nu-n-1}(z)\,\mathrm{J}^2_{-\nu-n}(\zeta)+\mathrm{J}^2_{-\nu-n}(z)\,\mathrm{J}^2_{-\nu-n-1}(\zeta)\Big]$$
$$+\Big[\mathrm{J}^2_{-\nu}(z)\,\mathrm{J}^2_{1-\nu}(\zeta)+\mathrm{J}^2_{1-\nu}(z)\,\mathrm{J}^2_{-\nu}(\zeta)\Big]\bigg\}, \tag{15.101}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\nu+k)\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)\,\mathrm{J}_{-\nu-k}(\zeta)\Big[\zeta\,\mathrm{J}'_{-\nu-k}(z)\,\mathrm{J}_{-\nu-k}(\zeta)-z\,\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)\mathrm{J}'_{-\nu-k}(\zeta)\Big]$$
$$=\frac{z\zeta}{4}\bigg\{(-1)^{n+1}\Big[\mathrm{J}^2_{-\nu-n-1}(z)\,\mathrm{J}^2_{-\nu-n}(\zeta)-\mathrm{J}^2_{-\nu-n}(z)\,\mathrm{J}^2_{-\nu-n-1}(\zeta)\Big]$$
$$-\Big[\mathrm{J}^2_{-\nu}(z)\,\mathrm{J}^2_{1-\nu}(\zeta)-\mathrm{J}^2_{1-\nu}(z)\,\mathrm{J}^2_{-\nu}(\zeta)\Big]\bigg\}, \tag{15.102}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(\nu+k)\mathrm{N}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{N}_{\nu+k}(\zeta)\Big[\zeta\,\mathrm{N}'_{\nu+k}(z)\,\mathrm{N}_{\nu+k}(\zeta)+z\,\mathrm{N}_{\nu+k}(z)\mathrm{N}'_{\nu+k}(\zeta)\Big]$$
$$=\frac{z\zeta}{4}\bigg\{-\Big[\mathrm{N}^2_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{N}^2_{\nu+n}(\zeta)+\mathrm{N}^2_{\nu+n}(z)\,\mathrm{N}^2_{\nu+n+1}(\zeta)\Big]$$
$$+\Big[\mathrm{N}^2_{\nu}(z)\,\mathrm{N}^2_{\nu-1}(\zeta)+\mathrm{N}^2_{\nu-1}(z)\,\mathrm{N}^2_{\nu}(\zeta)\Big]\bigg\}, \tag{15.103}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\nu+k)\mathrm{N}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{N}_{\nu+k}(\zeta)\Big[\zeta\,\mathrm{N}'_{\nu+k}(z)\,\mathrm{N}_{\nu+k}(\zeta)-z\,\mathrm{N}_{\nu+k}(z)\mathrm{N}'_{\nu+k}(\zeta)\Big]$$
$$=\frac{z\zeta}{4}\bigg\{(-1)^{n+1}\Big[\mathrm{N}^2_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{N}^2_{\nu+n}(\zeta)-\mathrm{N}^2_{\nu+n}(z)\,\mathrm{N}^2_{\nu+n+1}(\zeta)\Big]$$
$$-\Big[\mathrm{N}^2_{\nu}(z)\,\mathrm{N}^2_{\nu-1}(\zeta)-\mathrm{N}^2_{\nu-1}(z)\,\mathrm{N}^2_{\nu}(\zeta)\Big]\bigg\}, \tag{15.104}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(\nu+k)\mathrm{N}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{N}_{-\nu-k}(\zeta)\Big[\zeta\,\mathrm{N}'_{\nu+k}(z)\,\mathrm{N}_{-\nu-k}(\zeta)+z\,\mathrm{N}_{\nu+k}(z)\mathrm{N}'_{-\nu-k}(\zeta)\Big]$$
$$=\frac{z\zeta}{4}\bigg\{-\Big[\mathrm{N}^2_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{N}^2_{-\nu-n}(\zeta)+\mathrm{N}^2_{\nu+n}(z)\,\mathrm{N}^2_{-\nu-n-1}(\zeta)\Big]$$
$$+\Big[\mathrm{N}^2_{\nu}(z)\,\mathrm{N}^2_{1-\nu}(\zeta)+\mathrm{N}^2_{\nu-1}(z)\,\mathrm{N}^2_{-\nu}(\zeta)\Big]\bigg\}, \tag{15.105}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\nu+k)\mathrm{N}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{N}_{-\nu-k}(\zeta)\Big[\zeta\,\mathrm{N}'_{\nu+k}(z)\,\mathrm{N}_{-\nu-k}(\zeta)-z\,\mathrm{N}_{\nu+k}(z)\mathrm{N}'_{-\nu-k}(\zeta)\Big]$$
$$=\frac{z\zeta}{4}\bigg\{(-1)^{n+1}\Big[\mathrm{N}^2_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{N}^2_{-\nu-n}(\zeta)-\mathrm{N}^2_{\nu+n}(z)\,\mathrm{N}^2_{-\nu-n-1}(\zeta)\Big]$$
$$-\Big[\mathrm{N}^2_{\nu}(z)\,\mathrm{N}^2_{1-\nu}(\zeta)-\mathrm{N}^2_{\nu-1}(z)\,\mathrm{N}^2_{-\nu}(\zeta)\Big]\bigg\}, \tag{15.106}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(\nu+k)\mathrm{N}_{-\nu-k}(z)\,\mathrm{N}_{-\nu-k}(\zeta)\Big[\zeta\,\mathrm{N}'_{-\nu-k}(z)\,\mathrm{N}_{-\nu-k}(\zeta)+z\,\mathrm{N}_{-\nu-k}(z)\mathrm{N}'_{-\nu-k}(\zeta)\Big]$$
$$=\frac{z\zeta}{4}\bigg\{-\Big[\mathrm{N}^2_{-\nu-n-1}(z)\,\mathrm{N}^2_{-\nu-n}(\zeta)+\mathrm{N}^2_{-\nu-n}(z)\,\mathrm{N}^2_{-\nu-n-1}(\zeta)\Big]$$
$$+\Big[\mathrm{N}^2_{-\nu}(z)\,\mathrm{N}^2_{1-\nu}(\zeta)+\mathrm{N}^2_{1-\nu}(z)\,\mathrm{N}^2_{-\nu}(\zeta)\Big]\bigg\}, \tag{15.107}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\nu+k)\mathrm{N}_{-\nu-k}(z)\,\mathrm{N}_{-\nu-k}(\zeta)\Big[\zeta\,\mathrm{N}'_{-\nu-k}(z)\,\mathrm{N}_{-\nu-k}(\zeta)-z\,\mathrm{N}_{-\nu-k}(z)\mathrm{N}'_{-\nu-k}(\zeta)\Big]$$
$$=\frac{z\zeta}{4}\bigg\{(-1)^{n+1}\Big[\mathrm{N}^2_{-\nu-n-1}(z)\,\mathrm{N}^2_{-\nu-n}(\zeta)-\mathrm{N}^2_{-\nu-n}(z)\,\mathrm{N}^2_{-\nu-n-1}(\zeta)\Big]$$
$$-\Big[\mathrm{N}^2_{-\nu}(z)\,\mathrm{N}^2_{1-\nu}(\zeta)-\mathrm{N}^2_{1-\nu}(z)\,\mathrm{N}^2_{-\nu}(\zeta)\Big]\bigg\}, \tag{15.108}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(\nu+k)\Big\{\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{J}_{\nu+k}(\zeta)\Big[\zeta\mathrm{N}'_{\nu+k}(z)\mathrm{N}_{\nu+k}(\zeta)+z\mathrm{N}_{\nu+k}(z)\mathrm{N}'_{\nu+k}(\zeta)\Big]$$
$$+\mathrm{N}_{\nu+k}(z)\mathrm{N}_{\nu+k}(\zeta)\Big[\zeta\mathrm{J}'_{\nu+k}(z)\mathrm{J}_{\nu+k}(\zeta)+z\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{J}'_{\nu+k}(\zeta)\Big]\Big\}$$
$$=\frac{z\zeta}{2}\Big\{-\Big[\mathrm{J}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{N}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{J}_{\nu+n}(\zeta)\mathrm{N}_{\nu+n}(\zeta)$$
$$+\mathrm{J}_{\nu+n}(z)\mathrm{N}_{\nu+n}(z)\mathrm{J}_{\nu+n+1}(\zeta)\mathrm{N}_{\nu+n+1}(\zeta)\Big]$$
$$+\Big[\mathrm{J}_{\nu}(z)\mathrm{N}_{\nu}(z)\mathrm{J}_{\nu-1}(\zeta)\mathrm{N}_{\nu-1}(\zeta)+\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\mathrm{N}_{\nu-1}(z)\mathrm{J}_{\nu}(\zeta)\mathrm{N}_{\nu}(\zeta)\Big]\Big\}, \tag{15.109}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\nu+k)\Big\{\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{J}_{\nu+k}(\zeta)\Big[\zeta\mathrm{N}'_{\nu+k}(z)\mathrm{N}_{\nu+k}(\zeta)-z\mathrm{N}_{\nu+k}(z)\mathrm{N}'_{\nu+k}(\zeta)\Big]$$
$$+\mathrm{N}_{\nu+k}(z)\mathrm{N}_{\nu+k}(\zeta)\Big[\zeta\mathrm{J}'_{\nu+k}(z)\mathrm{J}_{\nu+k}(\zeta)-z\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{J}'_{\nu+k}(\zeta)\Big]\Big\}$$
$$=\frac{z\zeta}{2}\Big\{(-1)^{n+1}\Big[\mathrm{J}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{N}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{J}_{\nu+n}(\zeta)\mathrm{N}_{\nu+n}(\zeta)$$
$$-\mathrm{J}_{\nu+n}(z)\mathrm{N}_{\nu+n}(z)\mathrm{J}_{\nu+n+1}(\zeta)\mathrm{N}_{\nu+n+1}(\zeta)\Big]$$
$$-\Big[\mathrm{J}_{\nu}(z)\mathrm{N}_{\nu}(z)\mathrm{J}_{\nu-1}(\zeta)\mathrm{N}_{\nu-1}(\zeta)-\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\mathrm{N}_{\nu-1}(z)\mathrm{J}_{\nu}(\zeta)\mathrm{N}_{\nu}(\zeta)\Big]\Big\}, \tag{15.110}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(\nu+k)\Big\{\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{J}_{-\nu-k}(\zeta)\Big[\zeta\mathrm{N}'_{\nu+k}(z)\mathrm{N}_{-\nu-k}(\zeta)+z\mathrm{N}_{\nu+k}(z)\mathrm{N}'_{-\nu-k}(\zeta)\Big]$$
$$+\mathrm{N}_{\nu+k}(z)\mathrm{N}_{-\nu-k}(\zeta)\Big[\zeta\mathrm{J}'_{\nu+k}(z)\mathrm{J}_{-\nu-k}(\zeta)+z\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{J}'_{-\nu-k}(\zeta)\Big]\Big\}$$
$$=\frac{z\zeta}{2}\Big\{-\Big[\mathrm{J}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{N}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{J}_{-\nu-n}(\zeta)\mathrm{N}_{-\nu-n}(\zeta)$$
$$+\mathrm{J}_{\nu+n}(z)\mathrm{N}_{\nu+n}(z)\mathrm{J}_{-\nu-n-1}(\zeta)\mathrm{N}_{-\nu-n-1}(\zeta)\Big]$$
$$+\Big[\mathrm{J}_{\nu}(z)\mathrm{N}_{\nu}(z)\mathrm{J}_{1-\nu}(\zeta)\mathrm{N}_{1-\nu}(\zeta)+\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\mathrm{N}_{\nu-1}(z)\mathrm{J}_{-\nu}(\zeta)\mathrm{N}_{-\nu}(\zeta)\Big]\Big\}, \tag{15.111}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\nu+k)\Big\{\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{J}_{-\nu-k}(\zeta)\Big[\zeta\mathrm{N}'_{\nu+k}(z)\mathrm{N}_{-\nu-k}(\zeta)-z\mathrm{N}_{\nu+k}(z)\mathrm{N}'_{-\nu-k}(\zeta)\Big]$$
$$+\mathrm{N}_{\nu+k}(z)\mathrm{N}_{-\nu-k}(\zeta)\Big[\zeta\mathrm{J}'_{\nu+k}(z)\mathrm{J}_{-\nu-k}(\zeta)-z\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{J}'_{-\nu-k}(\zeta)\Big]\Big\}$$
$$=\frac{z\zeta}{2}\Big\{(-1)^{n+1}\Big[\mathrm{J}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{N}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{J}_{-\nu-n}(\zeta)\mathrm{N}_{-\nu-n}(\zeta)$$
$$-\mathrm{J}_{\nu+n}(z)\mathrm{N}_{\nu+n}(z)\mathrm{J}_{-\nu-n-1}(\zeta)\mathrm{N}_{-\nu-n-1}(\zeta)\Big]$$

$$-\Big[\mathrm{J}_\nu(z)\mathrm{N}_\nu(z)\mathrm{J}_{1-\nu}(\zeta)\mathrm{N}_{1-\nu}(\zeta)-\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\mathrm{N}_{\nu-1}(z)\mathrm{J}_{-\nu}(\zeta)\mathrm{N}_{-\nu}(\zeta)\Big]\Big\},\quad(15.112)$$

$$\sum_{k=0}^{n}(\nu+k)\Big\{\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)\mathrm{J}_{-\nu-k}(\zeta)\Big[\zeta\mathrm{N}'_{-\nu-k}(z)\mathrm{N}_{-\nu-k}(\zeta)+z\mathrm{N}_{-\nu-k}(z)\mathrm{N}'_{-\nu-k}(\zeta)\Big]$$
$$+\mathrm{N}_{-\nu-k}(z)\mathrm{N}_{-\nu-k}(\zeta)\Big[\zeta\mathrm{J}'_{-\nu-k}(z)\mathrm{J}_{-\nu-k}(\zeta)+z\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)\mathrm{J}'_{-\nu-k}(\zeta)\Big]\Big\}$$
$$=\frac{z\zeta}{2}\Big\{-\Big[\mathrm{J}_{-\nu-n-1}(z)\mathrm{N}_{-\nu-n-1}(z)\mathrm{J}_{-\nu-n}(\zeta)\mathrm{N}_{-\nu-n}(\zeta)$$
$$+\mathrm{J}_{-\nu-n}(z)\mathrm{N}_{-\nu-n}(z)\mathrm{J}_{-\nu-n-1}(\zeta)\mathrm{N}_{-\nu-n-1}(\zeta)\Big]$$
$$+\Big[\mathrm{J}_{-\nu}(z)\mathrm{N}_{-\nu}(z)\mathrm{J}_{1-\nu}(\zeta)\mathrm{N}_{1-\nu}(\zeta)+\mathrm{J}_{1-\nu}(z)\mathrm{N}_{1-\nu}(z)\mathrm{J}_{-\nu}(\zeta)\mathrm{N}_{-\nu}(\zeta)\Big]\Big\},\quad(15.113)$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\nu+k)\Big\{\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)\mathrm{J}_{-\nu-k}(\zeta)\Big[\zeta\mathrm{N}'_{-\nu-k}(z)\mathrm{N}_{-\nu-k}(\zeta)-z\mathrm{N}_{-\nu-k}(z)\mathrm{N}'_{-\nu-k}(\zeta)\Big]$$
$$+\mathrm{N}_{-\nu-k}(z)\mathrm{N}_{-\nu-k}(\zeta)\Big[\zeta\mathrm{J}'_{-\nu-k}(z)\mathrm{J}_{-\nu-k}(\zeta)-z\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)\mathrm{J}'_{-\nu-k}(\zeta)\Big]\Big\}$$
$$=\frac{z\zeta}{2}\Big\{(-1)^{n+1}\Big[\mathrm{J}_{-\nu-n-1}(z)\mathrm{N}_{-\nu-n-1}(z)\mathrm{J}_{-\nu-n}(\zeta)\mathrm{N}_{-\nu-n}(\zeta)$$
$$-\mathrm{J}_{-\nu-n}(z)\mathrm{N}_{-\nu-n}(z)\mathrm{J}_{-\nu-n-1}(\zeta)\mathrm{N}_{-\nu-n-1}(\zeta)\Big]$$
$$-\Big[\mathrm{J}_{-\nu}(z)\mathrm{N}_{-\nu}(z)\mathrm{J}_{1-\nu}(\zeta)\mathrm{N}_{1-\nu}(\zeta)-\mathrm{J}_{1-\nu}(z)\mathrm{N}_{1-\nu}(z)\mathrm{J}_{-\nu}(\zeta)\mathrm{N}_{-\nu}(\zeta)\Big]\Big\},\quad(15.114)$$

$$\sum_{k=0}^{n}(\nu+k)\Big\{\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{J}_{\nu+k}(\zeta)\Big[\zeta\mathrm{J}'_{\nu+k}(z)\mathrm{N}_{\nu+k}(\zeta)+z\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{N}'_{\nu+k}(\zeta)\Big]$$
$$+\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{N}_{\nu+k}(\zeta)\Big[\zeta\mathrm{J}'_{\nu+k}(z)\mathrm{J}_{\nu+k}(\zeta)+z\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{J}'_{\nu+k}(\zeta)\Big]\Big\}$$
$$=\frac{z\zeta}{2}\Big\{-\Big[\mathrm{J}^2_{\nu+n+1}(z)\mathrm{J}_{\nu+n}(\zeta)\mathrm{N}_{\nu+n}(\zeta)+\mathrm{J}^2_{\nu+n}(z)\mathrm{J}_{\nu+n+1}(\zeta)\mathrm{N}_{\nu+n+1}(\zeta)\Big]$$
$$+\Big[\mathrm{J}^2_\nu(z)\mathrm{J}_{\nu-1}(\zeta)\mathrm{N}_{\nu-1}(\zeta)+\mathrm{J}^2_{\nu-1}(z)\mathrm{J}_\nu(\zeta)\mathrm{N}_\nu(\zeta)\Big]\Big\},\quad(15.115)$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\nu+k)\Big\{\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{J}_{\nu+k}(\zeta)\Big[\zeta\mathrm{J}'_{\nu+k}(z)\mathrm{N}_{\nu+k}(\zeta)-z\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{N}'_{\nu+k}(\zeta)\Big]$$
$$+\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{N}_{\nu+k}(\zeta)\Big[\zeta\mathrm{J}'_{\nu+k}(z)\mathrm{J}_{\nu+k}(\zeta)-z\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{J}'_{\nu+k}(\zeta)\Big]\Big\}$$
$$=\frac{z\zeta}{2}\Big\{(-1)^{n+1}\Big[\mathrm{J}^2_{\nu+n+1}(z)\mathrm{J}_{\nu+n}(\zeta)\mathrm{N}_{\nu+n}(\zeta)-\mathrm{J}^2_{\nu+n}(z)\mathrm{J}_{\nu+n+1}(\zeta)\mathrm{N}_{\nu+n+1}(\zeta)\Big]$$

$$- \left[\mathrm{J}_{\nu}^{2}(z)\mathrm{J}_{\nu-1}(\zeta)\mathrm{N}_{\nu-1}(\zeta) - \mathrm{J}_{\nu-1}^{2}(z)\mathrm{J}_{\nu}(\zeta)\mathrm{N}_{\nu}(\zeta)\right]\Big\}, \tag{15.116}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(\nu+k)\Big\{\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{J}_{-\nu-k}(\zeta)\left[\zeta\mathrm{J}'_{\nu+k}(z)\mathrm{N}_{-\nu-k}(\zeta) + z\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{N}'_{-\nu-k}(\zeta)\right]$$
$$+ \mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{N}_{-\nu-k}(\zeta)\left[\zeta\mathrm{J}'_{\nu+k}(z)\mathrm{J}_{-\nu-k}(\zeta) + z\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{J}'_{-\nu-k}(\zeta)\right]\Big\}$$
$$= \frac{z\zeta}{2}\Big\{ - \left[\mathrm{J}_{\nu+n+1}^{2}(z)\mathrm{J}_{-\nu-n}(\zeta)\mathrm{N}_{-\nu-n}(\zeta) + \mathrm{J}_{\nu+n}^{2}(z)\mathrm{J}_{-\nu-n-1}(\zeta)\mathrm{N}_{-\nu-n-1}(\zeta)\right]$$
$$+ \left[\mathrm{J}_{\nu}^{2}(z)\mathrm{J}_{1-\nu}(\zeta)\mathrm{N}_{1-\nu}(\zeta) + \mathrm{J}_{\nu-1}^{2}(z)\mathrm{J}_{-\nu}(\zeta)\mathrm{N}_{-\nu}(\zeta)\right]\Big\}, \tag{15.117}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}(\nu+k)\Big\{\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{J}_{-\nu-k}(\zeta)\left[\zeta\mathrm{J}'_{\nu+k}(z)\mathrm{N}_{-\nu-k}(\zeta) - z\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{N}'_{-\nu-k}(\zeta)\right]$$
$$+ \mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{N}_{-\nu-k}(\zeta)\left[\zeta\mathrm{J}'_{\nu+k}(z)\mathrm{J}_{-\nu-k}(\zeta) - z\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{J}'_{-\nu-k}(\zeta)\right]\Big\}$$
$$= \frac{z\zeta}{2}\Big\{(-1)^{n+1}\Big[\mathrm{J}_{\nu+n+1}^{2}(z)\mathrm{J}_{-\nu-n}(\zeta)\mathrm{N}_{-\nu-n}(\zeta)$$
$$- \mathrm{J}_{\nu+n}^{2}(z)\mathrm{J}_{-\nu-n-1}(\zeta)\mathrm{N}_{-\nu-n-1}(\zeta)\Big]$$
$$- \left[\mathrm{J}_{\nu}^{2}(z)\mathrm{J}_{1-\nu}(\zeta)\mathrm{N}_{1-\nu}(\zeta) - \mathrm{J}_{\nu-1}^{2}(z)\mathrm{J}_{-\nu}(\zeta)\mathrm{N}_{-\nu}(\zeta)\right]\Big\}, \tag{15.118}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(\nu+k)\Big\{\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)\mathrm{J}_{\nu+k}(\zeta)\left[\zeta\mathrm{J}'_{-\nu-k}(z)\mathrm{N}_{\nu+k}(\zeta) + z\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)\mathrm{N}'_{\nu+k}(\zeta)\right]$$
$$+ \mathrm{J}_{-\nu-k}(z)\mathrm{N}_{\nu+k}(\zeta)\left[\zeta\mathrm{J}'_{-\nu-k}(z)\mathrm{J}_{\nu+k}(\zeta) + z\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)\mathrm{J}'_{\nu+k}(\zeta)\right]\Big\}$$
$$= \frac{z\zeta}{2}\Big\{ - \left[\mathrm{J}_{-\nu-n-1}^{2}(z)\mathrm{J}_{\nu+n}(\zeta)\mathrm{N}_{\nu+n}(\zeta) + \mathrm{J}_{-\nu-n}^{2}(z)\mathrm{J}_{\nu+n+1}(\zeta)\mathrm{N}_{\nu+n+1}(\zeta)\right]$$
$$+ \left[\mathrm{J}_{-\nu}^{2}(z)\mathrm{J}_{\nu-1}(\zeta)\mathrm{N}_{\nu-1}(\zeta) + \mathrm{J}_{1-\nu}^{2}(z)\mathrm{J}_{\nu}(\zeta)\mathrm{N}_{\nu}(\zeta)\right]\Big\}, \tag{15.119}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}(\nu+k)\Big\{\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)\mathrm{J}_{\nu+k}(\zeta)\left[\zeta\mathrm{J}'_{-\nu-k}(z)\mathrm{N}_{\nu+k}(\zeta) - z\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)\mathrm{N}'_{\nu+k}(\zeta)\right]$$
$$+ \mathrm{J}_{-\nu-k}(z)\mathrm{N}_{\nu+k}(\zeta)\left[\zeta\mathrm{J}'_{\nu+k}(z)\mathrm{J}_{\nu+k}(\zeta) - z\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)\mathrm{J}'_{\nu+k}(\zeta)\right]\Big\}$$
$$= \frac{z\zeta}{2}\Big\{(-1)^{n+1}\left[\mathrm{J}_{-\nu-n-1}^{2}(z)\mathrm{J}_{\nu+n}(\zeta)\mathrm{N}_{\nu+n}(\zeta) - \mathrm{J}_{-\nu-n}^{2}(z)\mathrm{J}_{\nu+n+1}(\zeta)\mathrm{N}_{\nu+n+1}(\zeta)\right]$$
$$- \left[\mathrm{J}_{-\nu}^{2}(z)\mathrm{J}_{\nu-1}(\zeta)\mathrm{N}_{\nu-1}(\zeta) - \mathrm{J}_{1-\nu}^{2}(z)\mathrm{J}_{\nu}(\zeta)\mathrm{N}_{\nu}(\zeta)\right]\Big\}, \tag{15.120}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(\nu+k)\Big\{\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)\mathrm{J}_{-\nu-k}(\zeta)\Big[\zeta\mathrm{J}'_{-\nu-k}(z)\mathrm{N}_{-\nu-k}(\zeta)+z\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)\mathrm{N}'_{-\nu-k}(\zeta)\Big]$$
$$+\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)\mathrm{N}_{-\nu-k}(\zeta)\Big[\zeta\mathrm{J}'_{-\nu-k}(z)\mathrm{J}_{-\nu-k}(\zeta)+z\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)\mathrm{J}'_{-\nu-k}(\zeta)\Big]\Big\}$$
$$=\frac{z\zeta}{2}\Big\{-\Big[\mathrm{J}^2_{-\nu-n-1}(z)\mathrm{J}_{-\nu-n}(\zeta)\mathrm{N}_{-\nu-n}(\zeta)$$
$$+\mathrm{J}^2_{-\nu-n}(z)\mathrm{J}_{-\nu-n-1}(\zeta)\mathrm{N}_{-\nu-n-1}(\zeta)\Big]$$
$$+\Big[\mathrm{J}^2_{-\nu}(z)\mathrm{J}_{1-\nu}(\zeta)\mathrm{N}_{1-\nu}(\zeta)+\mathrm{J}^2_{1-\nu}(z)\mathrm{J}_{-\nu}(\zeta)\mathrm{N}_{-\nu}(\zeta)\Big]\Big\}, \tag{15.121}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\nu+k)\Big\{\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)\mathrm{J}_{-\nu-k}(\zeta)\Big[\zeta\mathrm{J}'_{-\nu-k}(z)\mathrm{N}_{-\nu-k}(\zeta)-z\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)\mathrm{N}'_{-\nu-k}(\zeta)\Big]$$
$$+\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)\mathrm{N}_{-\nu-k}(\zeta)\Big[\zeta\mathrm{J}'_{-\nu-k}(z)\mathrm{J}_{-\nu-k}(\zeta)-z\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)\mathrm{J}'_{-\nu-k}(\zeta)\Big]\Big\}$$
$$=\frac{z\zeta}{2}\Big\{(-1)^{n+1}\Big[\mathrm{J}^2_{-\nu-n-1}(z)\mathrm{J}_{-\nu-n}(\zeta)\mathrm{N}_{-\nu-n}(\zeta)$$
$$-\mathrm{J}^2_{-\nu-n}(z)\mathrm{J}_{-\nu-n-1}(\zeta)\mathrm{N}_{-\nu-n-1}(\zeta)\Big]$$
$$-\Big[\mathrm{J}^2_{-\nu}(z)\mathrm{J}_{1-\nu}(\zeta)\mathrm{N}_{1-\nu}(\zeta)-\mathrm{J}^2_{1-\nu}(z)\mathrm{J}_{-\nu}(\zeta)\mathrm{N}_{-\nu}(\zeta)\Big]\Big\}. \tag{15.122}$$

同样，由递推关系 (15.96b) 和 (15.96d)，也可以导出下列求和公式：

$$\sum_{k=0}^{n}\Big\{(\nu+k)^2\mathrm{J}^2_{\nu+k}(z)\mathrm{J}^2_{\nu+k}(\zeta)+\frac{z^2\zeta^2}{\zeta^2-z^2}\Big[\mathrm{J}'^2_{\nu+k}(z)\mathrm{J}^2_{\nu+k}(\zeta)-\mathrm{J}^2_{\nu+k}(z)\mathrm{J}'^2_{\nu+k}(\zeta)\Big]\Big\}$$
$$=\frac{1}{2}\frac{z^2\zeta^2}{\zeta^2-z^2}\Big\{\Big[\mathrm{J}^2_{\nu+n+1}(z)\mathrm{J}^2_{\nu+n}(\zeta)-\mathrm{J}^2_{\nu+n}(z)\mathrm{J}^2_{\nu+n+1}(\zeta)\Big]$$
$$-\Big[\mathrm{J}^2_{\nu}(z)\mathrm{J}^2_{\nu-1}(\zeta)-\mathrm{J}^2_{\nu-1}(z)\mathrm{J}^2_{\nu}(\zeta)\Big]\Big\}, \tag{15.123}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\Big\{(\nu+k)^2\mathrm{J}^2_{\nu+k}(z)\mathrm{J}^2_{\nu+k}(\zeta)$$
$$+\frac{z^2\zeta^2}{\zeta^2+z^2}\Big[\mathrm{J}'^2_{\nu+k}(z)\mathrm{J}^2_{\nu+k}(\zeta)+\mathrm{J}^2_{\nu+k}(z)\mathrm{J}'^2_{\nu+k}(\zeta)\Big]\Big\}$$
$$=\frac{1}{2}\frac{z^2\zeta^2}{\zeta^2+z^2}\Big\{(-1)^n\Big[\mathrm{J}^2_{\nu+n+1}(z)\mathrm{J}^2_{\nu+n}(\zeta)+\mathrm{J}^2_{\nu+n}(z)\mathrm{J}^2_{\nu+n+1}(\zeta)\Big]$$
$$+\Big[\mathrm{J}^2_{\nu}(z)\mathrm{J}^2_{\nu-1}(\zeta)+\mathrm{J}^2_{\nu-1}(z)\mathrm{J}^2_{\nu}(\zeta)\Big]\Big\}, \tag{15.124}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\Big\{(\nu+k)^2\mathrm{J}^2_{\nu+k}(z)\mathrm{J}^2_{-\nu-k}(\zeta)+\frac{z^2\zeta^2}{\zeta^2-z^2}\Big[\mathrm{J}'^2_{\nu+k}(z)\mathrm{J}^2_{-\nu-k}(\zeta)-\mathrm{J}^2_{\nu+k}(z)\mathrm{J}'^2_{-\nu-k}(\zeta)\Big]\Big\}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{z^2\zeta^2}{\zeta^2-z^2}\left\{\left[J^2_{\nu+n+1}(z)J^2_{-\nu-n}(\zeta) - J^2_{\nu+n}(z)J^2_{-\nu-n-1}(\zeta)\right]\right.$$
$$\left.- \left[J^2_{\nu}(z)J^2_{1-\nu}(\zeta) - J^2_{\nu-1}(z)J^2_{-\nu}(\zeta)\right]\right\}, \tag{15.125}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left\{(\nu+k)^2 J^2_{\nu+k}(z)J^2_{-\nu-k}(\zeta)\right.$$
$$\left.+ \frac{z^2\zeta^2}{\zeta^2+z^2}\left[J'^2_{\nu+k}(z)J^2_{-\nu-k}(\zeta)+J^2_{\nu+k}(z)J'^2_{-\nu-k}(\zeta)\right]\right\}$$
$$= \frac{1}{2}\frac{z^2\zeta^2}{\zeta^2+z^2}\left\{(-1)^n\left[J^2_{\nu+n+1}(z)J^2_{-\nu-n}(\zeta) + J^2_{\nu+n}(z)J^2_{-\nu-n-1}(\zeta)\right]\right.$$
$$\left.+ \left[J^2_{\nu}(z)J^2_{1-\nu}(\zeta) + J^2_{\nu-1}(z)J^2_{-\nu}(\zeta)\right]\right\}, \tag{15.126}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\left\{(\nu+k)^2 J^2_{-\nu-k}(z)J^2_{-\nu-k}(\zeta)\right.$$
$$\left.+ \frac{z^2\zeta^2}{\zeta^2-z^2}\left[J'^2_{-\nu-k}(z)J^2_{-\nu-k}(\zeta)-J^2_{-\nu-k}(z)J'^2_{-\nu-k}(\zeta)\right]\right\}$$
$$= \frac{1}{2}\frac{z^2\zeta^2}{\zeta^2-z^2}\left\{\left[J^2_{-\nu-n-1}(z)J^2_{-\nu-n}(\zeta)-J^2_{-\nu-n}(z)J^2_{-\nu-n-1}(\zeta)\right]\right.$$
$$\left.- \left[J^2_{-\nu}(z)J^2_{1-\nu}(\zeta) - J^2_{1-\nu}(z)J^2_{-\nu}(\zeta)\right]\right\}, \tag{15.127}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left\{(\nu+k)^2 J^2_{-\nu-k}(z)J^2_{-\nu-k}(\zeta)\right.$$
$$\left.+ \frac{z^2\zeta^2}{\zeta^2+z^2}\left[J'^2_{-\nu-k}(z)J^2_{-\nu-k}(\zeta)+J^2_{-\nu-k}(z)J'^2_{-\nu-k}(\zeta)\right]\right\}$$
$$= \frac{1}{2}\frac{z^2\zeta^2}{\zeta^2+z^2}\left\{(-1)^n\left[J^2_{-\nu-n-1}(z)J^2_{-\nu-n}(\zeta)+J^2_{-\nu-n}(z)J^2_{-\nu-n-1}(\zeta)\right]\right.$$
$$\left.+ \left[J^2_{-\nu}(z)J^2_{1-\nu}(\zeta) + J^2_{1-\nu}(z)J^2_{-\nu}(\zeta)\right]\right\}, \tag{15.128}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\left\{(\nu+k)^2 N^2_{\nu+k}(z)N^2_{\nu+k}(\zeta) + \frac{z^2\zeta^2}{\zeta^2-z^2}\left[N'^2_{\nu+k}(z)N^2_{\nu+k}(\zeta) - N^2_{\nu+k}(z)N'^2_{\nu+k}(\zeta)\right]\right\}$$
$$= \frac{1}{2}\frac{z^2\zeta^2}{\zeta^2-z^2}\left\{\left[N^2_{\nu+n+1}(z)N^2_{\nu+n}(\zeta) - N^2_{\nu+n}(z)N^2_{\nu+n+1}(\zeta)\right]\right.$$
$$\left.- \left[N^2_{\nu}(z)N^2_{\nu-1}(\zeta) - N^2_{\nu-1}(z)N^2_{\nu}(\zeta)\right]\right\}, \tag{15.129}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left\{(\nu+k)^2\mathrm{N}_{\nu+k}^2(z)\mathrm{N}_{\nu+k}^2(\zeta)+\frac{z^2\zeta^2}{\zeta^2+z^2}\left[\mathrm{N}_{\nu+k}'^2(z)\mathrm{N}_{\nu+k}^2(\zeta)+\mathrm{N}_{\nu+k}^2(z)\mathrm{N}_{\nu+k}'^2(\zeta)\right]\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\frac{z^2\zeta^2}{\zeta^2+z^2}\left\{(-1)^n\left[\mathrm{N}_{\nu+n+1}^2(z)\mathrm{N}_{\nu+n}^2(\zeta)+\mathrm{N}_{\nu+n}^2(z)\mathrm{N}_{\nu+n+1}^2(\zeta)\right]\right.$$
$$\left.+\left[\mathrm{N}_{\nu}^2(z)\mathrm{N}_{\nu-1}^2(\zeta)+\mathrm{N}_{\nu-1}^2(z)\mathrm{N}_{\nu}^2(\zeta)\right]\right\}, \tag{15.130}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\left\{(\nu+k)^2\mathrm{N}_{\nu+k}^2(z)\mathrm{N}_{-\nu-k}^2(\zeta)+\frac{z^2\zeta^2}{\zeta^2-z^2}\left[\mathrm{N}_{\nu+k}'^2(z)\mathrm{N}_{-\nu-k}^2(\zeta)-\mathrm{N}_{\nu+k}^2(z)\mathrm{N}_{-\nu-k}'^2(\zeta)\right]\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\frac{z^2\zeta^2}{\zeta^2-z^2}\left\{\left[\mathrm{N}_{\nu+n+1}^2(z)\mathrm{N}_{-\nu-n}^2(\zeta)-\mathrm{N}_{\nu+n}^2(z)\mathrm{N}_{-\nu-n-1}^2(\zeta)\right]\right.$$
$$\left.-\left[\mathrm{N}_{\nu}^2(z)\mathrm{N}_{1-\nu}^2(\zeta)-\mathrm{N}_{\nu-1}^2(z)\mathrm{N}_{-\nu}^2(\zeta)\right]\right\}, \tag{15.131}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left\{(\nu+k)^2\mathrm{N}_{\nu+k}^2(z)\mathrm{N}_{-\nu-k}^2(\zeta)\right.$$
$$\left.+\frac{z^2\zeta^2}{\zeta^2+z^2}\left[\mathrm{N}_{\nu+k}'^2(z)\mathrm{N}_{-\nu-k}^2(\zeta)+\mathrm{N}_{\nu+k}^2(z)\mathrm{N}_{-\nu-k}'^2(\zeta)\right]\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\frac{z^2\zeta^2}{\zeta^2+z^2}\left\{(-1)^n\left[\mathrm{N}_{\nu+n+1}^2(z)\mathrm{N}_{-\nu-n}^2(\zeta)+\mathrm{N}_{\nu+n}^2(z)\mathrm{N}_{-\nu-n-1}^2(\zeta)\right]\right.$$
$$\left.+\left[\mathrm{N}_{\nu}^2(z)\mathrm{N}_{1-\nu}^2(\zeta)+\mathrm{N}_{\nu-1}^2(z)\mathrm{N}_{-\nu}^2(\zeta)\right]\right\}, \tag{15.132}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\left\{(\nu+k)^2\mathrm{N}_{-\nu-k}^2(z)\mathrm{N}_{-\nu-k}^2(\zeta)\right.$$
$$\left.+\frac{z^2\zeta^2}{\zeta^2-z^2}\left[\mathrm{N}_{-\nu-k}'^2(z)\mathrm{N}_{-\nu-k}^2(\zeta)-\mathrm{N}_{-\nu-k}^2(z)\mathrm{N}_{-\nu-k}'^2(\zeta)\right]\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\frac{z^2\zeta^2}{\zeta^2-z^2}\left\{\left[\mathrm{N}_{-\nu-n-1}^2(z)\mathrm{N}_{-\nu-n}^2(\zeta)-\mathrm{N}_{-\nu-n}^2(z)\mathrm{N}_{-\nu-n-1}^2(\zeta)\right]\right.$$
$$\left.-\left[\mathrm{N}_{-\nu}^2(z)\mathrm{N}_{1-\nu}^2(\zeta)-\mathrm{N}_{1-\nu}^2(z)\mathrm{N}_{-\nu}^2(\zeta)\right]\right\}, \tag{15.133}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left\{(\nu+k)^2\mathrm{N}_{-\nu-k}^2(z)\mathrm{N}_{-\nu-k}^2(\zeta)\right.$$
$$\left.+\frac{z^2\zeta^2}{\zeta^2+z^2}\left[\mathrm{N}_{-\nu-k}'^2(z)\mathrm{N}_{-\nu-k}^2(\zeta)+\mathrm{N}_{-\nu-k}^2(z)\mathrm{N}_{-\nu-k}'^2(\zeta)\right]\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\frac{z^2\zeta^2}{\zeta^2+z^2}\left\{(-1)^n\left[\mathrm{N}_{-\nu-n-1}^2(z)\mathrm{N}_{-\nu-n}^2(\zeta)+\mathrm{N}_{-\nu-n}^2(z)\mathrm{N}_{-\nu-n-1}^2(\zeta)\right]\right.$$
$$\left.+\left[\mathrm{N}_{-\nu}^2(z)\mathrm{N}_{1-\nu}^2(\zeta)+\mathrm{N}_{1-\nu}^2(z)\mathrm{N}_{-\nu}^2(\zeta)\right]\right\}, \tag{15.134}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\Big\{&(\nu+k)^2\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{N}_{\nu+k}(z)\mathrm{J}_{\nu+k}(\zeta)\mathrm{N}_{\nu+k}(\zeta)\\
&+\frac{z^2\zeta^2}{\zeta^2-z^2}\Big[\mathrm{J}'_{\nu+k}(z)\mathrm{N}'_{\nu+k}(z)\mathrm{J}_{\nu+k}(\zeta)\mathrm{N}_{\nu+k}(\zeta)\\
&-\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{N}_{\nu+k}(z)\mathrm{J}'_{\nu+k}(\zeta)\mathrm{N}'_{\nu+k}(\zeta)\Big]\Big\}\\
=\frac{1}{2}\frac{z^2\zeta^2}{\zeta^2-z^2}\Big\{&\Big[\mathrm{J}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{N}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{J}_{\nu+n}(\zeta)\mathrm{N}_{\nu+n}(\zeta)\\
&-\mathrm{J}_{\nu+n}(z)\mathrm{N}_{\nu+n}(z)\mathrm{J}_{\nu+n+1}(\zeta)\mathrm{N}_{\nu+n+1}(\zeta)\Big]\\
&-\Big[\mathrm{J}_{\nu}(z)\mathrm{N}_{\nu}(z)\mathrm{J}_{\nu-1}(\zeta)\mathrm{N}_{\nu-1}(\zeta)-\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\mathrm{N}_{\nu-1}(z)\mathrm{J}_{\nu}(\zeta)\mathrm{N}_{\nu}(\zeta)\Big]\Big\},
\end{aligned}\tag{15.135}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\Big\{&(\nu+k)^2\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{N}_{\nu+k}(z)\mathrm{J}_{\nu+k}(\zeta)\mathrm{N}_{\nu+k}(\zeta)\\
&+\frac{z^2\zeta^2}{\zeta^2+z^2}\Big[\mathrm{J}'_{\nu+k}(z)\mathrm{N}'_{\nu+k}(z)\mathrm{J}_{\nu+k}(\zeta)\mathrm{N}_{\nu+k}(\zeta)\\
&+\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{N}_{\nu+k}(z)\mathrm{J}'_{\nu+k}(\zeta)\mathrm{N}'_{\nu+k}(\zeta)\Big]\Big\}\\
=\frac{1}{2}\frac{z^2\zeta^2}{\zeta^2+z^2}\Big\{&(-1)^n\Big[\mathrm{J}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{N}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{J}_{\nu+n}(\zeta)\mathrm{N}_{\nu+n}(\zeta)\\
&+\mathrm{J}_{\nu+n}(z)\mathrm{N}_{\nu+n}(z)\mathrm{J}_{\nu+n+1}(\zeta)\mathrm{N}_{\nu+n+1}(\zeta)\Big]\\
&+\Big[\mathrm{J}_{\nu}(z)\mathrm{N}_{\nu}(z)\mathrm{J}_{\nu-1}(\zeta)\mathrm{N}_{\nu-1}(\zeta)+\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\mathrm{N}_{\nu-1}(z)\mathrm{J}_{\nu}(\zeta)\mathrm{N}_{\nu}(\zeta)\Big]\Big\},
\end{aligned}\tag{15.136}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\Big\{&(\nu+k)^2\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{N}_{\nu+k}(z)\mathrm{J}_{-\nu-k}(\zeta)\mathrm{N}_{-\nu-k}(\zeta)\\
&+\frac{z^2\zeta^2}{\zeta^2-z^2}\Big[\mathrm{J}'_{\nu+k}(z)\mathrm{N}'_{\nu+k}(z)\mathrm{J}_{-\nu-k}(\zeta)\mathrm{N}_{-\nu-k}(\zeta)\\
&-\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{N}_{\nu+k}(z)\mathrm{J}'_{-\nu-k}(\zeta)\mathrm{N}'_{-\nu-k}(\zeta)\Big]\Big\}\\
=\frac{1}{2}\frac{z^2\zeta^2}{\zeta^2-z^2}\Big\{&\Big[\mathrm{J}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{N}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{J}_{-\nu-n}(\zeta)\mathrm{N}_{-\nu-n}(\zeta)\\
&-\mathrm{J}_{\nu+n}(z)\mathrm{N}_{\nu+n}(z)\mathrm{J}_{-\nu-n-1}(\zeta)\mathrm{N}_{-\nu-n-1}(\zeta)\Big]\\
&-\Big[\mathrm{J}_{\nu}(z)\mathrm{N}_{\nu}(z)\mathrm{J}_{1-\nu}(\zeta)\mathrm{N}_{1-\nu}(\zeta)-\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\mathrm{N}_{\nu-1}(z)\mathrm{J}_{-\nu}(\zeta)\mathrm{N}_{-\nu}(\zeta)\Big]\Big\},
\end{aligned}\tag{15.137}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\Big\{(\nu+k)^2 \mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{N}_{\nu+k}(z)\mathrm{J}_{-\nu-k}(\zeta)\mathrm{N}_{-\nu-k}(\zeta)$$
$$+\frac{z^2\zeta^2}{\zeta^2+z^2}\Big[\mathrm{J}'_{\nu+k}(z)\mathrm{N}'_{\nu+k}(z)\mathrm{J}_{-\nu-k}(\zeta)\mathrm{N}_{-\nu-k}(\zeta)$$
$$+\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{N}_{\nu+k}(z)\mathrm{J}'_{-\nu-k}(\zeta)\mathrm{N}'_{-\nu-k}(\zeta)\Big]\Big\}$$
$$=\frac{1}{2}\frac{z^2\zeta^2}{\zeta^2+z^2}\Big\{(-1)^n\Big[\mathrm{J}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{N}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{J}_{-\nu-n}(\zeta)\mathrm{N}_{-\nu-n}(\zeta)$$
$$+\mathrm{J}_{\nu+n}(z)\mathrm{N}_{\nu+n}(z)\mathrm{J}_{-\nu-n-1}(\zeta)\mathrm{N}_{-\nu-n-1}(\zeta)\Big]$$
$$+\Big[\mathrm{J}_{\nu}(z)\mathrm{N}_{\nu}(z)\mathrm{J}_{1-\nu}(\zeta)\mathrm{N}_{1-\nu}(\zeta)+\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\mathrm{N}_{\nu-1}(z)\mathrm{J}_{-\nu}(\zeta)\mathrm{N}_{-\nu}(\zeta)\Big]\Big\},\quad (15.138)$$

$$\sum_{k=0}^{n}\Big\{(\nu+k)^2 \mathrm{J}_{-\nu-k}(z)\mathrm{N}_{-\nu-k}(z)\mathrm{J}_{-\nu-k}(\zeta)\mathrm{N}_{-\nu-k}(\zeta)$$
$$+\frac{z^2\zeta^2}{\zeta^2-z^2}\Big[\mathrm{J}'_{-\nu-k}(z)\mathrm{N}'_{-\nu-k}(z)\mathrm{J}_{-\nu-k}(\zeta)\mathrm{N}_{-\nu-k}(\zeta)$$
$$-\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)\mathrm{N}_{-\nu-k}(z)\mathrm{J}'_{-\nu-k}(\zeta)\mathrm{N}'_{-\nu-k}(\zeta)\Big]\Big\}$$
$$=\frac{1}{2}\frac{z^2\zeta^2}{\zeta^2-z^2}\Big\{\Big[\mathrm{J}_{-\nu-n-1}(z)\mathrm{N}_{-\nu-n-1}(z)\mathrm{J}_{-\nu-n}(\zeta)\mathrm{N}_{-\nu-n}(\zeta)$$
$$-\mathrm{J}_{-\nu-n}(z)\mathrm{N}_{-\nu-n}(z)\mathrm{J}_{-\nu-n-1}(\zeta)\mathrm{N}_{-\nu-n-1}(\zeta)\Big]$$
$$-\Big[\mathrm{J}_{-\nu}(z)\mathrm{N}_{-\nu}(z)\mathrm{J}_{1-\nu}(\zeta)\mathrm{N}_{1-\nu}(\zeta)-\mathrm{J}_{1-\nu}(z)\mathrm{N}_{1-\nu}(z)\mathrm{J}_{-\nu}(\zeta)\mathrm{N}_{-\nu}(\zeta)\Big]\Big\},$$
$$(15.139)$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\Big\{(\nu+k)^2 \mathrm{J}_{-\nu-k}(z)\mathrm{N}_{-\nu-k}(z)\mathrm{J}_{-\nu-k}(\zeta)\mathrm{N}_{-\nu-k}(\zeta)$$
$$+\frac{z^2\zeta^2}{\zeta^2+z^2}\Big[\mathrm{J}'_{-\nu-k}(z)\mathrm{N}'_{-\nu-k}(z)\mathrm{J}_{-\nu-k}(\zeta)\mathrm{N}_{-\nu-k}(\zeta)$$
$$+\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)\mathrm{N}_{-\nu-k}(z)\mathrm{J}'_{-\nu-k}(\zeta)\mathrm{N}'_{-\nu-k}(\zeta)\Big]\Big\}$$
$$=\frac{1}{2}\frac{z^2\zeta^2}{\zeta^2+z^2}\Big\{(-1)^n\Big[\mathrm{J}_{-\nu-n-1}(z)\mathrm{N}_{-\nu-n-1}(z)\mathrm{J}_{-\nu-n}(\zeta)\mathrm{N}_{-\nu-n}(\zeta)$$
$$+\mathrm{J}_{-\nu-n}(z)\mathrm{N}_{-\nu-n}(z)\mathrm{J}_{-\nu-n-1}(\zeta)\mathrm{N}_{-\nu-n-1}(\zeta)\Big]$$
$$+\Big[\mathrm{J}_{-\nu}(z)\mathrm{N}_{-\nu}(z)\mathrm{J}_{1-\nu}(\zeta)\mathrm{N}_{1-\nu}(\zeta)+\mathrm{J}_{1-\nu}(z)\mathrm{N}_{1-\nu}(z)\mathrm{J}_{-\nu}(\zeta)\mathrm{N}_{-\nu}(\zeta)\Big]\Big\},$$
$$(15.140)$$

$$\sum_{k=0}^{n}\Big\{(\nu+k)^2\mathrm{J}_{\nu+k}^2(z)\mathrm{J}_{\nu+k}(\zeta)\mathrm{N}_{\nu+k}(\zeta)$$
$$+\frac{z^2\zeta^2}{\zeta^2-z^2}\Big[\mathrm{J}_{\nu+k}'^2(z)\mathrm{J}_{\nu+k}(\zeta)\mathrm{N}_{\nu+k}(\zeta)-\mathrm{J}_{\nu+k}^2(z)\mathrm{J}_{\nu+k}'(\zeta)\mathrm{N}_{\nu+k}'(\zeta)\Big]\Big\}$$
$$=\frac{1}{2}\frac{z^2\zeta^2}{\zeta^2-z^2}\Big\{\Big[\mathrm{J}_{\nu+n+1}^2(z)\mathrm{J}_{\nu+n}(\zeta)\mathrm{N}_{\nu+n}(\zeta)-\mathrm{J}_{\nu+n}^2(z)\mathrm{J}_{\nu+n+1}(\zeta)\mathrm{N}_{\nu+n+1}(\zeta)\Big]$$
$$-\Big[\mathrm{J}_{\nu}^2(z)\mathrm{J}_{\nu-1}(\zeta)\mathrm{N}_{\nu-1}(\zeta)-\mathrm{J}_{\nu-1}^2(z)\mathrm{J}_{\nu}(\zeta)\mathrm{N}_{\nu}(\zeta)\Big]\Big\}, \tag{15.141}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\Big\{(\nu+k)^2\mathrm{J}_{\nu+k}^2(z)\mathrm{J}_{\nu+k}(\zeta)\mathrm{N}_{\nu+k}(\zeta)$$
$$+\frac{z^2\zeta^2}{\zeta^2+z^2}\Big[\mathrm{J}_{\nu+k}'^2(z)\mathrm{J}_{\nu+k}(\zeta)\mathrm{N}_{\nu+k}(\zeta)+\mathrm{J}_{\nu+k}^2(z)\mathrm{J}_{\nu+k}'(\zeta)\mathrm{N}_{\nu+k}'(\zeta)\Big]\Big\}$$
$$=\frac{1}{2}\frac{z^2\zeta^2}{\zeta^2+z^2}\Big\{(-1)^n\Big[\mathrm{J}_{\nu+n+1}^2(z)\mathrm{J}_{\nu+n}(\zeta)\mathrm{N}_{\nu+n}(\zeta)+\mathrm{J}_{\nu+n}^2(z)\mathrm{J}_{\nu+n+1}(\zeta)\mathrm{N}_{\nu+n+1}(\zeta)\Big]$$
$$+\Big[\mathrm{J}_{\nu}^2(z)\mathrm{J}_{\nu-1}(\zeta)\mathrm{N}_{\nu-1}(\zeta)+\mathrm{J}_{\nu-1}^2(z)\mathrm{J}_{\nu}(\zeta)\mathrm{N}_{\nu}(\zeta)\Big]\Big\}, \tag{15.142}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\Big\{(\nu+k)^2\mathrm{J}_{\nu+k}^2(z)\mathrm{J}_{-\nu-k}(\zeta)\mathrm{N}_{-\nu-k}(\zeta)$$
$$+\frac{z^2\zeta^2}{\zeta^2-z^2}\Big[\mathrm{J}_{\nu+k}'^2(z)\mathrm{J}_{-\nu-k}(\zeta)\mathrm{N}_{-\nu-k}(\zeta)-\mathrm{J}_{\nu+k}^2(z)\mathrm{J}_{-\nu-k}'(\zeta)\mathrm{N}_{-\nu-k}'(\zeta)\Big]\Big\}$$
$$=\frac{1}{2}\frac{z^2\zeta^2}{\zeta^2-z^2}\Big\{\Big[\mathrm{J}_{\nu+n+1}^2(z)\mathrm{J}_{-\nu-n}(\zeta)\mathrm{N}_{-\nu-n}(\zeta)$$
$$-\mathrm{J}_{\nu+n}^2(z)\mathrm{J}_{-\nu-n-1}(\zeta)\mathrm{N}_{-\nu-n-1}(\zeta)\Big]$$
$$-\Big[\mathrm{J}_{\nu}^2(z)\mathrm{J}_{1-\nu}(\zeta)\mathrm{N}_{1-\nu}(\zeta)-\mathrm{J}_{\nu-1}^2(z)\mathrm{J}_{-\nu}(\zeta)\mathrm{N}_{-\nu}(\zeta)\Big]\Big\}, \tag{15.143}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\Big\{(\nu+k)^2\mathrm{J}_{\nu+k}^2(z)\mathrm{J}_{-\nu-k}(\zeta)\mathrm{N}_{-\nu-k}(\zeta)$$
$$+\frac{z^2\zeta^2}{\zeta^2+z^2}\Big[\mathrm{J}_{\nu+k}'^2(z)\mathrm{J}_{-\nu-k}(\zeta)\mathrm{N}_{-\nu-k}(\zeta)+\mathrm{J}_{\nu+k}^2(z)\mathrm{J}_{-\nu-k}'(\zeta)\mathrm{N}_{-\nu-k}'(\zeta)\Big]\Big\}$$
$$=\frac{1}{2}\frac{z^2\zeta^2}{\zeta^2+z^2}\Big\{(-1)^n\Big[\mathrm{J}_{\nu+n+1}^2(z)\mathrm{J}_{-\nu-n}(\zeta)\mathrm{N}_{-\nu-n}(\zeta)$$
$$+\mathrm{J}_{\nu+n}^2(z)\mathrm{J}_{-\nu-n-1}(\zeta)\mathrm{N}_{-\nu-n-1}(\zeta)\Big]$$
$$+\Big[\mathrm{J}_{\nu}^2(z)\mathrm{J}_{1-\nu}(\zeta)\mathrm{N}_{1-\nu}(\zeta)+\mathrm{J}_{\nu-1}^2(z)\mathrm{J}_{-\nu}(\zeta)\mathrm{N}_{-\nu}(\zeta)\Big]\Big\}, \tag{15.144}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\Big\{(\nu+k)^2\mathrm{J}^2_{-\nu-k}(z)\mathrm{J}_{\nu+k}(\zeta)\mathrm{N}_{\nu+k}(\zeta)$$
$$+\frac{z^2\zeta^2}{\zeta^2-z^2}\Big[\mathrm{J}'^2_{-\nu-k}(z)\mathrm{J}_{\nu+k}(\zeta)\mathrm{N}_{\nu+k}(\zeta)-\mathrm{J}^2_{-\nu-k}(z)\mathrm{J}'_{\nu+k}(\zeta)\mathrm{N}'_{\nu+k}(\zeta)\Big]\Big\}$$
$$=\frac{1}{2}\frac{z^2\zeta^2}{\zeta^2-z^2}\Big\{\Big[\mathrm{J}^2_{-\nu-n-1}(z)\mathrm{J}_{\nu+n}(\zeta)\mathrm{N}_{\nu+n}(\zeta)-\mathrm{J}^2_{-\nu-n}(z)\mathrm{J}_{\nu+n+1}(\zeta)\mathrm{N}_{\nu+n+1}(\zeta)\Big]$$
$$-\Big[\mathrm{J}^2_{-\nu}(z)\mathrm{J}_{\nu-1}(\zeta)\mathrm{N}_{\nu-1}(\zeta)-\mathrm{J}^2_{1-\nu}(z)\mathrm{J}_{\nu}(\zeta)\mathrm{N}_{\nu}(\zeta)\Big]\Big\}, \tag{15.145}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\Big\{(\nu+k)^2\mathrm{J}^2_{-\nu-k}(z)\mathrm{J}_{\nu+k}(\zeta)\mathrm{N}_{\nu+k}(\zeta)$$
$$+\frac{z^2\zeta^2}{\zeta^2+z^2}\Big[\mathrm{J}'^2_{-\nu-k}(z)\mathrm{J}_{\nu+k}(\zeta)\mathrm{N}_{\nu+k}(\zeta)+\mathrm{J}^2_{-\nu-k}(z)\mathrm{J}'_{\nu+k}(\zeta)\mathrm{N}'_{\nu+k}(\zeta)\Big]\Big\}$$
$$=\frac{1}{2}\frac{z^2\zeta^2}{\zeta^2+z^2}\Big\{(-1)^n\Big[\mathrm{J}^2_{-\nu-n-1}(z)\mathrm{J}_{\nu+n}(\zeta)\mathrm{N}_{\nu+n}(\zeta)$$
$$+\mathrm{J}^2_{-\nu-n}(z)\mathrm{J}_{\nu+n+1}(\zeta)\mathrm{N}_{\nu+n+1}(\zeta)\Big]$$
$$+\Big[\mathrm{J}^2_{-\nu}(z)\mathrm{J}_{\nu-1}(\zeta)\mathrm{N}_{\nu-1}(\zeta)+\mathrm{J}^2_{1-\nu}(z)\mathrm{J}_{\nu}(\zeta)\mathrm{N}_{\nu}(\zeta)\Big]\Big\}, \tag{15.146}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\Big\{(\nu+k)^2\mathrm{J}^2_{-\nu-k}(z)\mathrm{J}_{-\nu-k}(\zeta)\mathrm{N}_{-\nu-k}(\zeta)$$
$$+\frac{z^2\zeta^2}{\zeta^2-z^2}\Big[\mathrm{J}'^2_{-\nu-k}(z)\mathrm{J}_{-\nu-k}(\zeta)\mathrm{N}_{-\nu-k}(\zeta)-\mathrm{J}^2_{-\nu-k}(z)\mathrm{J}'_{-\nu-k}(\zeta)\mathrm{N}'_{-\nu-k}(\zeta)\Big]\Big\}$$
$$=\frac{1}{2}\frac{z^2\zeta^2}{\zeta^2-z^2}\Big\{\Big[\mathrm{J}^2_{-\nu-n-1}(z)\mathrm{J}_{-\nu-n}(\zeta)\mathrm{N}_{-\nu-n}(\zeta)$$
$$-\mathrm{J}^2_{-\nu-n}(z)\mathrm{J}_{-\nu-n-1}(\zeta)\mathrm{N}_{-\nu-n-1}(\zeta)\Big]$$
$$-\Big[\mathrm{J}^2_{-\nu}(z)\mathrm{J}_{1-\nu}(\zeta)\mathrm{N}_{1-\nu}(\zeta)-\mathrm{J}^2_{1-\nu}(z)\mathrm{J}_{-\nu}(\zeta)\mathrm{N}_{-\nu}(\zeta)\Big]\Big\}, \tag{15.147}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\Big\{(\nu+k)^2\mathrm{J}^2_{-\nu-k}(z)\mathrm{J}_{-\nu-k}(\zeta)\mathrm{N}_{-\nu-k}(\zeta)$$
$$+\frac{z^2\zeta^2}{\zeta^2+z^2}\Big[\mathrm{J}'^2_{-\nu-k}(z)\mathrm{J}_{-\nu-k}(\zeta)\mathrm{N}_{-\nu-k}(\zeta)+\mathrm{J}^2_{-\nu-k}(z)\mathrm{J}'_{-\nu-k}(\zeta)\mathrm{N}'_{-\nu-k}(\zeta)\Big]\Big\}$$
$$=\frac{1}{2}\frac{z^2\zeta^2}{\zeta^2+z^2}\Big\{(-1)^n\Big[\mathrm{J}^2_{-\nu-n-1}(z)\mathrm{J}_{-\nu-n}(\zeta)\mathrm{N}_{-\nu-n}(\zeta)$$
$$+\mathrm{J}^2_{-\nu-n}(z)\mathrm{J}_{-\nu-n-1}(\zeta)\mathrm{N}_{-\nu-n-1}(\zeta)\Big]$$
$$+\Big[\mathrm{J}^2_{-\nu}(z)\mathrm{J}_{1-\nu}(\zeta)\mathrm{N}_{1-\nu}(\zeta)+\mathrm{J}^2_{1-\nu}(z)\mathrm{J}_{-\nu}(\zeta)\mathrm{N}_{-\nu}(\zeta)\Big]\Big\}. \tag{15.148}$$

以上导出的四次型求和公式，或可称为双二次型，因为它们同时依赖于两个变量 (z 与 ζ)．完全可以写出这些公式在 $\zeta \to z$ 时的极限形式．其中部分公式，如 (15.100) 及 (15.106) 式等，它们在 $\zeta = z$ 时的极限形式，将退化为二次型求和公式，这些结果已在上一节中给出，无需重复．除了这些结果之外，我们可以写出其余公式的极限形式．在推导时，有时还需要利用 l'Hôpital 法则求极限．下面就列出这些公式的极限形式：

$$\sum_{k=0}^{n}(\nu+k)\mathrm{J}_{\nu+k}^3(z)\,\mathrm{J}'_{\nu+k}(z) = \frac{z}{4}\Big[-\mathrm{J}_{\nu+n+1}^2(z)\,\mathrm{J}_{\nu+n}^2(z) + \mathrm{J}_{\nu}^2(z)\,\mathrm{J}_{\nu-1}^2(z)\Big], \tag{15.149}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\nu+k)\mathrm{J}_{\nu+k}^2(z)\Big\{\Big[z^2-(\nu+k)^2\Big]\mathrm{J}_{\nu+k}^2(z) + 2z\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{J}'_{\nu+k}(z) + z^2\mathrm{J}'^2_{\nu+k}(z)\Big\}\\ &\quad= \frac{z^3}{2}\Big\{(-1)^{n+1}\mathrm{J}_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{J}_{\nu+n}(z)\Big[\mathrm{J}_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{J}'_{\nu+n}(z) - \mathrm{J}'_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{J}_{\nu+n}(z)\Big]\\ &\qquad - \mathrm{J}_{\nu}(z)\,\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\Big[\mathrm{J}_{\nu}(z)\,\mathrm{J}'_{\nu-1}(z) - \mathrm{J}'_{\nu}(z)\,\mathrm{J}_{\nu-1}(\zeta)\Big]\Big\},\end{aligned} \tag{15.150}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n}(\nu+k)\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)\Big[\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{J}'_{-\nu-k}(z) + \mathrm{J}'_{\nu+k}(z)\,\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)\Big]\\ &\quad= \frac{z}{4}\Big\{-\Big[\mathrm{J}_{\nu+n+1}^2(z)\,\mathrm{J}_{-\nu-n}^2(z) + \mathrm{J}_{\nu+n}^2(z)\,\mathrm{J}_{-\nu-n-1}^2(z)\Big]\\ &\qquad + \Big[\mathrm{J}_{\nu}^2(z)\,\mathrm{J}_{1-\nu}^2(z) + \mathrm{J}_{\nu-1}^2(z)\,\mathrm{J}_{-\nu}^2(z)\Big]\Big\},\end{aligned} \tag{15.151}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n}(\nu+k)\mathrm{J}_{-\nu-k}^3(z)\,\mathrm{J}'_{-\nu-k}(z)\\ &\quad= \frac{z}{4}\Big[-\mathrm{J}_{-\nu-n-1}^2(z)\,\mathrm{J}_{-\nu-n}^2(z) + \mathrm{J}_{-\nu}^2(z)\,\mathrm{J}_{1-\nu}^2(z)\Big],\end{aligned} \tag{15.152}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\nu+k)\mathrm{J}_{-\nu-k}^2(z)\\ &\qquad\times\Big\{\Big[z^2-(\nu+k)^2\Big]\mathrm{J}_{-\nu-k}^2(z) + 2z\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)\,\mathrm{J}'_{-\nu-k}(z) + z^2\mathrm{J}'^2_{-\nu-k}(z)\Big\}\\ &\quad= \frac{z^3}{2}\Big\{(-1)^{n+1}\mathrm{J}_{-\nu-n-1}(z)\,\mathrm{J}_{-\nu-n}(z)\\ &\qquad\times\Big[\mathrm{J}_{-\nu-n-1}(z)\,\mathrm{J}'_{-\nu-n}(z) - \mathrm{J}'_{-\nu-n-1}(z)\,\mathrm{J}_{-\nu-n}(z)\Big]\\ &\qquad - \mathrm{J}_{-\nu}(z)\,\mathrm{J}_{1-\nu 1}(z)\Big[\mathrm{J}_{-\nu}(z)\,\mathrm{J}'_{1-\nu}(z) - \mathrm{J}'_{-\nu}(z)\,\mathrm{J}_{1-\nu}(\zeta)\Big]\Big\},\end{aligned} \tag{15.153}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(\nu+k)\mathrm{N}_{\nu+k}^3(z)\,\mathrm{N}'_{\nu+k}(z) = \frac{z}{4}\Big[-\mathrm{N}_{\nu+n+1}^2(z)\,\mathrm{N}_{\nu+n}^2(z) + \mathrm{N}_{\nu}^2(z)\,\mathrm{N}_{\nu-1}^2(z)\Big], \tag{15.154}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\nu+k)\mathrm{N}_{\nu+k}^2(z)$$
$$\times\left\{\left[z^2-(\nu+k)^2\right]\mathrm{N}_{\nu+k}^2(z)+2z\mathrm{N}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{N}_{\nu+k}'(z)+z^2\mathrm{N}_{\nu+k}'^2(z)\right\}$$
$$=\frac{z^3}{2}\left\{(-1)^{n+1}\mathrm{N}_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{N}_{\nu+n}(z)\left[\mathrm{N}_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{N}_{\nu+n}'(z)-\mathrm{N}_{\nu+n+1}'(z)\,\mathrm{N}_{\nu+n}(z)\right]\right.$$
$$\left.-\mathrm{N}_{\nu}(z)\,\mathrm{N}_{\nu-1}(z)\left[\mathrm{N}_{\nu}(z)\,\mathrm{N}_{\nu-1}'(z)-\mathrm{N}_{\nu}'(z)\,\mathrm{N}_{\nu-1}(\zeta)\right]\right\},\tag{15.155}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(\nu+k)\mathrm{N}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{N}_{-\nu-k}(z)\left[\mathrm{N}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{N}_{-\nu-k}'(z)+\mathrm{N}_{\nu+k}'(z)\,\mathrm{N}_{-\nu-k}(z)\right]$$
$$=\frac{z}{4}\left\{-\left[\mathrm{N}_{\nu+n+1}^2(z)\,\mathrm{N}_{-\nu-n}^2(z)+\mathrm{N}_{\nu+n}^2(z)\,\mathrm{N}_{-\nu-n-1}^2(z)\right]\right.$$
$$\left.+\left[\mathrm{N}_{\nu}^2(z)\,\mathrm{N}_{1-\nu}^2(z)+\mathrm{N}_{\nu-1}^2(z)\,\mathrm{N}_{-\nu}^2(z)\right]\right\},\tag{15.156}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(\nu+k)\mathrm{N}_{-\nu-k}^3(z)\,\mathrm{N}_{-\nu-k}'(z)$$
$$=\frac{z}{4}\left[-\mathrm{N}_{-\nu-n-1}^2(z)\,\mathrm{N}_{-\nu-n}^2(z)+\mathrm{N}_{-\nu}^2(z)\,\mathrm{N}_{1-\nu}^2(z)\right],\tag{15.157}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\nu+k)\mathrm{N}_{-\nu-k}^2(z)$$
$$\times\left\{\left[z^2-(\nu+k)^2\right]\mathrm{N}_{-\nu-k}^2(z)+2z\mathrm{N}_{-\nu-k}(z)\,\mathrm{N}_{-\nu-k}'(z)+z^2\mathrm{N}_{-\nu-k}'^2(z)\right\}$$
$$=\frac{z^3}{2}\left\{(-1)^{n+1}\mathrm{N}_{-\nu-n-1}(z)\,\mathrm{N}_{-\nu-n}(z)\right.$$
$$\times\left[\mathrm{N}_{-\nu-n-1}(z)\,\mathrm{N}_{-\nu-n}'(z)-\mathrm{N}_{-\nu-n-1}'(z)\,\mathrm{N}_{-\nu-n}(z)\right]$$
$$\left.-\mathrm{N}_{-\nu}(z)\,\mathrm{N}_{1-\nu1}(z)\left[\mathrm{N}_{-\nu}(z)\,\mathrm{N}_{1-\nu}'(z)-\mathrm{N}_{-\nu}'(z)\,\mathrm{N}_{1-\nu}(\zeta)\right]\right\},\tag{15.158}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(\nu+k)\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{N}_{\nu+k}(z)\left[\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{N}_{\nu+k}'(z)+\mathrm{J}_{\nu+k}'(z)\mathrm{N}_{\nu+k}(z)\right]$$
$$=\frac{z}{2}\left[-\mathrm{J}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{N}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{J}_{\nu+n}(z)\mathrm{N}_{\nu+n}(z)+\mathrm{J}_{\nu}(z)\mathrm{N}_{\nu}(z)\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\mathrm{N}_{\nu-1}(z)\right],\tag{15.159}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\nu+k)\left\{\mathrm{J}_{\nu+k}^2(z)\right.$$
$$\times\left[\left(z^2-(\nu+k)^2\right)\mathrm{N}_{\nu+k}^2(z)+2z\mathrm{N}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{N}_{\nu+k}'(z)+z^2\mathrm{N}_{\nu+k}'^2(z)\right]$$

$$+ \mathrm{N}_{\nu+k}^2(z)\Big[\Big(z^2-(\nu+k)^2\Big)\mathrm{J}_{\nu+k}^2(z) + 2z\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{J}_{\nu+k}'(z) + z^2\mathrm{J}_{\nu+k}'^2(z)\Big]\Big\}$$

$$= \frac{z^3}{2}\Big\{(-1)^{n+1}\mathrm{J}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{J}_{\nu+n}(z)\Big[\mathrm{N}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{N}_{\nu+n}'(z) - \mathrm{N}_{\nu+n+1}'(z)\mathrm{N}_{\nu+n}(z)\Big]$$

$$+ (-1)^{n+1}\mathrm{N}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{N}_{\nu+n}(z)\Big[\mathrm{J}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{J}_{\nu+n}'(z) - \mathrm{J}_{\nu+n+1}'(z)\mathrm{J}_{\nu+n}(z)\Big]$$

$$- \mathrm{J}_{\nu}(z)\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\Big[\mathrm{N}_{\nu}(z)\mathrm{N}_{\nu-1}'(z) - \mathrm{N}_{\nu}'(z)\mathrm{N}_{\nu-1}(z)\Big]$$

$$- \mathrm{N}_{\nu}(z)\mathrm{N}_{\nu-1}(z)\Big[\mathrm{J}_{\nu}(z)\mathrm{J}_{\nu-1}'(z) - \mathrm{J}_{\nu}(z)'\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\Big]\Big\}, \tag{15.160}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(\nu+k)\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)\Big[\mathrm{N}_{\nu+k}(z)\mathrm{N}_{-\nu-k}'(z) + \mathrm{N}_{\nu+k}'(z)\mathrm{N}_{-\nu-k}(z)\Big]$$

$$+ \mathrm{N}_{\nu+k}(z)\mathrm{N}_{-\nu-k}(z)\Big[\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{J}_{-\nu-k}'(z) + \mathrm{J}_{\nu+k}'(z)\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)\Big]\Big\}$$

$$= \frac{z}{2}\Big\{ - \Big[\mathrm{J}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{N}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{J}_{-\nu-n}(z)\mathrm{N}_{-\nu-n}(z)$$

$$+ \mathrm{J}_{\nu+n}(z)\mathrm{N}_{\nu+n}(z)\mathrm{J}_{-\nu-n-1}(z)\mathrm{N}_{-\nu-n-1}(z)\Big]$$

$$+ \Big[\mathrm{J}_{\nu}(z)\mathrm{N}_{\nu}(z)\mathrm{J}_{1-\nu}(z)\mathrm{N}_{1-\nu}(z) + \mathrm{J}_{\nu-1}(z)\mathrm{N}_{\nu-1}(z)\mathrm{J}_{-\nu}(z)\mathrm{N}_{-\nu}(z)\Big]\Big\}, \tag{15.161}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(\nu+k)\,\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)\mathrm{N}_{-\nu-k}(z)\Big[\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)\mathrm{N}_{-\nu-k}'(z) + \mathrm{J}_{-\nu-k}'(z)\mathrm{N}_{-\nu-k}(z)\Big]$$

$$= \frac{z}{2}\Big[- \mathrm{J}_{-\nu-n-1}(z)\mathrm{N}_{-\nu-n-1}(z)\mathrm{J}_{-\nu-n}(z)\mathrm{N}_{-\nu-n}(z)$$

$$+ \mathrm{J}_{-\nu}(z)\mathrm{N}_{-\nu}(z)\mathrm{J}_{1-\nu}(z)\mathrm{N}_{1-\nu}(z)\Big], \tag{15.162}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(\nu+k)\Big\{\mathrm{J}_{\nu+k}^2(z)\Big[3\,\mathrm{J}_{\nu+k}'(z)\mathrm{N}_{\nu+k}(z) + \mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{N}_{\nu+k}'(z)\Big]$$

$$= \frac{z}{2}\Big\{ - \mathrm{J}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{J}_{\nu+n}(z)\Big[\mathrm{J}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{N}_{\nu+n}(\zeta) + \mathrm{J}_{\nu+n}(z)\mathrm{N}_{\nu+n+1}(z)\Big]$$

$$+ \mathrm{J}_{\nu}(z)\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\Big[\mathrm{J}_{\nu}(z)\mathrm{N}_{\nu-1}(z) + \mathrm{J}_{\nu-1}(z)\mathrm{N}_{\nu}(z)\Big]\Big\}, \tag{15.163}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(\nu+k)\Big\{\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)\Big[\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{N}_{-\nu-k}'(z) + \mathrm{J}_{\nu+k}'(z)\mathrm{N}_{-\nu-k}(z)\Big]$$

$$+ \mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{N}_{-\nu-k}(z)\Big[\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{J}_{-\nu-k}'(z) + \mathrm{J}_{\nu+k}'(z)\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)\Big]\Big\}$$

$$= \frac{z}{2}\Big\{ - \Big[\mathrm{J}_{\nu+n+1}^2(z)\mathrm{J}_{-\nu-n}(z)\mathrm{N}_{-\nu-n}(z) + \mathrm{J}_{\nu+n}^2(z)\mathrm{J}_{-\nu-n-1}(z)\mathrm{N}_{-\nu-n-1}(z)\Big]$$

$$+\left[\mathrm{J}_{\nu}^{2}(z)\mathrm{J}_{1-\nu}(z)\mathrm{N}_{1-\nu}(z)+\mathrm{J}_{\nu-1}^{2}(z)\mathrm{J}_{-\nu}(z)\mathrm{N}_{-\nu}(z)\right]\Bigg\}, \tag{15.164}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(\nu+k)\Bigg\{\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\left[\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)\mathrm{N}'_{\nu+k}(z)+\mathrm{J}'_{-\nu-k}(z)\mathrm{N}_{\nu+k}(z)\right]$$
$$+\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)\mathrm{N}_{\nu+k}(z)\left[\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{J}'_{-\nu-k}(z)+\mathrm{J}'_{\nu+k}(z)\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)\right]\Bigg\}$$
$$=\frac{z}{2}\Bigg\{-\left[\mathrm{J}_{-\nu-n-1}^{2}(z)\mathrm{J}_{\nu+n}(z)\mathrm{N}_{\nu+n}(z)+\mathrm{J}_{-\nu-n}^{2}(z)\mathrm{J}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{N}_{\nu+n+1}(z)\right]$$
$$+\left[\mathrm{J}_{-\nu}^{2}(z)\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\mathrm{N}_{\nu-1}(z)+\mathrm{J}_{1-\nu}^{2}(z)\mathrm{J}_{\nu}(z)\mathrm{N}_{\nu}(z)\right]\Bigg\}, \tag{15.165}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(\nu+k)\mathrm{J}_{-\nu-k}^{2}(z)\left[3\,\mathrm{J}'_{-\nu-k}(z)\mathrm{N}_{-\nu-k}(z)+\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)\mathrm{N}'_{-\nu-k}(z)\right]$$
$$=\frac{z}{2}\Bigg\{-\mathrm{J}_{-\nu-n-1}(z)\mathrm{J}_{-\nu-n}(z)\left[\mathrm{J}_{-\nu-n-1}(z)\mathrm{N}_{-\nu-n}(z)+\mathrm{J}_{-\nu-n}(z)\mathrm{N}_{-\nu-n-1}(z)\right]$$
$$+\mathrm{J}_{-\nu}(z)\mathrm{J}_{1-\nu}(z)\left[\mathrm{J}_{-\nu}(z)\mathrm{N}_{1-\nu}(z)+\mathrm{J}_{1-\nu}(z)\mathrm{J}_{-\nu}(z)\right]\Bigg\}, \tag{15.166}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\Bigg\{(\nu+k)^{2}\mathrm{J}_{\nu+k}^{4}(z)+z\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{J}'_{\nu+k}(z)$$
$$\times\left[\left(z^{2}-(\nu+k)^{2}\right)\mathrm{J}_{\nu+k}^{2}(z)+z^{2}\mathrm{J}'^{2}_{\nu+k}(z)+z\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{J}'_{\nu+k}(z)\right]\Bigg\}$$
$$=\frac{z^{3}}{2}\Bigg\{\mathrm{J}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{J}_{\nu+n}(z)\left[\mathrm{J}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{J}'_{\nu+n}(z)-\mathrm{J}'_{\nu+n+1}(z)\mathrm{J}_{\nu+n}(z)\right]$$
$$-\mathrm{J}_{\nu}(z)\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\left[\mathrm{J}_{\nu}(z)\mathrm{J}'_{\nu-1}(z)-\mathrm{J}'_{\nu}(z)\mathrm{J}_{\nu}(z)\right]\Bigg\}, \tag{15.167}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\mathrm{J}_{\nu+k}^{2}(z)\left[(\nu+k)^{2}\mathrm{J}_{\nu+k}^{2}(z)+z^{2}\mathrm{J}'^{2}_{\nu+k}(z)\right]$$
$$=\frac{z^{2}}{2}\left[(-1)^{n}\mathrm{J}_{\nu+n+1}^{2}(z)\mathrm{J}_{\nu+n}^{2}(z)+\mathrm{J}_{\nu}^{2}(z)\mathrm{J}_{\nu-1}^{2}(z)\right], \tag{15.168}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\Bigg\{(\nu+k)^{2}\mathrm{J}_{\nu+k}^{2}(z)\mathrm{J}_{-\nu-k}^{2}(z)+z^{3}\mathrm{J}'^{2}_{\nu+k}(z)\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)\mathrm{J}'_{-\nu-k}(z)$$
$$+z\left[z^{2}-(\nu+k)^{2}\right]\mathrm{J}_{\nu+k}^{2}(z)\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)\mathrm{J}'_{-\nu-k}(z)+z^{2}\mathrm{J}_{\nu+k}^{2}(z)\mathrm{J}'^{2}_{-\nu-k}(z)\Bigg\}$$
$$=\frac{z^{3}}{2}\Bigg\{\left[\mathrm{J}_{\nu+n+1}^{2}(z)\mathrm{J}_{-\nu-n}(z)\mathrm{J}'_{-\nu-n}(z)-\mathrm{J}_{\nu+n}^{2}(z)\mathrm{J}_{-\nu-n-1}(z)\mathrm{J}'_{-\nu-n-1}(z)\right]$$
$$-\left[\mathrm{J}_{\nu}^{2}(z)\mathrm{J}_{1-\nu}(z)\mathrm{J}'_{1-\nu}(z)-\mathrm{J}_{\nu-1}^{2}(z)\mathrm{J}_{-\nu}(z)\mathrm{J}'_{-\nu}(z)\right]\Bigg\}, \tag{15.169}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left\{(\nu+k)^2 J_{\nu+k}^2(z)J_{-\nu-k}^2(z)+\frac{z^2}{2}\left[J_{\nu+k}^2(z)J'^2_{-\nu-k}(z)+J'^2_{\nu+k}(z)J_{-\nu-k}^2(z)\right]\right\}$$
$$=\frac{z^2}{4}\left\{(-1)^n\left[J_{\nu+n+1}^2(z)J_{-\nu-n}^2(z)+J_{\nu+n}^2(z)J_{-\nu-n-1}^2(z)\right]\right.$$
$$\left.+\left[J_\nu^2(z)J_{1-\nu}^2(z)+J_{\nu-1}^2(z)J_{-\nu}^2(z)\right]\right\}, \tag{15.170}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\left\{(\nu+k)^2 J_{-\nu-k}^4(z)+zJ_{-\nu-k}(z)J'_{-\nu-k}(z)\right.$$
$$\left.\times\left[\left(z^2-(\nu+k)^2\right)J_{-\nu-k}^2(z)+z^2J'^2_{-\nu-k}(z)+zJ_{-\nu-k}(z)J'_{-\nu-k}(z)\right]\right\}$$
$$=\frac{z^3}{2}\left\{J_{-\nu-n-1}(z)J_{-\nu-n}(z)\left[J_{-\nu-n-1}(z)J'_{-\nu-n}(z)-J'_{-\nu-n-1}(z)J_{-\nu-n}(z)\right]\right.$$
$$\left.-J_{-\nu}(z)J_{1-\nu}(z)\left[J_{-\nu}(z)J'_{1-\nu}(z)-J'_{-\nu}(z)J_{1-\nu}(z)\right]\right\}, \tag{15.171}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k J_{-\nu-k}^2(z)\left[(\nu+k)^2J_{-\nu-k}^2(z)+z^2J'^2_{-\nu-k}(z)\right]$$
$$=\frac{z^2}{2}\left\{(-1)^nJ_{-\nu-n-1}^2(z)J_{-\nu-n}^2(z)+J_{-\nu}^2(z)J_{1-\nu}^2(z)\right\}, \tag{15.172}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\left\{(\nu+k)^2 N_{\nu+k}^4(z)+zN_{\nu+k}(z)N'_{\nu+k}(z)\right.$$
$$\left.\times\left[\left(z^2-(\nu+k)^2\right)N_{\nu+k}^2(z)+z^2N'^2_{\nu+k}(z)+zN_{\nu+k}(z)N'_{\nu+k}(z)\right]\right\}$$
$$=\frac{z^3}{2}\left\{N_{\nu+n+1}(z)N_{\nu+n}(z)\left[N_{\nu+n+1}(z)N'_{\nu+n}(z)-N'_{\nu+n+1}(z)N_{\nu+n}(z)\right]\right.$$
$$\left.-N_\nu(z)N_{\nu-1}(z)\left[N_\nu(z)N'_{\nu-1}(z)-N'_\nu(z)N_\nu(z)\right]\right\}, \tag{15.173}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^kN_{\nu+k}^2(z)\left[(\nu+k)^2N_{\nu+k}^2(z)+z^2N'^2_{\nu+k}(z)\right]$$
$$=\frac{z^2}{2}\left[(-1)^nN_{\nu+n+1}^2(z)N_{\nu+n}^2(z)+N_\nu^2(z)N_{\nu-1}^2(z)\right], \tag{15.174}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\left\{(\nu+k)^2N_{\nu+k}^2(z)N_{-\nu-k}^2(z)+z^3N'^2_{\nu+k}(z)N_{-\nu-k}(z)N'_{-\nu-k}(z)\right.$$
$$\left.+z\left[z^2-(\nu+k)^2\right]N_{\nu+k}^2(z)N_{-\nu-k}(z)N'_{-\nu-k}(z)+z^2N_{\nu+k}^2(z)N'^2_{-\nu-k}(z)\right\}$$
$$=\frac{z^3}{2}\left\{\left[N_{\nu+n+1}^2(z)N_{-\nu-n}(z)N'_{-\nu-n}(z)-N_{\nu+n}^2(z)N_{-\nu-n-1}(z)N'_{-\nu-n-1}(z)\right]\right.$$
$$\left.-\left[N_\nu^2(z)N_{1-\nu}(z)N'_{1-\nu}(z)-N_{\nu-1}^2(z)N_{-\nu}(z)N'_{-\nu}(z)\right]\right\}, \tag{15.175}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left\{(\nu+k)^2\mathrm{N}_{\nu+k}^2(z)\mathrm{N}_{-\nu-k}^2(z)+\frac{z^2}{2}\left[\mathrm{N}_{\nu+k}'^2(z)\mathrm{N}_{-\nu-k}^2(z)+\mathrm{N}_{\nu+k}^2(z)\mathrm{N}_{-\nu-k}'^2(z)\right]\right\}$$
$$=\frac{z^2}{4}\left\{(-1)^n\left[\mathrm{N}_{\nu+n+1}^2(z)\mathrm{N}_{-\nu-n}^2(z)+\mathrm{N}_{\nu+n}^2(z)\mathrm{N}_{-\nu-n-1}^2(z)\right]\right.$$
$$\left.+\left[\mathrm{N}_{\nu}^2(z)\mathrm{N}_{1-\nu}^2(z)+\mathrm{N}_{\nu-1}^2(z)\mathrm{N}_{-\nu}^2(z)\right]\right\}, \tag{15.176}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\left\{(\nu+k)^2\mathrm{N}_{-\nu-k}^4(z)+z\mathrm{N}_{-\nu-k}(z)\mathrm{N}_{-\nu-k}'(z)\right.$$
$$\left.\times\left[\left(z^2-(\nu+k)^2\right)\mathrm{N}_{-\nu-k}^2(z)+z^2\mathrm{N}_{-\nu-k}'^2(z)+z\mathrm{N}_{-\nu-k}(z)\mathrm{N}_{-\nu-k}'(z)\right]\right\}$$
$$=\frac{z^3}{2}\left\{\mathrm{N}_{-\nu-n-1}(z)\mathrm{N}_{-\nu-n}(z)\left[\mathrm{N}_{-\nu-n-1}(z)\mathrm{N}_{-\nu-n}'(z)-\mathrm{N}_{-\nu-n-1}'(z)\mathrm{N}_{-\nu-n}(z)\right]\right.$$
$$\left.-\mathrm{N}_{-\nu}(z)\mathrm{N}_{1-\nu}(z)\left[\mathrm{N}_{-\nu}(z)\mathrm{N}_{1-\nu}'(z)-\mathrm{N}_{-\nu}'(z)\mathrm{N}_{1-\nu}(z)\right]\right\}, \tag{15.177}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\mathrm{N}_{-\nu-k}^2(z)\left[(\nu+k)^2\mathrm{N}_{-\nu-k}^2(z)+z^2\mathrm{N}_{-\nu-k}'^2(z)\right]$$
$$=\frac{z^2}{2}\left\{(-1)^n\mathrm{N}_{-\nu-n-1}^2(z)\mathrm{N}_{-\nu-n}^2(z)+\mathrm{N}_{-\nu}^2(z)\mathrm{N}_{1-\nu}^2(z)\right\}, \tag{15.178}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\left\{(\nu+k)^2\mathrm{J}_{\nu+k}^2(z)\mathrm{N}_{\nu+k}^2(z)\right.$$
$$+\frac{z}{2}\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{J}_{\nu+k}'(z)\left[\left(z^2-(\nu+k)^2\right)\mathrm{N}_{\nu+k}^2(z)+z^2\mathrm{N}_{\nu+k}'^2(z)+z\mathrm{N}_{\nu+k}(z)\mathrm{N}_{\nu+k}'(z)\right]$$
$$\left.+\frac{z}{2}\mathrm{N}_{\nu+k}(z)\mathrm{N}_{\nu+k}'(z)\left[\left(z^2-(\nu+k)^2\right)\mathrm{J}_{\nu+k}^2(z)+z^2\mathrm{J}_{\nu+k}'^2(z)+z\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{J}_{\nu+k}'(z)\right]\right\}$$
$$=\frac{z^3}{4}\left\{\mathrm{J}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{J}_{\nu+n}(z)\left[\mathrm{N}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{N}_{\nu+n}'(z)-\mathrm{N}_{\nu+n+1}'(z)\mathrm{N}_{\nu+n}(z)\right]\right.$$
$$+\mathrm{N}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{N}_{\nu+n}(z)\left[\mathrm{J}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{J}_{\nu+n}'(z)-\mathrm{J}_{\nu+n+1}'(z)\mathrm{J}_{\nu+n}(z)\right]$$
$$-\mathrm{J}_{\nu}(z)\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\left[\mathrm{N}_{\nu}(z)\mathrm{N}_{\nu-1}'(z)-\mathrm{N}_{\nu}'(z)\mathrm{N}_{\nu-1}(z)\right]$$
$$\left.-\mathrm{N}_{\nu}(z)\mathrm{N}_{\nu-1}(z)\left[\mathrm{J}_{\nu}(z)\mathrm{J}_{\nu-1}'(z)-\mathrm{J}_{\nu}'(z)\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\right]\right\}, \tag{15.179}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{N}_{\nu+k}(z)\left[(\nu+k)^2\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{N}_{\nu+k}(z)+z^2\mathrm{J}_{\nu+k}'(z)\mathrm{N}_{\nu+k}'(z)\right]$$
$$=\frac{z^2}{2}\left\{(-1)^n\mathrm{J}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{N}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{J}_{\nu+n}(z)\mathrm{N}_{\nu+n}(z)\right.$$
$$\left.+\mathrm{J}_{\nu}(z)\mathrm{N}_{\nu}(z)\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\mathrm{N}_{\nu-1}(z)\right\}, \tag{15.180}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\Big[\mathrm{J}'_{\nu+k}(z)\mathrm{N}'_{\nu+k}(z)\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)\mathrm{N}_{-\nu-k}(z)-\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{N}_{\nu+k}(z)\mathrm{J}'_{-\nu-k}(z)\mathrm{N}'_{-\nu-k}(z)\Big]$$
$$=\frac{1}{2}\bigg\{\Big[\mathrm{J}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{N}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{J}_{-\nu-n}(z)\mathrm{N}_{-\nu-n}(z)$$
$$-\mathrm{J}_{\nu+n}(z)\mathrm{N}_{\nu+n}(z)\mathrm{J}_{-\nu-n-1}(z)\mathrm{N}_{-\nu-n-1}(z)\Big]$$
$$-\Big[\mathrm{J}_{\nu}(z)\mathrm{N}_{\nu}(z)\mathrm{J}_{1-\nu}(z)\mathrm{N}_{1-\nu}(z)-\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\mathrm{N}_{\nu-1}(z)\mathrm{J}_{-\nu}(z)\mathrm{N}_{-\nu}(z)\Big]\bigg\},\quad(15.181)$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\bigg\{(\nu+k)^2\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{N}_{\nu+k}(z)\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)\mathrm{N}_{-\nu-k}(z)$$
$$+\frac{z^2}{2}\Big[\mathrm{J}'_{\nu+k}(z)\mathrm{N}'_{\nu+k}(z)\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)\mathrm{N}_{-\nu-k}(z)$$
$$+\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{N}_{\nu+k}(z)\mathrm{J}'_{-\nu-k}(z)\mathrm{N}'_{-\nu-k}(z)\Big]\bigg\}$$
$$=\frac{z^2}{4}\bigg\{(-1)^n\Big[\mathrm{J}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{N}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{J}_{-\nu-n}(z)\mathrm{N}_{-\nu-n}(z)$$
$$+\mathrm{J}_{\nu+n}(z)\mathrm{N}_{\nu+n}(z)\mathrm{J}_{-\nu-n-1}(z)\mathrm{N}_{-\nu-n-1}(z)\Big]$$
$$+\Big[\mathrm{J}_{\nu}(z)\mathrm{N}_{\nu}(z)\mathrm{J}_{1-\nu}(z)\mathrm{N}_{1-\nu}(z)+\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\mathrm{N}_{\nu-1}(z)\mathrm{J}_{-\nu}(z)\mathrm{N}_{-\nu}(z)\Big]\bigg\},\quad(15.182)$$

$$\sum_{k=0}^{n}\bigg\{(\nu+k)^2\mathrm{J}^2_{-\nu-k}(z)\mathrm{N}^2_{-\nu-k}(z)+\frac{z}{2}\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)\mathrm{J}'_{-\nu-k}(z)$$
$$\times\Big[\Big(z^2-(\nu+k)^2\Big)\mathrm{N}^2_{-\nu-k}(z)+z^2\mathrm{N}'^2_{-\nu-k}(z)+z\mathrm{N}_{-\nu-k}(z)\mathrm{N}'_{-\nu-k}(z)\Big]$$
$$+\frac{z}{2}\mathrm{N}_{-\nu-k}(z)\mathrm{N}'_{-\nu-k}(z)$$
$$\times\Big[\Big(z^2-(\nu+k)^2\Big)\mathrm{J}^2_{-\nu-k}(z)+z^2\mathrm{J}'^2_{-\nu-k}(z)+z\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)\mathrm{J}'_{-\nu-k}(z)\Big]\bigg\}$$
$$=\frac{z^3}{4}\bigg\{\mathrm{J}_{-\nu-n-1}(z)\mathrm{J}_{-\nu-n}(z)\Big[\mathrm{N}_{-\nu-n-1}(z)\mathrm{N}'_{-\nu-n}(z)-\mathrm{N}'_{-\nu-n-1}(z)\mathrm{N}_{-\nu-n}(z)\Big]$$
$$+\mathrm{N}_{-\nu-n-1}(z)\mathrm{N}_{-\nu-n}(z)\Big[\mathrm{J}_{-\nu-n-1}(z)\mathrm{J}'_{-\nu-n}(z)-\mathrm{J}'_{-\nu-n-1}(z)\mathrm{J}_{-\nu-n}(z)\Big]$$
$$-\mathrm{J}_{-\nu}(z)\mathrm{J}_{1-\nu}(z)\Big[\mathrm{N}_{-\nu}(z)\mathrm{N}'_{1-\nu}(z)-\mathrm{N}'_{-\nu}(z)\mathrm{N}_{1-\nu}(z)\Big]$$
$$-\mathrm{N}_{-\nu}(z)\mathrm{N}_{1-\nu}(z)\Big[\mathrm{J}_{-\nu}(z)\mathrm{J}'_{1-\nu}(z)-\mathrm{J}'_{-\nu}(z)\mathrm{J}_{1-\nu}(z)\Big]\bigg\},\quad(15.183)$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)\mathrm{N}_{-\nu-k}(z)\Big[(\nu+k)^2\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)\mathrm{N}_{-\nu-k}(z)+z^2\mathrm{J}'_{-\nu-k}(z)\mathrm{N}'_{-\nu-k}(z)\Big]$$
$$=\frac{z^2}{2}\bigg\{(-1)^n\mathrm{J}_{-\nu-n-1}(z)\mathrm{N}_{-\nu-n-1}(z)\mathrm{J}_{-\nu-n}(z)\mathrm{N}_{-\nu-n}(z)$$

$$+ \mathrm{J}_{-\nu}(z)\mathrm{N}_{-\nu}(z)\mathrm{J}_{1-\nu}(z)\mathrm{N}_{1-\nu}(z)\Big\}, \tag{15.184}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\Big\{(\nu+k)^2\mathrm{J}_{\nu+k}^3(z)\mathrm{N}_{\nu+k}(z)$$
$$+ \frac{z^2}{2}\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{J}'_{\nu+k}(z)\Big[\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{N}'_{\nu+k}(z) + \mathrm{J}'_{\nu+k}(z)\mathrm{N}_{\nu+k}(z)\Big]\Big\}$$
$$= \frac{z^2}{4}\Big\{(-1)^n\mathrm{J}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{J}_{\nu+n}(z)\Big[\mathrm{J}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{N}_{\nu+n}(z) + \mathrm{J}_{\nu+n}(z)\mathrm{N}_{\nu+n+1}(z)\Big]$$
$$+ \mathrm{J}_{\nu}(z)\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\Big[\mathrm{J}_{\nu}(z)\mathrm{N}_{\nu-1}(z) + \mathrm{J}_{\nu-1}(z)\mathrm{N}_{\nu}(z)\Big]\Big\}, \tag{15.185}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\Big[\mathrm{J}'^2_{\nu+k}(z)\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)\mathrm{N}_{-\nu-k}(z) - \mathrm{J}^2_{\nu+k}(z)\mathrm{J}'_{-\nu-k}(z)\mathrm{N}'_{-\nu-k}(z)\Big]\Big\}$$
$$= \frac{1}{2}\Big\{\Big[\mathrm{J}^2_{\nu+n+1}(z)\mathrm{J}_{-\nu-n}(z)\mathrm{N}_{-\nu-n}(z) - \mathrm{J}^2_{\nu+n}(z)\mathrm{J}_{-\nu-n-1}(z)\mathrm{N}_{-\nu-n-1}(z)\Big]$$
$$- \Big[\mathrm{J}^2_{\nu}(z)\mathrm{J}_{1-\nu}(z)\mathrm{N}_{1-\nu}(z) - \mathrm{J}^2_{\nu-1}(z)\mathrm{J}_{-\nu}(z)\mathrm{N}_{-\nu}(z)\Big]\Big\}, \tag{15.186}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\Big\{(\nu+k)^2\mathrm{J}^2_{\nu+k}(z)\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)\mathrm{N}_{-\nu-k}(z)$$
$$+ \frac{z^2}{2}\Big[\mathrm{J}'^2_{\nu+k}(z)\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)\mathrm{N}_{-\nu-k}(z) + \mathrm{J}^2_{\nu+k}(z)\mathrm{J}'_{-\nu-k}(z)\mathrm{N}'_{-\nu-k}(z)\Big]\Big\}$$
$$= \frac{z^2}{4}\Big\{(-1)^n\Big[\mathrm{J}^2_{\nu+n+1}(z)\mathrm{J}_{-\nu-n}(z)\mathrm{N}_{-\nu-n}(z)+\mathrm{J}^2_{\nu+n}(z)\mathrm{J}_{-\nu-n-1}(z)\mathrm{N}_{-\nu-n-1}(z)\Big]$$
$$+ \Big[\mathrm{J}^2_{\nu}(z)\mathrm{J}_{1-\nu}(z)\mathrm{N}_{1-\nu}(z) + \mathrm{J}^2_{\nu-1}(z)\mathrm{J}_{-\nu}(z)\mathrm{N}_{-\nu}(z)\Big]\Big\}, \tag{15.187}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\Big[\mathrm{J}'^2_{-\nu-k}(z)\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{N}_{\nu+k}(z) - \mathrm{J}^2_{-\nu-k}(z)\mathrm{J}'_{\nu+k}(z)\mathrm{N}'_{\nu+k}(z)\Big]$$
$$= \frac{1}{2}\Big\{\Big[\mathrm{J}^2_{-\nu-n-1}(z)\mathrm{J}_{\nu+n}(z)\mathrm{N}_{\nu+n}(z) - \mathrm{J}^2_{-\nu-n}(z)\mathrm{J}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{N}_{\nu+n+1}(z)\Big]$$
$$- \Big[\mathrm{J}^2_{-\nu}(z)\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\mathrm{N}_{\nu-1}(z) - \mathrm{J}^2_{1-\nu}(z)\mathrm{J}_{\nu}(z)\mathrm{N}_{\nu}(z)\Big]\Big\}, \tag{15.188}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\Big\{(\nu+k)^2\mathrm{J}^2_{-\nu-k}(z)\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{N}_{\nu+k}(z)$$
$$+ \frac{z^2}{2}\Big[\mathrm{J}'^2_{-\nu-k}(z)\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{N}_{\nu+k}(z) + \mathrm{J}^2_{-\nu-k}(z)\mathrm{J}'_{\nu+k}(z)\mathrm{N}'_{\nu+k}(z)\Big]\Big\}$$
$$= \frac{z^2}{4}\Big\{(-1)^n\Big[\mathrm{J}^2_{-\nu-n-1}(z)\mathrm{J}_{\nu+n}(z)\mathrm{N}_{\nu+n}(z) + \mathrm{J}^2_{-\nu-n}(z)\mathrm{J}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{N}_{\nu+n+1}(z)\Big]$$
$$+ \Big[\mathrm{J}^2_{-\nu}(z)\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\mathrm{N}_{\nu-1}(z) + \mathrm{J}^2_{1-\nu}(z)\mathrm{J}_{\nu}(z)\mathrm{N}_{\nu}(z)\Big]\Big\}, \tag{15.189}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\bigg\{(\nu+k)^2\mathrm{J}^3_{-\nu-k}(z)\mathrm{N}_{-\nu-k}(z)$$
$$+\frac{z^2}{2}\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)\mathrm{J}'_{-\nu-k}(z)\Big[\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)\mathrm{N}'_{-\nu-k}(z)+\mathrm{J}'_{-\nu-k}(z)\mathrm{N}_{-\nu-k}(z)\Big]\bigg\}$$
$$=\frac{z^2}{4}\bigg\{(-1)^n\mathrm{J}_{-\nu-n-1}(z)\mathrm{J}_{-\nu-n}(z)$$
$$\times\Big[\mathrm{J}_{-\nu-n-1}(z)\mathrm{N}_{-\nu-n}(z)+\mathrm{J}_{-\nu-n}(z)\mathrm{N}_{-\nu-n-1}(z)\Big]$$
$$+\mathrm{J}_{-\nu}(z)\mathrm{J}_{1-\nu}(z)\Big[\mathrm{J}_{-\nu}(z)\mathrm{N}_{1-\nu}(z)+\mathrm{J}_{1-\nu}(z)\mathrm{N}_{-\nu}(z)\Big]\bigg\}. \tag{15.190}$$

可以预料，有关 Hankel 函数的四次求和公式，一定也都可以化为上述 Bessel 函数及 Neumann 函数四次求和公式的适当组合.

和 §15.1 相似，上面得到的部分求和公式，至少在 ν 为正实数的条件下，可以有 $n\to\infty$ 的极限形式：

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\nu+k)\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{J}_{\nu+k}(\zeta)\Big[\zeta\,\mathrm{J}'_{\nu+k}(z)\,\mathrm{J}_{\nu+k}(\zeta)+z\,\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{J}'_{\nu+k}(\zeta)\Big]$$
$$=\frac{z\zeta}{4}\Big[\mathrm{J}^2_{\nu}(z)\,\mathrm{J}^2_{\nu-1}(\zeta)+\mathrm{J}^2_{\nu-1}(z)\,\mathrm{J}^2_{\nu}(\zeta)\Big], \tag{15.191}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\nu+k)\mathrm{J}^3_{\nu+k}(z)\,\mathrm{J}'_{\nu+k}(z)=\frac{z}{4}\mathrm{J}^2_{\nu}(z)\,\mathrm{J}^2_{\nu-1}(z), \tag{15.192}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\nu+k)\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{J}_{\nu+k}(\zeta)\Big[\zeta\,\mathrm{J}'_{\nu+k}(z)\,\mathrm{J}_{\nu+k}(\zeta)-z\,\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{J}'_{\nu+k}(\zeta)\Big]$$
$$=-\frac{z\zeta}{4}\Big[\mathrm{J}^2_{\nu}(z)\,\mathrm{J}^2_{\nu-1}(\zeta)-\mathrm{J}^2_{\nu-1}(z)\,\mathrm{J}^2_{\nu}(\zeta)\Big], \tag{15.193}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\nu+k)\mathrm{J}^2_{\nu+k}(z)\Big[\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{J}'_{\nu+k}(z)+z\,\mathrm{J}'^2_{\nu+k}(z)-z\,\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{J}''_{\nu+k}(z)\Big]$$
$$=-\frac{z^2}{2}\mathrm{J}_{\nu}(z)\,\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\Big[\mathrm{J}_{\nu}(z)\,\mathrm{J}'_{\nu-1}(z)-\mathrm{J}'_{\nu}(z)\,\mathrm{J}_{\nu-1}(\zeta)\Big], \tag{15.194}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\nu+k)\bigg\{\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{J}_{\nu+k}(\zeta)\Big[\zeta\mathrm{J}'_{\nu+k}(z)\mathrm{N}_{\nu+k}(\zeta)+z\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{N}'_{\nu+k}(\zeta)\Big]$$
$$+\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{N}_{\nu+k}(\zeta)\Big[\zeta\mathrm{J}'_{\nu+k}(z)\mathrm{J}_{\nu+k}(\zeta)+z\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{J}'_{\nu+k}(\zeta)\Big]\bigg\}$$
$$=\frac{z\zeta}{2}\Big[\mathrm{J}^2_{\nu}(z)\mathrm{J}_{\nu-1}(\zeta)\mathrm{N}_{\nu-1}(\zeta)+\mathrm{J}^2_{\nu-1}(z)\mathrm{J}_{\nu}(\zeta)\mathrm{N}_{\nu}(\zeta)\Big], \tag{15.195}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\nu+k)\bigg\{\mathrm{J}^2_{\nu+k}(z)\Big[3\,\mathrm{J}'_{\nu+k}(z)\mathrm{N}_{\nu+k}(z)+\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{N}'_{\nu+k}(z)\Big]$$
$$=\frac{z}{2}\mathrm{J}_{\nu}(z)\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\Big[\mathrm{J}_{\nu}(z)\mathrm{N}_{\nu-1}(z)+\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\mathrm{N}_{\nu}(z)\Big], \tag{15.196}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\nu+k)\Big\{\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{J}_{\nu+k}(\zeta)\Big[\zeta\mathrm{J}'_{\nu+k}(z)\mathrm{N}_{\nu+k}(\zeta)-z\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{N}'_{\nu+k}(\zeta)\Big]$$
$$+\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{N}_{\nu+k}(\zeta)\Big[\zeta\mathrm{J}'_{\nu+k}(z)\mathrm{J}_{\nu+k}(\zeta)-z\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{J}'_{\nu+k}(\zeta)\Big]\Big\}$$
$$=-\frac{z\zeta}{2}\Big[\mathrm{J}_\nu^2(z)\mathrm{J}_{\nu-1}(\zeta)\mathrm{N}_{\nu-1}(\zeta)-\mathrm{J}_{\nu-1}^2(z)\mathrm{J}_\nu(\zeta)\mathrm{N}_\nu(\zeta)\Big], \tag{15.197}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\Big\{(\nu+k)^2\mathrm{J}_{\nu+k}^2(z)\mathrm{J}_{\nu+k}^2(\zeta)+\frac{z^2\zeta^2}{\zeta^2-z^2}\Big[\mathrm{J}'^2_{\nu+k}(z)\mathrm{J}_{\nu+k}^2(\zeta)-\mathrm{J}_{\nu+k}^2(z)\mathrm{J}'^2_{\nu+k}(\zeta)\Big]\Big\}$$
$$=-\frac{1}{2}\frac{z^2\zeta^2}{\zeta^2-z^2}\Big[\mathrm{J}_\nu^2(z)\mathrm{J}_{\nu-1}^2(\zeta)-\mathrm{J}_{\nu-1}^2(z)\mathrm{J}_\nu^2(\zeta)\Big], \tag{15.198}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\Big\{(\nu+k)^2\mathrm{J}_{\nu+k}^4(z)+z^3\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{J}'_{\nu+k}(z)\Big[\mathrm{J}'^2_{\nu+k}(z)-\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{J}''_{\nu+k}(z)\Big]\Big\}$$
$$=-\frac{z^3}{2}\mathrm{J}_\nu(z)\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\Big[\mathrm{J}_\nu(z)\mathrm{J}'_{\nu-1}(z)-\mathrm{J}'_\nu(z)\mathrm{J}_\nu(z)\Big], \tag{15.199}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\Big\{(\nu+k)^2\mathrm{J}_{\nu+k}^2(z)\mathrm{J}_{\nu+k}^2(\zeta)+\frac{z^2\zeta^2}{\zeta^2+z^2}\Big[\mathrm{J}'^2_{\nu+k}(z)\mathrm{J}_{\nu+k}^2(\zeta)+\mathrm{J}_{\nu+k}^2(z)\mathrm{J}'^2_{\nu+k}(\zeta)\Big]\Big\}$$
$$=\frac{1}{2}\frac{z^2\zeta^2}{\zeta^2+z^2}\Big[\mathrm{J}_\nu^2(z)\mathrm{J}_{\nu-1}^2(\zeta)+\mathrm{J}_{\nu-1}^2(z)\mathrm{J}_\nu^2(\zeta)\Big], \tag{15.200}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\mathrm{J}_{\nu+k}^2(z)\Big[(\nu+k)^2\mathrm{J}_{\nu+k}^2(z)+z^2\mathrm{J}'^2_{\nu+k}(z)\Big]=\frac{z^2}{2}\mathrm{J}_\nu^2(z)\mathrm{J}_{\nu-1}^2(z), \tag{15.201}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\Big\{(\nu+k)^2\mathrm{J}_{\nu+k}^2(z)\mathrm{J}_{\nu+k}(\zeta)\mathrm{N}_{\nu+k}(\zeta)$$
$$+\frac{z^2\zeta^2}{\zeta^2-z^2}\Big[\mathrm{J}'^2_{\nu+k}(z)\mathrm{J}_{\nu+k}(\zeta)\mathrm{N}_{\nu+k}(\zeta)-\mathrm{J}_{\nu+k}^2(z)\mathrm{J}'_{\nu+k}(\zeta)\mathrm{N}'_{\nu+k}(\zeta)\Big]\Big\}$$
$$=-\frac{1}{2}\frac{z^2\zeta^2}{\zeta^2-z^2}\Big[\mathrm{J}_\nu^2(z)\mathrm{J}_{\nu-1}(\zeta)\mathrm{N}_{\nu-1}(\zeta)-\mathrm{J}_{\nu-1}^2(z)\mathrm{J}_\nu(\zeta)\mathrm{N}_\nu(\zeta)\Big], \tag{15.202}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\Big\{(\nu+k)^2\mathrm{J}_{\nu+k}^2(z)\mathrm{J}_{\nu+k}(\zeta)\mathrm{N}_{\nu+k}(\zeta)$$
$$+\frac{z^2\zeta^2}{\zeta^2+z^2}\Big[\mathrm{J}'^2_{\nu+k}(z)\mathrm{J}_{\nu+k}(\zeta)\mathrm{N}_{\nu+k}(\zeta)+\mathrm{J}_{\nu+k}^2(z)\mathrm{J}'_{\nu+k}(\zeta)\mathrm{N}'_{\nu+k}(\zeta)\Big]\Big\}$$
$$=\frac{1}{2}\frac{z^2\zeta^2}{\zeta^2+z^2}\Big[\mathrm{J}_\nu^2(z)\mathrm{J}_{\nu-1}(\zeta)\mathrm{N}_{\nu-1}(\zeta)+\mathrm{J}_{\nu-1}^2(z)\mathrm{J}_\nu(\zeta)\mathrm{N}_\nu(\zeta)\Big], \tag{15.203}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\Big\{(\nu+k)^2\mathrm{J}_{\nu+k}^3(z)\mathrm{N}_{\nu+k}(z)$$
$$+\frac{z^2}{2}\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{J}'_{\nu+k}(z)\Big[\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{N}'_{\nu+k}(z)+\mathrm{J}'_{\nu+k}(z)\mathrm{N}_{\nu+k}(z)\Big]\Big\}$$
$$=\frac{z^2}{4}\mathrm{J}_\nu(z)\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\Big[\mathrm{J}_\nu(z)\mathrm{N}_{\nu-1}(z)+\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\mathrm{N}_\nu(z)\Big]. \tag{15.204}$$

同样，如果 ν 为正实数，若进一步限制 $|z|<|\zeta|$，则还有下列无穷级数：

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\nu+k)\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{J}_{-\nu-k}(\zeta)\Big[\zeta\,\mathrm{J}'_{\nu+k}(z)\,\mathrm{J}_{-\nu-k}(\zeta)+z\,\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{J}'_{-\nu-k}(\zeta)\Big]$$
$$=\frac{z\zeta}{4}\Big[\mathrm{J}_{\nu}^2(z)\,\mathrm{J}_{1-\nu}^2(\zeta)+\mathrm{J}_{\nu-1}^2(z)\,\mathrm{J}_{-\nu}^2(\zeta)\Big],\tag{15.205}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\nu+k)\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{J}_{-\nu-k}(\zeta)\Big[\zeta\,\mathrm{J}'_{\nu+k}(z)\,\mathrm{J}_{-\nu-k}(\zeta)-z\,\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{J}'_{-\nu-k}(\zeta)\Big]$$
$$=-\frac{z\zeta}{4}\Big[\mathrm{J}_{\nu}^2(z)\,\mathrm{J}_{1-\nu}^2(\zeta)-\mathrm{J}_{\nu-1}^2(z)\,\mathrm{J}_{-\nu}^2(\zeta)\Big],\tag{15.206}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\nu+k)\Big\{\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{J}_{-\nu-k}(\zeta)\Big[\zeta\mathrm{J}'_{\nu+k}(z)\mathrm{N}_{-\nu-k}(\zeta)+z\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{N}'_{-\nu-k}(\zeta)\Big]$$
$$+\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{N}_{-\nu-k}(\zeta)\Big[\zeta\mathrm{J}'_{\nu+k}(z)\mathrm{J}_{-\nu-k}(\zeta)+z\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{J}'_{-\nu-k}(\zeta)\Big]\Big\}$$
$$=\frac{z\zeta}{2}\Big[\mathrm{J}_{\nu}^2(z)\mathrm{J}_{1-\nu}(\zeta)\mathrm{N}_{1-\nu}(\zeta)+\mathrm{J}_{\nu-1}^2(z)\mathrm{J}_{-\nu}(\zeta)\mathrm{N}_{-\nu}(\zeta)\Big],\tag{15.207}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\nu+k)\Big\{\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{J}_{-\nu-k}(\zeta)\Big[\zeta\mathrm{J}'_{\nu+k}(z)\mathrm{N}_{-\nu-k}(\zeta)-z\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{N}'_{-\nu-k}(\zeta)\Big]$$
$$+\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{N}_{-\nu-k}(\zeta)\Big[\zeta\mathrm{J}'_{\nu+k}(z)\mathrm{J}_{-\nu-k}(\zeta)-z\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{J}'_{-\nu-k}(\zeta)\Big]\Big\}$$
$$=-\frac{z\zeta}{2}\Big[\mathrm{J}_{\nu}^2(z)\mathrm{J}_{1-\nu}(\zeta)\mathrm{N}_{1-\nu}(\zeta)-\mathrm{J}_{\nu-1}^2(z)\mathrm{J}_{-\nu}(\zeta)\mathrm{N}_{-\nu}(\zeta)\Big],\tag{15.208}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\Big\{(\nu+k)^2\mathrm{J}_{\nu+k}^2(z)\mathrm{J}_{-\nu-k}^2(\zeta)+\frac{z^2\zeta^2}{\zeta^2-z^2}\Big[\mathrm{J}'^2_{\nu+k}(z)\mathrm{J}_{-\nu-k}^2(\zeta)-\mathrm{J}_{\nu+k}^2(z)\mathrm{J}'^2_{-\nu-k}(\zeta)\Big]\Big\}$$
$$=-\frac{1}{2}\frac{z^2\zeta^2}{\zeta^2-z^2}\Big[\mathrm{J}_{\nu}^2(z)\mathrm{J}_{1-\nu}^2(\zeta)-\mathrm{J}_{\nu-1}^2(z)\mathrm{J}_{-\nu}^2(\zeta)\Big],\tag{15.209}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\Big\{(\nu+k)^2\mathrm{J}_{\nu+k}^2(z)\mathrm{J}_{-\nu-k}^2(\zeta)$$
$$+\frac{z^2\zeta^2}{\zeta^2+z^2}\Big[\mathrm{J}'^2_{\nu+k}(z)\mathrm{J}_{-\nu-k}^2(\zeta)+\mathrm{J}_{\nu+k}^2(z)\mathrm{J}'^2_{-\nu-k}(\zeta)\Big]\Big\}$$
$$=\frac{1}{2}\frac{z^2\zeta^2}{\zeta^2+z^2}\Big[\mathrm{J}_{\nu}^2(z)\mathrm{J}_{1-\nu}^2(\zeta)+\mathrm{J}_{\nu-1}^2(z)\mathrm{J}_{-\nu}^2(\zeta)\Big],\tag{15.210}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\Big\{(\nu+k)^2\mathrm{J}_{\nu+k}^2(z)\mathrm{J}_{-\nu-k}(\zeta)\mathrm{N}_{-\nu-k}(\zeta)$$
$$+\frac{z^2\zeta^2}{\zeta^2-z^2}\Big[\mathrm{J}'^2_{\nu+k}(z)\mathrm{J}_{-\nu-k}(\zeta)\mathrm{N}_{-\nu-k}(\zeta)-\mathrm{J}_{\nu+k}^2(z)\mathrm{J}'_{-\nu-k}(\zeta)\mathrm{N}'_{-\nu-k}(\zeta)\Big]\Big\}$$
$$=-\frac{1}{2}\frac{z^2\zeta^2}{\zeta^2-z^2}\Big[\mathrm{J}_{\nu}^2(z)\mathrm{J}_{1-\nu}(\zeta)\mathrm{N}_{1-\nu}(\zeta)-\mathrm{J}_{\nu-1}^2(z)\mathrm{J}_{-\nu}(\zeta)\mathrm{N}_{-\nu}(\zeta)\Big],\tag{15.211}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\Big\{(\nu+k)^2\mathrm{J}^2_{\nu+k}(z)\mathrm{J}_{-\nu-k}(\zeta)\mathrm{N}_{-\nu-k}(\zeta)$$
$$+\frac{z^2\zeta^2}{\zeta^2+z^2}\Big[\mathrm{J}'^2_{\nu+k}(z)\mathrm{J}_{-\nu-k}(\zeta)\mathrm{N}_{-\nu-k}(\zeta)+\mathrm{J}^2_{\nu+k}(z)\mathrm{J}'_{-\nu-k}(\zeta)\mathrm{N}'_{-\nu-k}(\zeta)\Big]\Big\}$$
$$=\frac{1}{2}\frac{z^2\zeta^2}{\zeta^2+z^2}\Big[\mathrm{J}^2_{\nu}(z)\mathrm{J}_{1-\nu}(\zeta)\mathrm{N}_{1-\nu}(\zeta)+\mathrm{J}^2_{\nu-1}(z)\mathrm{J}_{-\nu}(\zeta)\mathrm{N}_{-\nu}(\zeta)\Big].\tag{15.212}$$

更进一步，从原则上说，我们总可以由递推关系 (15.8a) 和 (15.8b) 推出

$$\Big[\frac{\nu}{z}\mathscr{C}_{\nu}(z)-\mathscr{C}'_{\nu}(z)\Big]^r+\Big[\frac{\nu}{z}\mathscr{C}_{\nu}(z)+\mathscr{C}'_{\nu}(z)\Big]^r=\mathscr{C}^r_{\nu+1}(z)+\mathscr{C}^r_{\nu-1}(z),\tag{15.213a}$$
$$\Big[\frac{\nu}{z}\mathscr{C}_{\nu}(z)-\mathscr{C}'_{\nu}(z)\Big]^r-\Big[\frac{\nu}{z}\mathscr{C}_{\nu}(z)+\mathscr{C}'_{\nu}(z)\Big]^r=\mathscr{C}^r_{\nu+1}(z)-\mathscr{C}^r_{\nu-1}(z).\tag{15.213b}$$

从这些公式出发，我们将会得到一系列关于柱函数的 r 次型求和公式. 为节省篇幅，不再罗列.

§15.3 虚宗量柱函数的求和公式

利用虚宗量柱函数与柱函数之间的关系，可以由柱函数的求和公式导出虚宗量柱函数的求和公式. 我们采用另一种做法，即直接从虚宗量柱函数的递推关系

$$-\frac{2\nu}{z}\mathrm{I}_{\nu}(z)=\mathrm{I}_{\nu+1}(z)-\mathrm{I}_{\nu-1}(z),\qquad 2\mathrm{I}'_{\nu}(z)=\mathrm{I}_{\nu+1}(z)+\mathrm{I}_{\nu-1}(z),\tag{15.214}$$
$$\frac{2\nu}{z}\mathrm{K}_{\nu}(z)=\mathrm{K}_{\nu+1}(z)-\mathrm{K}_{\nu-1}(z),\qquad -2\mathrm{K}'_{\nu}(z)=\mathrm{K}_{\nu+1}(z)+\mathrm{K}_{\nu-1}(z)\tag{15.215}$$

出发来推导它们的求和公式，包括它们在 $\zeta\to z$ 时的极限形式. 下面先列出虚宗量柱函数 $\mathrm{I}_{\nu}(z)$ 的二次型求和公式：

$$\sum_{k=0}^{n}(\nu+k)\,\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}_{\nu+k}(\zeta)$$
$$=\frac{1}{2}\frac{z\zeta}{z+\zeta}\Big\{-\Big[\mathrm{I}_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{I}_{\nu+n}(\zeta)+\mathrm{I}_{\nu+n}(z)\,\mathrm{I}_{\nu+n+1}(\zeta)\Big]$$
$$+\Big[\mathrm{I}_{\nu}(z)\,\mathrm{I}_{\nu-1}(\zeta)+\mathrm{I}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{I}_{\nu}(\zeta)\Big]\Big\},\tag{15.216}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\nu+k)\,\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}_{\nu+k}(\zeta)$$
$$=\frac{1}{2}\frac{z\zeta}{z-\zeta}\Big\{(-1)^n\Big[\mathrm{I}_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{I}_{\nu+n}(\zeta)-\mathrm{I}_{\nu+n}(z)\,\mathrm{I}_{\nu+n+1}(\zeta)\Big]$$
$$+\Big[\mathrm{I}_{\nu}(z)\,\mathrm{I}_{\nu-1}(\zeta)-\mathrm{I}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{I}_{\nu}(\zeta)\Big]\Big\},\tag{15.217}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(\nu+k)\,\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-k}(\zeta)$$
$$=\frac{1}{2}\frac{z\zeta}{z+\zeta}\Big\{-\Big[\mathrm{I}_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-n}(\zeta)+\mathrm{I}_{\nu+n}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-n-1}(\zeta)\Big]$$
$$+\Big[\mathrm{I}_{\nu}(z)\,\mathrm{I}_{1-\nu}(\zeta)+\mathrm{I}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu}(\zeta)\Big]\Big\}, \tag{15.218}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\nu+k)\,\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-k}(\zeta)$$
$$=\frac{z^2}{2}\Big\{(-1)^{n+1}\Big[\mathrm{I}_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-n}(\zeta)-\mathrm{I}_{\nu+n}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-n-1}(\zeta)\Big]$$
$$-\Big[\mathrm{I}_{\nu}(z)\,\mathrm{I}_{1-\nu}(\zeta)-\mathrm{I}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu}(\zeta)\Big]\Big\}, \tag{15.219}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(\nu+k)\,\mathrm{I}_{-\nu-k}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-k}(\zeta)$$
$$=\frac{1}{2}\frac{z\zeta}{z+\zeta}\Big\{-\Big[\mathrm{I}_{-\nu-n-1}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-n}(\zeta)+\mathrm{I}_{-\nu-n}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-n-1}(\zeta)\Big]$$
$$+\Big[\mathrm{I}_{-\nu}(z)\,\mathrm{I}_{1-\nu}(\zeta)+\mathrm{I}_{1-\nu}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu}(\zeta)\Big]\Big\}, \tag{15.220}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\nu+k)\,\mathrm{I}_{-\nu-k}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-k}(\zeta)$$
$$=\frac{1}{2}\frac{z\zeta}{z-\zeta}\Big\{(-1)^n\Big[\mathrm{I}_{-\nu-n-1}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-n}(\zeta)-\mathrm{I}_{-\nu-n}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-n-1}(\zeta)\Big]$$
$$+\Big[\mathrm{I}_{-\nu}(z)\,\mathrm{I}_{1-\nu}(\zeta)-\mathrm{I}_{1-\nu}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu}(\zeta)\Big]\Big\}, \tag{15.221}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(\nu+k)\,\mathrm{I}_{\nu+k}^2(z)=\frac{z}{2}\Big[-\mathrm{I}_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{I}_{\nu+n}(z)+\mathrm{I}_{\nu}(z)\,\mathrm{I}_{\nu-1}(z)\Big], \tag{15.222}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\nu+k)\,\mathrm{I}_{\nu+k}^2(z)$$
$$=\frac{z^2}{2}\Big\{(-1)^{n+1}\Big[\mathrm{I}_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{I}'_{\nu+n}(z)-\mathrm{I}_{\nu+n}(z)\,\mathrm{I}'_{\nu+n+1}(z)\Big]$$
$$-\Big[\mathrm{I}_{\nu}(z)\,\mathrm{I}'_{\nu-1}(z)-\mathrm{I}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{I}'_{\nu}(z)\Big]\Big\}, \tag{15.223}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(\nu+k)\,\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-k}(z)$$
$$=\frac{z}{4}\Big\{-\Big[\mathrm{I}_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-n}(z)+\mathrm{I}_{\nu+n}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-n-1}(z)\Big]$$

$$+\left[\mathrm{I}_{\nu}(z)\,\mathrm{I}_{1-\nu}(z)+\mathrm{I}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu}(z)\right]\bigg\}, \tag{15.224}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\nu+k)\,\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-k}(z)\\&\quad=\frac{z^2}{4}\bigg\{(-1)^{n+1}\Big[\mathrm{I}_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{I}'_{-\nu-n}(z)+\mathrm{I}'_{\nu+n}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-n-1}(z)\\&\quad-\mathrm{I}'_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-n}(z)-\mathrm{I}_{\nu+n}(z)\,\mathrm{I}'_{-\nu-n-1}(z)\Big]\\&\quad-\Big[\mathrm{I}_{\nu}(z)\,\mathrm{I}'_{1-\nu}(z)+\mathrm{I}'_{\nu-1}(z)\mathrm{I}_{-\nu}(z)-\mathrm{I}'_{\nu}(z)\,\mathrm{I}_{1-\nu}(z)-\mathrm{I}_{\nu-1}(z)\mathrm{I}'_{-\nu}(z)\Big]\bigg\},\end{aligned} \tag{15.225}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(\nu+k)\,\mathrm{I}^2_{-\nu-k}(z)=\frac{z}{2}\Big[-\mathrm{I}_{-\nu-n-1}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-n}(z)+\mathrm{I}_{-\nu}(z)\,\mathrm{I}_{1-\nu}(z)\Big], \tag{15.226}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\nu+k)\,\mathrm{I}^2_{-\nu-k}(z)\\&\quad=\frac{z^2}{2}\bigg\{(-1)^{n+1}\Big[\mathrm{I}_{-\nu-n-1}(z)\,\mathrm{I}'_{-\nu-n}(z)-\mathrm{I}_{-\nu-n}(z)\,\mathrm{I}'_{-\nu-n-1}(z)\Big]\\&\quad-\Big[\mathrm{I}_{-\nu}(z)\,\mathrm{I}'_{1-\nu}(z)-\mathrm{I}_{1-\nu}(z)\,\mathrm{I}'_{-\nu}(z)\Big]\bigg\},\end{aligned} \tag{15.227}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n}\Big[\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}'_{\nu+k}(\zeta)-\mathrm{I}'_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}_{\nu+k}(\zeta)\Big]\\&\quad=\frac{1}{2}\bigg\{-\Big[\mathrm{I}_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{I}_{\nu+n}(\zeta)-\mathrm{I}_{\nu+n}(z)\,\mathrm{I}_{\nu+n+1}(\zeta)\Big]\\&\quad+\Big[\mathrm{I}_{\nu}(z)\,\mathrm{I}_{\nu-1}(\zeta)-\mathrm{I}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{I}_{\nu}(\zeta)\Big]\bigg\},\end{aligned} \tag{15.228}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\Big[\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}'_{\nu+k}(\zeta)+\mathrm{I}'_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}_{\nu+k}(\zeta)\Big]\\&\quad=\frac{1}{2}\bigg\{(-1)^n\Big[\mathrm{I}_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{I}_{\nu+n}(\zeta)+\mathrm{I}_{\nu+n}(z)\,\mathrm{I}_{\nu+n+1}(\zeta)\Big]\\&\quad+\Big[\mathrm{I}_{\nu}(z)\,\mathrm{I}_{\nu-1}(\zeta)+\mathrm{I}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{I}_{\nu}(\zeta)\Big]\bigg\},\end{aligned} \tag{15.229}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n}\Big[\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}'_{-\nu-k}(\zeta)-\mathrm{I}'_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-k}(\zeta)\Big].\\&\quad=\frac{1}{2}\bigg\{-\Big[\mathrm{I}_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-n}(\zeta)-\mathrm{I}_{\nu+n}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-n-1}(\zeta)\Big]\\&\quad+\Big[\mathrm{I}_{\nu}(z)\,\mathrm{I}_{1-\nu}(\zeta)-\mathrm{I}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu}(\zeta)\Big]\bigg\},\end{aligned} \tag{15.230}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\Big[\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}'_{-\nu-k}(\zeta)+\mathrm{I}'_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-k}(\zeta)\Big]$$
$$=\frac{1}{2}\Big\{(-1)^n\Big[\mathrm{I}_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-n}(\zeta)+\mathrm{I}_{\nu+n}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-n-1}(\zeta)\Big]$$
$$+\Big[\mathrm{I}_{\nu}(z)\,\mathrm{I}_{1-\nu}(\zeta)+\mathrm{I}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu}(\zeta)\Big]\Big\}, \tag{15.231}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\Big[\mathrm{I}_{-\nu-k}(z)\,\mathrm{I}'_{-\nu-k}(\zeta)-\mathrm{I}'_{-\nu-k}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-k}(\zeta)\Big]$$
$$=\frac{1}{2}\Big\{-\Big[\mathrm{I}_{-\nu-n-1}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-n}(\zeta)-\mathrm{I}_{-\nu-n}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-n-1}(\zeta)\Big]$$
$$+\Big[\mathrm{I}_{-\nu}(z)\,\mathrm{I}_{1-\nu}(\zeta)-\mathrm{I}_{1-\nu}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu}(\zeta)\Big]\Big\}, \tag{15.232}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\Big[\mathrm{I}_{-\nu-k}(z)\,\mathrm{I}'_{-\nu-k}(\zeta)+\mathrm{I}'_{-\nu-k}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-k}(\zeta)\Big]$$
$$=\frac{1}{2}\Big\{(-1)^n\Big[\mathrm{I}_{-\nu-n-1}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-n}(\zeta)+\mathrm{I}_{-\nu-n}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-n-1}(\zeta)\Big]$$
$$+\Big[\mathrm{I}_{-\nu}(z)\,\mathrm{I}_{1-\nu}(\zeta)+\mathrm{I}_{1-\nu}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu}(\zeta)\Big]\Big\}, \tag{15.233}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\Big\{\Big[z^2+(\nu+k)^2\Big]\mathrm{I}^2_{\nu+k}(z)-z^2\mathrm{I}'^2_{\nu+k}(\zeta)-z\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}'_{\nu+k}(z)\Big\}$$
$$=-\frac{z^2}{2}\Big\{\Big[\mathrm{I}_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{I}'_{\nu+n}(z)-\mathrm{I}_{\nu+n}(z)\,\mathrm{I}'_{\nu+n+1}(z)\Big]$$
$$-\Big[\mathrm{I}_{\nu}(z)\,\mathrm{I}'_{\nu-1}(z)-\mathrm{I}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{I}'_{\nu}(z)\Big]\Big\}, \tag{15.234}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\mathrm{I}'_{\nu+k}(z)=\frac{1}{2}\Big[(-1)^n\mathrm{I}_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{I}_{\nu+n}(z)+\mathrm{I}_{\nu}(z)\,\mathrm{I}_{\nu-1}(z)\Big], \tag{15.235}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\Big[\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}'_{-\nu-k}(z)-\mathrm{I}'_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-k}(z)\Big]$$
$$=\frac{1}{2}\Big\{-\Big[\mathrm{I}_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-n}(z)-\mathrm{I}_{\nu+n}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-n-1}(z)\Big]$$
$$+\Big[\mathrm{I}_{\nu}(z)\,\mathrm{I}_{1-\nu}(z)-\mathrm{I}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu}(z)\Big]\Big\}, \tag{15.236}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\Big[\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}'_{-\nu-k}(z)+\mathrm{I}'_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-k}(z)\Big]$$
$$=\frac{1}{2}\Big\{(-1)^n\Big[\mathrm{I}_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-n}(z)+\mathrm{I}_{\nu+n}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-n-1}(z)\Big]$$

$$+\left[\mathrm{I}_{\nu}(z)\,\mathrm{I}_{1-\nu}(z)+\mathrm{I}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu}(z)\right]\Bigg\}, \tag{15.237}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\left\{\left[z^2+(\nu+k)^2\right]\mathrm{I}_{-\nu-k}^2(z)-z^2\mathrm{I}'^{\,2}_{-\nu-k}(\zeta)-z\mathrm{I}_{-\nu-k}(z)\,\mathrm{I}'_{-\nu-k}(z)\right\}$$
$$=-\frac{z^2}{2}\Bigg\{\left[\mathrm{I}_{-\nu-n-1}(z)\,\mathrm{I}'_{-\nu-n}(z)-\mathrm{I}_{-\nu-n}(z)\,\mathrm{I}'_{-\nu-n-1}(z)\right]$$
$$-\left[\mathrm{I}_{-\nu}(z)\,\mathrm{I}'_{1-\nu}(z)-\mathrm{I}_{1-\nu}(z)\,\mathrm{I}'_{-\nu}(z)\right]\Bigg\}, \tag{15.238}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\mathrm{I}_{-\nu-k}(z)\,\mathrm{I}'_{-\nu-k}(z)=\frac{1}{2}\left[(-1)^n\mathrm{I}_{-\nu-n-1}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-n}(z)+\mathrm{I}_{-\nu}(z)\,\mathrm{I}_{1-\nu}(z)\right]. \tag{15.239}$$

对于 $\mathrm{K}_{\nu}(z)$，因为根据定义

$$\mathrm{K}_{\nu}(z)=\frac{\pi}{2}\,\frac{\mathrm{I}_{-\nu}(z)-\mathrm{I}_{\nu}(z)}{\sin\pi\nu}, \tag{15.240}$$

所以一定有

$$\mathrm{K}_{\nu}(z)=\mathrm{K}_{-\nu}(z), \tag{15.241}$$

这样，在求和公式中就无需涉及 $\mathrm{K}_{-\nu}(z)$，因而我们就能够写出有关虚宗量柱函数 $\mathrm{K}_{\nu}(z)$ 的下列二次型求和公式：

$$\sum_{k=0}^{n}(\nu+k)\,\mathrm{K}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}(\zeta)$$
$$=\frac{1}{2}\,\frac{z\zeta}{z+\zeta}\Bigg\{\left[\mathrm{K}_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+n}(\zeta)+\mathrm{K}_{\nu+n}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+n+1}(\zeta)\right]$$
$$-\left[\mathrm{K}_{\nu}(z)\,\mathrm{K}_{\nu-1}(\zeta)+\mathrm{K}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{K}_{\nu}(\zeta)\right]\Bigg\}, \tag{15.242}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\nu+k)\,\mathrm{K}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}(\zeta)$$
$$=-\frac{1}{2}\,\frac{z\zeta}{z-\zeta}\Bigg\{(-1)^n\left[\mathrm{K}_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+n}(\zeta)-\mathrm{K}_{\nu+n}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+n+1}(\zeta)\right]$$
$$+\left[\mathrm{K}_{\nu}(z)\,\mathrm{K}_{\nu-1}(\zeta)-\mathrm{K}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{K}_{\nu}(\zeta)\right]\Bigg\}, \tag{15.243}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\left[\mathrm{K}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{K}'_{\nu+k}(\zeta)-\mathrm{K}'_{\nu+k}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}(\zeta)\right]$$
$$=\frac{1}{2}\Bigg\{\left[\mathrm{K}_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+n}(\zeta)-\mathrm{K}_{\nu+n}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+n+1}(\zeta)\right]$$
$$-\left[\mathrm{K}_{\nu}(z)\,\mathrm{K}_{\nu-1}(\zeta)-\mathrm{K}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{K}_{\nu}(\zeta)\right]\Bigg\}, \tag{15.244}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\Big[\mathrm{K}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{K}'_{\nu+k}(\zeta)+\mathrm{K}'_{\nu+k}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}(\zeta)\Big]$$
$$=\frac{1}{2}\bigg\{(-1)^{n+1}\Big[\mathrm{K}_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+n}(\zeta)+\mathrm{K}_{\nu+n}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+n+1}(\zeta)\Big]$$
$$-\Big[\mathrm{K}_{\nu}(z)\,\mathrm{K}_{\nu-1}(\zeta)+\mathrm{K}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{K}_{\nu}(\zeta)\Big]\bigg\},\tag{15.245}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(\nu+k)\,\mathrm{K}^2_{\nu+k}(z)=\frac{z}{2}\Big[\mathrm{K}_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+n}(z)-\mathrm{K}_{\nu}(z)\,\mathrm{K}_{\nu-1}(z)\Big],\tag{15.246}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\nu+k)\,\mathrm{K}^2_{\nu+k}(z)$$
$$=\frac{z^2}{2}\bigg\{(-1)^n\Big[\mathrm{K}_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{K}'_{\nu+n}(z)-\mathrm{K}_{\nu+n}(z)\,\mathrm{K}'_{\nu+n+1}(z)\Big]$$
$$+\Big[\mathrm{K}_{\nu}(z)\,\mathrm{K}'_{\nu-1}(z)-\mathrm{K}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{K}'_{\nu}(z)\Big]\bigg\},\tag{15.247}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\bigg\{\Big[z^2+(\nu+k)^2\Big]\mathrm{K}^2_{\nu+k}(z)-z^2\mathrm{K}'^2_{\nu+k}(z)-z\mathrm{K}_{\nu+k}(z)\mathrm{K}'_{\nu+k}(z)\bigg\}$$
$$=\frac{z^2}{2}\bigg\{\Big[\mathrm{K}_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{K}'_{\nu+n}(z)-\mathrm{K}_{\nu+n}(z)\,\mathrm{K}'_{\nu+n+1}(z)\Big]$$
$$-\Big[\mathrm{K}_{\nu}(z)\,\mathrm{K}'_{\nu-1}(z)-\mathrm{K}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{K}'_{\nu}(z)\Big]\bigg\},\tag{15.248}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}\mathrm{K}_{\nu+k}(z)\mathrm{K}'_{\nu+k}(z)=\frac{1}{2}\Big[(-1)^n\mathrm{K}_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+n}(z)+\mathrm{K}_{\nu}(z)\,\mathrm{K}_{\nu-1}(z)\Big].\tag{15.249}$$

同样，在 $\mathrm{I}_\nu(z)$ 与 $\mathrm{K}_\nu(z)$ 之间存在下列混合型求和公式：

$$\sum_{k=0}^{n}(\nu+k)\,\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}(\zeta)$$
$$=\frac{1}{2}\frac{z\zeta}{z-\zeta}\bigg\{\Big[\mathrm{I}_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+n}(\zeta)+\mathrm{I}_{\nu+n}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+n+1}(\zeta)\Big]$$
$$-\Big[\mathrm{I}_{\nu}(z)\,\mathrm{K}_{\nu-1}(\zeta)+\mathrm{I}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{K}_{\nu}(\zeta)\Big]\bigg\},\tag{15.250}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\nu+k)\,\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}(\zeta)$$
$$=-\frac{1}{2}\frac{z\zeta}{z+\zeta}\bigg\{(-1)^n\Big[\mathrm{I}_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+n}(\zeta)-\mathrm{I}_{\nu+n}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+n+1}(\zeta)\Big]$$
$$+\Big[\mathrm{I}_{\nu}(z)\,\mathrm{K}_{\nu-1}(\zeta)-\mathrm{I}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{K}_{\nu}(\zeta)\Big]\bigg\},\tag{15.251}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(\nu+k)\,\mathrm{I}_{-\nu-k}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}(\zeta)$$
$$=\frac{1}{2}\frac{z\zeta}{z-\zeta}\left\{\left[\mathrm{I}_{-\nu-n-1}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+n}(\zeta)+\mathrm{I}_{-\nu-n}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+n+1}(\zeta)\right]\right.$$
$$\left.-\left[\mathrm{I}_{-\nu}(z)\,\mathrm{K}_{\nu-1}(\zeta)+\mathrm{I}_{1-\nu}(z)\,\mathrm{K}_{\nu}(\zeta)\right]\right\}, \tag{15.252}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\nu+k)\,\mathrm{I}_{-\nu-k}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}(\zeta)$$
$$=-\frac{1}{2}\frac{z\zeta}{z+\zeta}\left\{(-1)^n\left[\mathrm{I}_{-\nu-n-1}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+n}(\zeta)-\mathrm{I}_{-\nu-n}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+n+1}(\zeta)\right]\right.$$
$$\left.+\left[\mathrm{I}_{-\nu}(z)\,\mathrm{K}_{\nu-1}(\zeta)-\mathrm{I}_{1-\nu}(z)\,\mathrm{K}_{\nu}(\zeta)\right]\right\}, \tag{15.253}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(\nu+k)\,\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}(z)$$
$$=\frac{z}{4}\left\{-\left[\mathrm{I}_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{K}'_{\nu+n}(z)-\mathrm{I}'_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+n}(z)\right.\right.$$
$$\left.+\mathrm{I}_{\nu+n}(z)\,\mathrm{K}'_{\nu+n+1}(z)-\mathrm{I}'_{\nu+n}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+n+1}(z)\right]$$
$$\left.+\left[\mathrm{I}_{\nu}(z)\,\mathrm{K}'_{\nu-1}(z)-\mathrm{I}'_{\nu}(z)\,\mathrm{K}_{\nu-1}(z)+\mathrm{I}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{K}'_{\nu}(z)-\mathrm{I}'_{\nu-1}(z)\,\mathrm{K}_{\nu}(z)\right]\right\}, \tag{15.254}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\nu+k)\,\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}(z)$$
$$=-\frac{z}{4}\left\{(-1)^n\left[\mathrm{I}_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+n}(z)-\mathrm{I}_{\nu+n}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+n+1}(z)\right]\right.$$
$$\left.+\left[\mathrm{I}_{\nu}(z)\,\mathrm{K}_{\nu-1}(z)-\mathrm{I}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{K}_{\nu}(z)\right]\right\}, \tag{15.255}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(\nu+k)\,\mathrm{I}_{-\nu-k}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}(z)$$
$$=\frac{z}{4}\left\{-\left[\mathrm{I}_{-\nu-n-1}(z)\,\mathrm{K}'_{\nu+n}(z)-\mathrm{I}'_{-\nu-n-1}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+n}(z)\right.\right.$$
$$\left.+\mathrm{I}_{-\nu-n}(z)\,\mathrm{K}'_{\nu+n+1}(z)-\mathrm{I}'_{-\nu-n}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+n+1}(z)\right]$$
$$\left.+\left[\mathrm{I}_{-\nu}(z)\,\mathrm{K}'_{\nu-1}(z)-\mathrm{I}'_{-\nu}(z)\,\mathrm{K}_{\nu-1}(z)+\mathrm{I}_{1-\nu}(z)\,\mathrm{K}'_{\nu}(z)-\mathrm{I}'_{1-\nu}(z)\,\mathrm{K}_{\nu}(z)\right]\right\}, \tag{15.256}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\nu+k)\,\mathrm{I}_{-\nu-k}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}(z)$$
$$=-\frac{z}{4}\Big\{(-1)^n\Big[\mathrm{I}_{-\nu-n-1}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+n}(z)-\mathrm{I}_{-\nu-n}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+n+1}(z)\Big]$$
$$+\Big[\mathrm{I}_{-\nu}(z)\,\mathrm{K}_{\nu-1}(z)-\mathrm{I}_{1-\nu}(z)\,\mathrm{K}_{\nu}(z)\Big]\Big\}, \tag{15.257}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\Big[\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\mathrm{K}'_{\nu+k}(\zeta)+\mathrm{I}'_{\nu+k}(z)\mathrm{K}_{\nu+k}(\zeta)\Big]$$
$$=\frac{1}{2}\Big\{\Big[\mathrm{I}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{K}_{\nu+n}(\zeta)-\mathrm{I}_{\nu+n}(z)\mathrm{K}_{\nu+n+1}(\zeta)\Big]$$
$$-\Big[\mathrm{I}_{\nu}(z)\mathrm{K}_{\nu-1}(\zeta)-\mathrm{I}_{\nu-1}(z)\mathrm{K}_{\nu}(\zeta)\Big]\Big\}, \tag{15.258}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\Big[\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\mathrm{K}'_{\nu+k}(\zeta)-\mathrm{I}'_{\nu+k}(z)\mathrm{K}_{\nu+k}(\zeta)\Big]$$
$$=\frac{1}{2}\Big\{(-1)^n\Big[\mathrm{I}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{K}_{\nu+n}(\zeta)+\mathrm{I}_{\nu+n}(z)\mathrm{K}_{\nu+n+1}(\zeta)\Big]$$
$$+\Big[\mathrm{I}_{\nu}(z)\mathrm{K}_{\nu-1}(\zeta)+\mathrm{I}_{\nu-1}(z)\mathrm{K}_{\nu}(\zeta)\Big]\Big\}, \tag{15.259}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\Big[\mathrm{I}_{-\nu-k}(z)\mathrm{K}'_{\nu+k}(\zeta)+\mathrm{I}'_{-\nu-k}(z)\mathrm{K}_{\nu+k}(\zeta)\Big]$$
$$=\frac{1}{2}\Big\{\Big[\mathrm{I}_{-\nu-n-1}(z)\mathrm{K}_{\nu+n}(\zeta)-\mathrm{I}_{-\nu-n}(z)\mathrm{K}_{\nu+n+1}(\zeta)\Big]$$
$$-\Big[\mathrm{I}_{-\nu}(z)\mathrm{K}_{\nu-1}(\zeta)-\mathrm{I}_{1-\nu}(z)\mathrm{K}_{\nu}(\zeta)\Big]\Big\}, \tag{15.260}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\Big[\mathrm{I}_{-\nu-k}(z)\mathrm{K}'_{\nu+k}(\zeta)-\mathrm{I}'_{-\nu-k}(z)\mathrm{K}_{\nu+k}(\zeta)\Big]$$
$$=\frac{1}{2}\Big\{(-1)^n\Big[\mathrm{I}_{-\nu-n-1}(z)\mathrm{K}_{\nu+n}(\zeta)+\mathrm{I}_{-\nu-n}(z)\mathrm{K}_{\nu+n+1}(\zeta)\Big]$$
$$+\Big[\mathrm{I}_{-\nu}(z)\mathrm{K}_{\nu-1}(\zeta)+\mathrm{I}_{1-\nu}(z)\mathrm{K}_{\nu}(\zeta)\Big]\Big\}, \tag{15.261}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\Big[\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{K}'_{\nu+k}(z)+\mathrm{I}'_{\nu+k}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}(z)\Big]$$
$$=\frac{1}{2}\Big\{\Big[\mathrm{I}_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+n}(z)-\mathrm{I}_{\nu+n}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+n+1}(z)\Big]$$
$$-\Big[\mathrm{I}_{\nu}(z)\,\mathrm{K}_{\nu-1}(z)-\mathrm{I}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{K}_{\nu}(z)\Big]\Big\}, \tag{15.262}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\Big[\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\mathrm{K}'_{\nu+k}(z)-\mathrm{I}'_{\nu+k}(z)\mathrm{K}_{\nu+k}(z)\Big]$$
$$=\frac{1}{2}\Big\{(-1)^n\Big[\mathrm{I}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{K}_{\nu+n}(z)+\mathrm{I}_{\nu+n}(z)\mathrm{K}_{\nu+n+1}(z)\Big]$$
$$+\Big[\mathrm{I}_{\nu}(z)\mathrm{K}_{\nu-1}(z)+\mathrm{I}_{\nu-1}(z)\mathrm{K}_{\nu}(z)\Big]\Big\}, \tag{15.263}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\Big[\mathrm{I}_{-\nu-k}(z)\mathrm{K}'_{\nu+k}(z)+\mathrm{I}'_{-\nu-k}(z)\mathrm{K}_{\nu+k}(z)\Big]$$
$$=\frac{1}{2}\Big\{\Big[\mathrm{I}_{-\nu-n-1}(z)\mathrm{K}_{\nu+n}(z)-\mathrm{I}_{-\nu-n}(z)\mathrm{K}_{\nu+n+1}(z)\Big]$$
$$-\Big[\mathrm{I}_{-\nu}(z)\mathrm{K}_{\nu-1}(z)-\mathrm{I}_{1-\nu}(z)\mathrm{K}_{\nu}(z)\Big]\Big\}, \tag{15.264}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\Big[\mathrm{I}_{-\nu-k}(z)\mathrm{K}'_{\nu+k}(z)-\mathrm{I}'_{-\nu-k}(z)\mathrm{K}_{\nu+k}(z)\Big]$$
$$=\frac{1}{2}\Big\{(-1)^{n+1}\Big[\mathrm{I}_{-\nu-n-1}(z)\mathrm{K}_{\nu+n}(z)+\mathrm{I}_{-\nu-n}(z)\mathrm{K}_{\nu+n+1}(z)\Big]$$
$$+\Big[\mathrm{I}_{-\nu}(z)\mathrm{K}_{\nu-1}(z)+\mathrm{I}_{1-\nu}(z)\mathrm{K}_{\nu}(z)\Big]\Big\}. \tag{15.265}$$

类似于柱函数的情形，由虚宗量柱函数的递推关系 (15.214) 与 (15.215)，也可以组合出新的递推关系：

$$-2\nu^2\Big[\frac{1}{z}\mathrm{I}_{\nu}(z)-\mathrm{I}'_{\nu}(z)\Big]=\nu(\nu+1)\,\mathrm{I}_{\nu+1}(z)+\nu(\nu-1)\,\mathrm{I}_{\nu-1}(z), \tag{15.266a}$$

$$2\nu^2\Big[\frac{1}{z}\mathrm{K}_{\nu}(z)-\mathrm{K}'_{\nu}(z)\Big]=\nu(\nu+1)\,\mathrm{K}_{\nu+1}(z)+\nu(\nu-1)\,\mathrm{K}_{\nu-1}(z). \tag{15.266b}$$

由此又可以得出下列求和公式：

$$\sum_{k=0}^{n}(\nu+k)^2\Big\{\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\mathrm{I}_{\nu+k}(\zeta)+\frac{z\zeta}{\zeta-z}\Big[\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\mathrm{I}'_{\nu+k}(\zeta)-\mathrm{I}'_{\nu+k}(z)\mathrm{I}_{\nu+k}(\zeta)\Big]\Big\}$$
$$=\frac{1}{2}\frac{z\zeta}{\zeta-z}\Big\{-(\nu+n+1)(\nu+n)\Big[\mathrm{I}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{I}_{\nu+n}(\zeta)-\mathrm{I}_{\nu+n}(z)\mathrm{I}_{\nu+n+1}(\zeta)\Big]$$
$$+\nu(\nu-1)\Big[\mathrm{I}_{\nu}(z)\mathrm{I}_{\nu-1}(\zeta)-\mathrm{I}_{\nu-1}(z)\mathrm{I}_{\nu}(\zeta)\Big]\Big\}, \tag{15.267}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(\nu+k)^2\Big\{\Big[1-(\nu+k)^2-z^2\Big]\mathrm{I}^2_{\nu+k}(z)-z\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\mathrm{I}'_{\nu+k}(z)-z^2\mathrm{I}'^2_{\nu+k}(z)\Big\}$$
$$=\frac{z^2}{2}\Big\{-(\nu+n+1)(\nu+n)\Big[\mathrm{I}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{I}'_{\nu+n}(z)-\mathrm{I}_{\nu+n}(z)\mathrm{I}'_{\nu+n+1}(z)\Big]$$
$$+\nu(\nu-1)\Big[\mathrm{I}_{\nu}(z)\mathrm{I}'_{\nu-1}(z)-\mathrm{I}_{\nu-1}(z)\mathrm{I}'_{\nu}(z)\Big]\Big\}, \tag{15.268}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\nu+k)^2\left\{\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\mathrm{I}_{\nu+k}(\zeta)-\frac{z\zeta}{\zeta+z}\left[\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\mathrm{I}'_{\nu+k}(\zeta)+\mathrm{I}'_{\nu+k}(z)\mathrm{I}_{\nu+k}(\zeta)\right]\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\frac{z\zeta}{\zeta+z}\left\{(-1)^{n+1}(\nu+n+1)(\nu+n)\left[\mathrm{I}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{I}_{\nu+n}(\zeta)+\mathrm{I}_{\nu+n}(z)\mathrm{I}_{\nu+n+1}(\zeta)\right]\right.$$
$$\left.-\nu(\nu-1)\left[\mathrm{I}_{\nu}(z)\mathrm{I}_{\nu-1}(\zeta)+\mathrm{I}_{\nu-1}(z)\mathrm{I}_{\nu}(\zeta)\right]\right\}, \tag{15.269}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\nu+k)^2\left[\mathrm{I}^2_{\nu+k}(z)-z\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\mathrm{I}'_{\nu+k}(z)\right]$$
$$=\frac{z}{2}\left[(-1)^{n+1}(\nu+n+1)(\nu+n)\mathrm{I}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{I}_{\nu+n}(z)-\nu(\nu-1)\mathrm{I}_{\nu}(z)\mathrm{I}_{\nu-1}(z)\right], \tag{15.270}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(\nu+k)^2\left\{\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\mathrm{I}_{-\nu-k}(\zeta)+\frac{z\zeta}{\zeta-z}\left[\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\mathrm{I}'_{-\nu-k}(\zeta)-\mathrm{I}'_{\nu+k}(z)\mathrm{I}_{-\nu-k}(\zeta)\right]\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\frac{z\zeta}{\zeta-z}\left\{-(\nu+n+1)(\nu+n)\left[\mathrm{I}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{I}_{-\nu-n}(\zeta)-\mathrm{I}_{\nu+n}(z)\mathrm{I}_{-\nu-n-1}(\zeta)\right]\right.$$
$$\left.+\nu(\nu-1)\left[\mathrm{I}_{\nu}(z)\mathrm{I}_{1-\nu}(\zeta)-\mathrm{I}_{\nu-1}(z)\mathrm{I}_{-\nu}(\zeta)\right]\right\}, \tag{15.271}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(\nu+k)^2\left\{\mathrm{I}_{-\nu-k}(z)\mathrm{I}_{-\nu-k}(\zeta)+\frac{z\zeta}{\zeta-z}\left[\mathrm{I}_{-\nu-k}(z)\mathrm{I}'_{-\nu-k}(\zeta)-\mathrm{I}'_{-\nu-k}(z)\mathrm{I}_{-\nu-k}(\zeta)\right]\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\frac{z\zeta}{\zeta-z}\left\{-(\nu+n+1)(\nu+n)\left[\mathrm{I}_{-\nu-n-1}(z)\mathrm{I}_{-\nu-n}(\zeta)-\mathrm{I}_{-\nu-n}(z)\mathrm{I}_{-\nu-n-1}(\zeta)\right]\right.$$
$$\left.+\nu(\nu-1)\left[\mathrm{I}_{-\nu}(z)\mathrm{I}_{1-\nu}(\zeta)-\mathrm{I}_{1-\nu}(z)\mathrm{I}_{-\nu}(\zeta)\right]\right\}, \tag{15.272}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(\nu+k)^2\left\{\left[1-(\nu+k)^2-z^2\right]\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\mathrm{I}_{-\nu-k}(z)\right.$$
$$\left.-\frac{z}{2}\left[\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\mathrm{I}'_{-\nu-k}(z)+\mathrm{I}'_{\nu+k}(z)\mathrm{I}_{-\nu-k}(z)\right]-z^2\mathrm{I}'_{\nu+k}(z)\mathrm{I}'_{-\nu-k}(z)\right\}$$
$$=\frac{z^2}{4}\left\{-(\nu+n+1)(\nu+n)\left[\mathrm{I}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{I}'_{-\nu-n}(z)+\mathrm{I}_{\nu+n}(z)\mathrm{I}'_{-\nu-n-1}(z)\right.\right.$$
$$\left.-\mathrm{I}'_{\nu+n+1}(z)\mathrm{I}_{-\nu-n}(z)-\mathrm{I}'_{\nu+n}(z)\mathrm{I}_{-\nu-n-1}(z)\right]$$
$$\left.+\nu(\nu-1)\left[\mathrm{I}_{\nu}(z)\mathrm{I}'_{1-\nu}(z)-\mathrm{I}_{\nu-1}(z)\mathrm{I}'_{-\nu}(z)-\mathrm{I}'_{\nu}(z)\mathrm{I}_{1-\nu}(z)+\mathrm{I}'_{\nu-1}(z)\mathrm{I}_{-\nu}(z)\right]\right\}, \tag{15.273}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(\nu+k)^2\left\{\left[1-(\nu+k)^2-z^2\right]\mathrm{I}^2_{-\nu-k}(z)-z\mathrm{I}_{-\nu-k}(z)\mathrm{I}'_{-\nu-k}(z)-z^2\mathrm{I}'^2_{-\nu-k}(z)\right\}$$
$$=\frac{z^2}{2}\left\{-(\nu+n+1)(\nu+n)\left[\mathrm{I}_{-\nu-n-1}(z)\mathrm{I}'_{-\nu-n}(z)-\mathrm{I}_{-\nu-n}(z)\mathrm{I}'_{-\nu-n-1}(z)\right]\right.$$
$$\left.+\nu(\nu-1)\left[\mathrm{I}_{-\nu}(z)\mathrm{I}'_{1-\nu}(z)-\mathrm{I}_{1-\nu}(z)\mathrm{I}'_{-\nu}(z)\right]\right\}, \tag{15.274}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\nu+k)^2\left\{\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\mathrm{I}_{-\nu-k}(\zeta)-\frac{z\zeta}{\zeta+z}\left[\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\mathrm{I}'_{-\nu-k}(\zeta)+\mathrm{I}'_{\nu+k}(z)\mathrm{I}_{-\nu-k}(\zeta)\right]\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\frac{z\zeta}{\zeta+z}\left\{(-1)^{n+1}(\nu+n+1)(\nu+n)\left[\mathrm{I}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{I}_{-\nu-n}(\zeta)+\mathrm{I}_{\nu+n}(z)\mathrm{I}_{-\nu-n-1}(\zeta)\right]\right.$$
$$\left.-\nu(\nu-1)\left[\mathrm{I}_{\nu}(z)\mathrm{I}_{1-\nu}(\zeta)+\mathrm{I}_{\nu-1}(z)\mathrm{I}_{-\nu}(\zeta)\right]\right\}, \tag{15.275}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\nu+k)^2\left\{\mathrm{I}_{-\nu-k}(z)\mathrm{I}_{-\nu-k}(\zeta)\right.$$
$$\left.-\frac{z\zeta}{\zeta+z}\left[\mathrm{I}_{-\nu-k}(z)\mathrm{I}'_{-\nu-k}(\zeta)+\mathrm{I}'_{-\nu-k}(z)\mathrm{I}_{-\nu-k}(\zeta)\right]\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\frac{z\zeta}{\zeta-z}\left\{(-1)^{n+1}(\nu+n+1)(\nu+n)\right.$$
$$\times\left[\mathrm{I}_{-\nu-n-1}(z)\mathrm{I}_{-\nu-n}(\zeta)+\mathrm{I}_{-\nu-n}(z)\mathrm{I}_{-\nu-n-1}(\zeta)\right]$$
$$\left.-\nu(\nu-1)\left[\mathrm{I}_{-\nu}(z)\mathrm{I}_{1-\nu}(\zeta)+\mathrm{I}_{1-\nu}(z)\mathrm{I}_{-\nu}(\zeta)\right]\right\}, \tag{15.276}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\nu+k)^2\left\{\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\mathrm{I}_{-\nu-k}(z)-\frac{z}{2}\left[\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\mathrm{I}'_{-\nu-k}(z)+\mathrm{I}'_{\nu+k}(z)\mathrm{I}_{-\nu-k}(z)\right]\right\}$$
$$=\frac{z}{4}\left\{(-1)^{n+1}(\nu+n+1)(\nu+n)\left[\mathrm{I}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{I}_{-\nu-n}(z)+\mathrm{I}_{\nu+n}(z)\mathrm{I}_{-\nu-n-1}(z)\right]\right.$$
$$\left.-\nu(\nu-1)\left[\mathrm{I}_{\nu}(z)\mathrm{I}'_{1-\nu}(z)+\mathrm{I}_{\nu-1}(z)\mathrm{I}_{-\nu}(z)\right]\right\}, \tag{15.277}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\nu+k)^2\left[\mathrm{I}^2_{-\nu-k}(z)-z\mathrm{I}_{-\nu-k}(z)\mathrm{I}'_{-\nu-k}(z)\right]$$
$$=\frac{z}{2}\left[(-1)^{n+1}(\nu+n+1)(\nu+n)\mathrm{I}_{-\nu-n-1}(z)\mathrm{I}_{-\nu-n}(z)-\nu(\nu-1)\mathrm{I}_{-\nu}(z)\mathrm{I}_{1-\nu}(z)\right], \tag{15.278}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(\nu+k)^2\left\{\mathrm{K}_{\nu+k}(z)\mathrm{K}_{\nu+k}(\zeta)+\frac{z\zeta}{\zeta-z}\left[\mathrm{K}_{\nu+k}(z)\mathrm{K}'_{\nu+k}(\zeta)-\mathrm{K}'_{\nu+k}(z)\mathrm{K}_{\nu+k}(\zeta)\right]\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\frac{z\zeta}{\zeta-z}\left\{(\nu+n+1)(\nu+n)\left[\mathrm{K}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{K}_{\nu+n}(\zeta)-\mathrm{K}_{\nu+n}(z)\mathrm{K}_{\nu+n+1}(\zeta)\right]\right.$$

$$-\nu(\nu-1)\Big[\mathrm{K}_\nu(z)\mathrm{K}_{\nu-1}(\zeta)-\mathrm{K}_{\nu-1}(z)\mathrm{K}_\nu(\zeta)\Big]\Big\},\tag{15.279}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(\nu+k)^2\Big\{\Big[1-(\nu+k)^2-z^2\Big]\mathrm{K}_{\nu+k}^2(z)-z\mathrm{K}_{\nu+k}(z)\mathrm{K}'_{\nu+k}(z)-z^2\mathrm{K}'^2_{\nu+k}(z)\Big\}$$
$$=\frac{z^2}{2}\Big\{(\nu+n+1)(\nu+n)\Big[\mathrm{K}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{K}'_{\nu+n}(z)-\mathrm{K}_{\nu+n}(z)\mathrm{K}'_{\nu+n+1}(z)\Big]$$
$$-\nu(\nu-1)\Big[\mathrm{K}_\nu(z)\mathrm{K}'_{\nu-1}(z)-\mathrm{K}_{\nu-1}(z)\mathrm{K}'_\nu(z)\Big]\Big\},\tag{15.280}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\nu+k)^2\Big\{\mathrm{K}_{\nu+k}(z)\mathrm{K}_{\nu+k}(\zeta)-\frac{z\zeta}{\zeta+z}\Big[\mathrm{K}_{\nu+k}(z)\mathrm{K}'_{\nu+k}(\zeta)+\mathrm{K}'_{\nu+k}(z)\mathrm{K}_{\nu+k}(\zeta)\Big]\Big\}$$
$$=\frac{1}{2}\frac{z\zeta}{\zeta+z}\Big\{(-1)^n(\nu+n+1)(\nu+n)\Big[\mathrm{K}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{K}_{\nu+n}(\zeta)+\mathrm{K}_{\nu+n}(z)\mathrm{K}_{\nu+n+1}(\zeta)\Big]$$
$$+\nu(\nu-1)\Big[\mathrm{K}_\nu(z)\mathrm{K}_{\nu-1}(\zeta)+\mathrm{K}_{\nu-1}(z)\mathrm{K}_\nu(\zeta)\Big]\Big\},\tag{15.281}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\nu+k)^2\Big[\mathrm{K}_{\nu+k}^2(z)-z\mathrm{K}_{\nu+k}(z)\mathrm{K}'_{\nu+k}(z)\Big]$$
$$=\frac{z}{2}\Big[(-1)^n(\nu+n+1)(\nu+n)\mathrm{K}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{K}_{\nu+n}(z)+\nu(\nu-1)\mathrm{K}_\nu(z)\mathrm{K}_{\nu-1}(z)\Big],\tag{15.282}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(\nu+k)^2\Big\{\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\mathrm{K}_{\nu+k}(\zeta)-\frac{z\zeta}{\zeta+z}\Big[\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\mathrm{K}'_{\nu+k}(\zeta)+\mathrm{I}'_{\nu+k}(z)\mathrm{K}_{\nu+k}(\zeta)\Big]\Big\}$$
$$=\frac{1}{2}\frac{z\zeta}{\zeta+z}\Big\{-(\nu+n+1)(\nu+n)\Big[\mathrm{I}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{K}_{\nu+n}(\zeta)-\mathrm{I}_{\nu+n}(z)\mathrm{K}_{\nu+n+1}(\zeta)\Big]$$
$$+\nu(\nu-1)\Big[\mathrm{I}_\nu(z)\mathrm{K}_{\nu-1}(\zeta)-\mathrm{I}_{\nu-1}(z)\mathrm{K}_\nu(\zeta)\Big]\Big\},\tag{15.283}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(\nu+k)^2\Big\{\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\mathrm{K}_{\nu+k}(z)-\frac{z}{2}\Big[\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\mathrm{K}'_{\nu+k}(z)+\mathrm{I}'_{\nu+k}(z)\mathrm{K}_{\nu+k}(z)\Big]\Big\}$$
$$=\frac{z}{4}\Big\{-(\nu+n+1)(\nu+n)\Big[\mathrm{I}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{K}_{\nu+n}(z)-\mathrm{I}_{\nu+n}(z)\mathrm{K}_{\nu+n+1}(z)\Big]$$
$$+\nu(\nu-1)\Big[\mathrm{I}_\nu(z)\mathrm{K}_{\nu-1}(z)-\mathrm{I}_{\nu-1}(z)\mathrm{K}_\nu(z)\Big]\Big\},\tag{15.284}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\nu+k)^2\Big\{\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\mathrm{K}_{\nu+k}(\zeta)+\frac{z\zeta}{\zeta-z}\Big[\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\mathrm{K}'_{\nu+k}(\zeta)-\mathrm{I}'_{\nu+k}(z)\mathrm{K}_{\nu+k}(\zeta)\Big]\Big\}$$
$$=\frac{1}{2}\frac{z\zeta}{\zeta-z}\Big\{(-1)^{n+1}(\nu+n+1)(\nu+n)\Big[\mathrm{I}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{K}_{\nu+n}(\zeta)+\mathrm{I}_{\nu+n}(z)\mathrm{K}_{\nu+n+1}(\zeta)\Big]$$
$$-\nu(\nu-1)\Big[\mathrm{I}_\nu(z)\mathrm{K}_{\nu-1}(\zeta)+\mathrm{I}_{\nu-1}(z)\mathrm{K}_\nu(\zeta)\Big]\Big\},\tag{15.285}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\nu+k)^2\Big\{\Big[1-(\nu+k)^2-z^2\Big]\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\mathrm{K}_{\nu+k}(z)$$
$$-\frac{z}{2}\Big[\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\mathrm{K}'_{\nu+k}(z)+\mathrm{I}'_{\nu+k}(z)\mathrm{K}'_{\nu+k}(z)\Big]-z^2\mathrm{I}'_{\nu+k}(z)\mathrm{K}'_{\nu+k}(z)\Big\}$$
$$=\frac{z^2}{4}\Big\{(-1)^{n+1}(\nu+n+1)(\nu+n)\Big[\mathrm{I}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{K}'_{\nu+n}(z)+\mathrm{I}_{\nu+n}(z)\mathrm{K}'_{\nu+n+1}(z)$$
$$-\mathrm{I}'_{\nu+n+1}(z)\mathrm{K}_{\nu+n}(z)-\mathrm{I}'_{\nu+n}(z)\mathrm{K}_{\nu+n+1}(z)\Big]$$
$$-\nu(\nu-1)\Big[\mathrm{I}_{\nu}(z)\mathrm{K}'_{\nu-1}(z)+\mathrm{I}_{\nu-1}(z)\mathrm{I}'_{\nu}(z)-\mathrm{I}'_{\nu}(z)\mathrm{K}_{\nu-1}(z)-\mathrm{I}'_{\nu-1}(z)\mathrm{I}_{\nu}(z)\Big]\Big\},\tag{15.286}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(\nu+k)^2\Big\{\mathrm{I}_{-\nu-k}(z)\mathrm{K}_{\nu+k}(\zeta)-\frac{z\zeta}{\zeta+z}\Big[\mathrm{I}_{-\nu-k}(z)\mathrm{K}'_{\nu+k}(\zeta)+\mathrm{I}'_{-\nu-k}(z)\mathrm{K}_{\nu+k}(\zeta)\Big]\Big\}$$
$$=\frac{1}{2}\frac{z\zeta}{\zeta+z}\Big\{-(\nu+n+1)(\nu+n)\Big[\mathrm{I}_{-\nu-n-1}(z)\mathrm{K}_{\nu+n}(\zeta)-\mathrm{I}_{-\nu-n}(z)\mathrm{K}_{\nu+n+1}(\zeta)\Big]$$
$$+\nu(\nu-1)\Big[\mathrm{I}_{-\nu}(z)\mathrm{K}_{\nu-1}(\zeta)-\mathrm{I}_{1-\nu}(z)\mathrm{K}_{\nu}(\zeta)\Big]\Big\},\tag{15.287}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(\nu+k)^2\Big\{\mathrm{I}_{-\nu-k}(z)\mathrm{K}_{\nu+k}(z)-\frac{z}{2}\Big[\mathrm{I}_{-\nu-k}(z)\mathrm{K}'_{\nu+k}(z)+\mathrm{I}'_{-\nu-k}(z)\mathrm{K}_{\nu+k}(z)\Big]\Big\}$$
$$=\frac{z}{4}\Big\{-(\nu+n+1)(\nu+n)\Big[\mathrm{I}_{-\nu-n-1}(z)\mathrm{K}_{\nu+n}(z)-\mathrm{I}_{-\nu-n}(z)\mathrm{K}_{\nu+n+1}(z)\Big]$$
$$+\nu(\nu-1)\Big[\mathrm{I}_{-\nu}(z)\mathrm{K}_{\nu-1}(z)-\mathrm{I}_{1-\nu}(z)\mathrm{K}_{\nu}(z)\Big]\Big\},\tag{15.288}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\nu+k)^2\Big\{\mathrm{I}_{-\nu-k}(z)\mathrm{K}_{\nu+k}(\zeta)$$
$$+\frac{z\zeta}{\zeta-z}\Big[\mathrm{I}_{-\nu-k}(z)\mathrm{K}'_{\nu+k}(\zeta)-\mathrm{I}'_{-\nu-k}(z)\mathrm{K}_{\nu+k}(\zeta)\Big]\Big\}$$
$$=\frac{1}{2}\frac{z\zeta}{\zeta-z}\Big\{(-1)^{n+1}(\nu+n+1)(\nu+n)$$
$$\times\Big[\mathrm{I}_{-\nu-n-1}(z)\mathrm{K}_{\nu+n}(\zeta)-\mathrm{I}_{-\nu-n}(z)\mathrm{K}_{\nu+n+1}(\zeta)\Big]$$
$$-\nu(\nu-1)\Big[\mathrm{I}_{-\nu}(z)\mathrm{K}_{\nu-1}(\zeta)-\mathrm{I}_{1-\nu}(z)\mathrm{K}_{\nu}(\zeta)\Big]\Big\},\tag{15.289}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\nu+k)^2\Big[\mathrm{I}_{-\nu-k}(z)\mathrm{K}'_{\nu+k}(z)+\mathrm{I}'_{-\nu-k}(z)\mathrm{K}_{\nu+k}(z)\Big]$$
$$=\frac{1}{2}\Big\{(-1)^{n+1}(\nu+n+1)(\nu+n)\Big[\mathrm{I}_{-\nu-n-1}(z)\mathrm{K}_{\nu+n}(z)-\mathrm{I}_{-\nu-n}(z)\mathrm{K}_{\nu+n+1}(z)\Big]$$
$$-\nu(\nu-1)\Big[\mathrm{I}_{-\nu}(z)\mathrm{K}_{\nu-1}(z)-\mathrm{I}_{1-\nu}(z)\mathrm{K}_{\nu}(z)\Big]\Big\}.\tag{15.290}$$

同样可以写出虚宗量柱函数的四次型求和公式. 为此只需根据它们的递推关系 (15.214) 与 (15.215)，导出关于 $\mathrm{I}_\nu(z)$ 的二次型递推关系

$$\frac{4\nu}{z}\,\mathrm{I}_\nu(z)\,\mathrm{I}'_\nu(z) = -\mathrm{I}^2_{\nu+1}(z) + \mathrm{I}^2_{\nu-1}(z), \tag{15.291a}$$

$$2\Big(\frac{\nu}{z}\Big)^2\mathrm{I}^2_\nu(z) + 2\mathrm{I}'^2_\nu(z) = \mathrm{I}^2_{\nu+1}(z) + \mathrm{I}^2_{\nu-1}(z) \tag{15.291b}$$

和关于 $\mathrm{K}_\nu(z)$ 的二次型递推关系

$$\frac{4\nu}{z}\,\mathrm{K}_\nu(z)\,\mathrm{K}'_\nu(z) = -\mathrm{K}^2_{\nu+1}(z) + \mathrm{K}^2_{\nu-1}(z), \tag{15.292a}$$

$$2\Big(\frac{\nu}{z}\Big)^2\mathrm{K}^2_\nu(z) + 2\mathrm{K}'^2_\nu(z) = \mathrm{K}^2_{\nu+1}(z) + \mathrm{K}^2_{\nu-1}(z). \tag{15.292b}$$

所以，就能得到

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n}(\nu+k)\,\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}_{\nu+k}(\zeta)\Big[z\,\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}'_{\nu+k}(\zeta) + \zeta\,\mathrm{I}'_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}_{\nu+k}(\zeta)\Big]\\ &\qquad = \frac{z\zeta}{4}\bigg\{-\Big[\mathrm{I}^2_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{I}^2_{\nu+n}(\zeta) + \mathrm{I}^2_{\nu+n}(z)\,\mathrm{I}^2_{\nu+n+1}(\zeta)\Big]\\ &\qquad\quad + \Big[\mathrm{I}^2_\nu(z)\,\mathrm{I}^2_{\nu-1}(\zeta) + \mathrm{I}^2_{\nu-1}(z)\,\mathrm{I}^2_\nu(\zeta)\Big]\bigg\},\end{aligned} \tag{15.293}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\nu+k)\,\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}_{\nu+k}(\zeta)\Big[z\,\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}'_{\nu+k}(\zeta) - \zeta\,\mathrm{I}'_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}_{\nu+k}(\zeta)\Big]\\ &\qquad = \frac{z\zeta}{4}\bigg\{(-1)^n\Big[\mathrm{I}^2_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{I}^2_{\nu+n}(\zeta) - \mathrm{I}^2_{\nu+n}(z)\,\mathrm{I}^2_{\nu+n+1}(\zeta)\Big]\\ &\qquad\quad + \Big[\mathrm{I}^2_\nu(z)\,\mathrm{I}^2_{\nu-1}(\zeta) - \mathrm{I}^2_{\nu-1}(z)\,\mathrm{I}^2_\nu(\zeta)\Big]\bigg\},\end{aligned} \tag{15.294}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n}(\nu+k)\,\mathrm{I}_{-\nu-k}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-k}(\zeta)\Big[z\,\mathrm{I}_{-\nu-k}(z)\,\mathrm{I}'_{-\nu-k}(\zeta) + \zeta\,\mathrm{I}'_{-\nu-k}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-k}(\zeta)\Big]\\ &\qquad = \frac{z\zeta}{4}\bigg\{-\Big[\mathrm{I}^2_{-\nu-n-1}(z)\,\mathrm{I}^2_{-\nu-n}(\zeta) + \mathrm{I}^2_{-\nu-n}(z)\,\mathrm{I}^2_{-\nu-n-1}(\zeta)\Big]\\ &\qquad\quad + \Big[\mathrm{I}^2_{-\nu}(z)\,\mathrm{I}^2_{1-\nu}(\zeta) + \mathrm{I}^2_{1-\nu}(z)\,\mathrm{I}^2_{-\nu}(\zeta)\Big]\bigg\},\end{aligned} \tag{15.295}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\nu+k)\,\mathrm{I}_{-\nu-k}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-k}(\zeta)\Big[z\,\mathrm{I}_{-\nu-k}(z)\,\mathrm{I}'_{-\nu-k}(\zeta) - \zeta\,\mathrm{I}'_{-\nu-k}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-k}(\zeta)\Big]\\ &\qquad = \frac{z\zeta}{4}\bigg\{(-1)^n\Big[\mathrm{I}^2_{-\nu-n-1}(z)\,\mathrm{I}^2_{-\nu-n}(\zeta) - \mathrm{I}^2_{-\nu-n}(z)\,\mathrm{I}^2_{-\nu-n-1}(\zeta)\Big]\\ &\qquad\quad + \Big[\mathrm{I}^2_{-\nu}(z)\,\mathrm{I}^2_{1-\nu}(\zeta) - \mathrm{I}^2_{1-\nu}(z)\,\mathrm{I}^2_{-\nu}(\zeta)\Big]\bigg\},\end{aligned} \tag{15.296}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(\nu+k)\,\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-k}(\zeta)\Big[z\,\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}'_{-\nu-k}(\zeta)+\zeta\,\mathrm{I}'_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-k}(\zeta)\Big]$$
$$=\frac{z\zeta}{4}\bigg\{-\Big[\mathrm{I}^2_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{I}^2_{-\nu-n}(\zeta)+\mathrm{I}^2_{\nu+n}(z)\,\mathrm{I}^2_{-\nu-n-1}(\zeta)\Big]$$
$$+\Big[\mathrm{I}^2_{\nu}(z)\,\mathrm{I}^2_{1-\nu}(\zeta)+\mathrm{I}^2_{\nu-1}(z)\,\mathrm{I}^2_{-\nu}(\zeta)\Big]\bigg\},\tag{15.297}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\nu+k)\,\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-k}(\zeta)\Big[z\,\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}'_{-\nu-k}(\zeta)-\zeta\,\mathrm{I}'_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-k}(\zeta)\Big]$$
$$=\frac{z\zeta}{4}\bigg\{(-1)^n\Big[\mathrm{I}^2_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{I}^2_{-\nu-n}(\zeta)-\mathrm{I}^2_{\nu+n}(z)\,\mathrm{I}^2_{-\nu-n-1}(\zeta)\Big]$$
$$+\Big[\mathrm{I}^2_{\nu}(z)\,\mathrm{I}^2_{1-\nu}(\zeta)-\mathrm{I}^2_{\nu-1}(z)\,\mathrm{I}^2_{-\nu}(\zeta)\Big]\bigg\},\tag{15.298}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(\nu+k)\,\mathrm{K}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}(\zeta)\Big[z\,\mathrm{K}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{K}'_{\nu+k}(\zeta)+\zeta\,\mathrm{K}'_{\nu+k}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}(\zeta)\Big]$$
$$=\frac{z\zeta}{4}\bigg\{-\Big[\mathrm{K}^2_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{K}^2_{\nu+n}(\zeta)+\mathrm{K}^2_{\nu+n}(z)\,\mathrm{K}^2_{\nu+n+1}(\zeta)\Big]$$
$$+\Big[\mathrm{K}^2_{\nu}(z)\,\mathrm{K}^2_{\nu-1}(\zeta)+\mathrm{K}^2_{\nu-1}(z)\,\mathrm{K}^2_{\nu}(\zeta)\Big]\bigg\},\tag{15.299}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\nu+k)\,\mathrm{K}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}(\zeta)\Big[z\,\mathrm{K}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{K}'_{\nu+k}(\zeta)-\zeta\,\mathrm{K}'_{\nu+k}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}(\zeta)\Big]$$
$$=\frac{z\zeta}{4}\bigg\{(-1)^n\Big[\mathrm{K}^2_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{K}^2_{\nu+n}(\zeta)-\mathrm{K}^2_{\nu+n}(z)\,\mathrm{K}^2_{\nu+n+1}(\zeta)\Big]$$
$$+\Big[\mathrm{K}^2_{\nu}(z)\,\mathrm{K}^2_{\nu-1}(\zeta)-\mathrm{K}^2_{\nu-1}(z)\,\mathrm{K}^2_{\nu}(\zeta)\Big]\bigg\},\tag{15.300}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(\nu+k)\,\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}(\zeta)\Big[z\,\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{K}'_{\nu+k}(\zeta)+\zeta\,\mathrm{I}'_{\nu+k}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}(\zeta)\Big]$$
$$=\frac{z\zeta}{4}\bigg\{-\Big[\mathrm{I}^2_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{K}^2_{\nu+n}(\zeta)+\mathrm{I}^2_{\nu+n}(z)\,\mathrm{K}^2_{\nu+n+1}(\zeta)\Big]$$
$$+\Big[\mathrm{I}^2_{\nu}(z)\,\mathrm{K}^2_{\nu-1}(\zeta)+\mathrm{I}^2_{\nu-1}(z)\,\mathrm{K}^2_{\nu}(\zeta)\Big]\bigg\},\tag{15.301}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\nu+k)\,\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}(\zeta)\Big[z\,\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{K}'_{\nu+k}(\zeta)-\zeta\,\mathrm{I}'_{\nu+k}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}(\zeta)\Big]$$
$$=\frac{z\zeta}{4}\bigg\{(-1)^n\Big[\mathrm{I}^2_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{K}^2_{\nu+n}(\zeta)-\mathrm{I}^2_{\nu+n}(z)\,\mathrm{K}^2_{\nu+n+1}(\zeta)\Big]$$
$$+\Big[\mathrm{I}^2_{\nu}(z)\,\mathrm{K}^2_{\nu-1}(\zeta)-\mathrm{I}^2_{\nu-1}(z)\,\mathrm{K}^2_{\nu}(\zeta)\Big]\bigg\},\tag{15.302}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(\nu+k)\,\mathrm{I}_{-\nu-k}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}(\zeta)\Big[z\,\mathrm{I}_{-\nu-k}(z)\,\mathrm{K}'_{\nu+k}(\zeta)+\zeta\,\mathrm{I}'_{-\nu-k}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}(\zeta)\Big]$$
$$=\frac{z\zeta}{4}\bigg\{-\Big[\mathrm{I}^2_{-\nu-n-1}(z)\,\mathrm{K}^2_{\nu+n}(\zeta)+\mathrm{I}^2_{-\nu-n}(z)\,\mathrm{K}^2_{\nu+n+1}(\zeta)\Big]$$
$$+\Big[\mathrm{I}^2_{-\nu}(z)\,\mathrm{K}^2_{\nu-1}(\zeta)+\mathrm{I}^2_{1-\nu}(z)\,\mathrm{K}^2_{\nu}(\zeta)\Big]\bigg\},\tag{15.303}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\nu+k)\,\mathrm{I}_{-\nu-k}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}(\zeta)\Big[z\,\mathrm{I}_{-\nu-k}(z)\,\mathrm{K}'_{\nu+k}(\zeta)-\zeta\,\mathrm{I}'_{-\nu-k}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}(\zeta)\Big]$$
$$=\frac{z\zeta}{4}\bigg\{(-1)^n\Big[\mathrm{I}^2_{-\nu-n-1}(z)\,\mathrm{K}^2_{\nu+n}(\zeta)-\mathrm{I}^2_{-\nu-n}(z)\,\mathrm{K}^2_{\nu+n+1}(\zeta)\Big]$$
$$+\frac{1}{4}\Big[\mathrm{I}^2_{-\nu}(z)\,\mathrm{K}^2_{\nu-1}(\zeta)-\mathrm{I}^2_{1-\nu}(z)\,\mathrm{K}^2_{\nu}(\zeta)\Big]\bigg\},\tag{15.304}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(\nu+k)\,\mathrm{I}^3_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}'_{\nu+k}(z)=\frac{z}{4}\Big[-\mathrm{I}^2_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{I}^2_{\nu+n}(z)+\mathrm{I}^2_{\nu}(z)\,\mathrm{I}^2_{\nu-1}(z)\Big],\tag{15.305}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\nu+k)\,\mathrm{I}^2_{\nu+k}(z)\bigg\{z^2\mathrm{I}'^2_{\nu+k}(z)+2z\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\mathrm{I}'_{\nu+k}(z)-\Big[z^2+(\nu+k)^2\Big]\mathrm{I}^2_{\nu+k}(z)\bigg\}$$
$$=\frac{z^3}{2}\bigg\{(-1)^{n+1}\mathrm{I}_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{I}_{\nu+n}(z)\Big[\mathrm{I}_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{I}'_{\nu+n}(z)-\mathrm{I}'_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{I}_{\nu+n}(z)\Big]$$
$$-\mathrm{I}_{\nu}(z)\,\mathrm{I}_{\nu-1}(z)\Big[\mathrm{I}_{\nu}(z)\,\mathrm{I}'_{\nu-1}(z)-\mathrm{I}'_{\nu}(z)\,\mathrm{I}_{\nu-1}(z)\Big]\bigg\},\tag{15.306}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(\nu+k)\,\mathrm{I}^3_{-\nu-k}(z)\,\mathrm{I}'_{-\nu-k}(z)=\frac{z}{4}\Big[-\mathrm{I}^2_{-\nu-n-1}(z)\,\mathrm{I}^2_{-\nu-n}(z)+\mathrm{I}^2_{-\nu}(z)\,\mathrm{I}^2_{1-\nu}(z)\Big],\tag{15.307}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\nu+k)\,\mathrm{I}^2_{-\nu-k}(z)$$
$$\times\bigg\{z^2\mathrm{I}'^2_{-\nu-k}(z)+2z\mathrm{I}_{-\nu-k}(z)\mathrm{I}'_{-\nu-k}(z)-\Big[z^2+(\nu+k)^2\Big]\mathrm{I}^2_{-\nu-k}(z)\bigg\}$$
$$=\frac{z^3}{2}\bigg\{(-1)^{n+1}\mathrm{I}_{-\nu-n-1}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-n}(z)$$
$$\times\Big[\mathrm{I}_{-\nu-n-1}(z)\,\mathrm{I}'_{-\nu-n}(z)-\mathrm{I}'_{-\nu-n-1}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-n}(z)\Big]$$
$$-\mathrm{I}_{-\nu}(z)\,\mathrm{I}_{1-\nu}(z)\Big[\mathrm{I}_{-\nu}(z)\,\mathrm{I}'_{1-\nu}(z)-\mathrm{I}'_{-\nu}(z)\,\mathrm{I}_{1-\nu}(z)\Big]\bigg\},\tag{15.308}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(\nu+k)\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\mathrm{I}_{-\nu-k}(z)\Big[\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\mathrm{I}'_{-\nu-k}(z)+\mathrm{I}'_{\nu+k}(z)\mathrm{I}_{-\nu-k}(z)\Big]$$
$$=\frac{z}{2}\Big[-\mathrm{I}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{I}_{-\nu-n-1}(z)\mathrm{I}_{\nu+n}(z)\mathrm{I}_{-\nu-n}(z)+\mathrm{I}_{\nu}(z)\mathrm{I}_{-\nu}(z)\mathrm{I}_{\nu-1}(z)\mathrm{I}_{1-\nu}(z)\Big], \tag{15.309}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(\nu+k)\,\mathrm{K}^{3}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{K}'_{\nu+k}(z)=\frac{z}{4}\Big[-\mathrm{K}^{2}_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{K}^{2}_{\nu+n}(z)+\mathrm{K}^{2}_{\nu}(z)\,\mathrm{K}^{2}_{\nu-1}(z)\Big], \tag{15.310}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}(\nu+k)\,\mathrm{K}^{2}_{\nu+k}(z)\Big\{z^{2}\mathrm{K}'^{2}_{\nu+k}(z)+2z\mathrm{K}_{\nu+k}(z)\mathrm{K}'_{\nu+k}(z)-\Big[z^{2}+(\nu+k)^{2}\Big]\mathrm{K}^{2}_{\nu+k}(z)\Big\}$$
$$=\frac{z^{3}}{2}\Big\{(-1)^{n+1}\mathrm{K}_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+n}(z)\Big[\mathrm{K}_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{K}'_{\nu+n}(z)-\mathrm{K}'_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+n}(z)\Big]$$
$$-\mathrm{K}_{\nu}(z)\,\mathrm{K}_{\nu-1}(z)\Big[\mathrm{K}_{\nu}(z)\,\mathrm{K}'_{\nu-1}(z)-\mathrm{K}'_{\nu}(z)\,\mathrm{K}_{\nu-1}(z)\Big]\Big\}, \tag{15.311}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(\nu+k)\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}(z)\Big[\mathrm{I}'_{\nu+k}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}(z)+\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{K}'_{\nu+k}(z)\Big]$$
$$=\frac{z}{4}\Big\{-\Big[\mathrm{I}^{2}_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{K}^{2}_{\nu+n}(z)+\mathrm{I}^{2}_{\nu+n}(z)\,\mathrm{K}^{2}_{\nu+n+1}(z)\Big]$$
$$+\Big[\mathrm{I}^{2}_{\nu}(z)\,\mathrm{K}^{2}_{\nu-1}(z)-\mathrm{I}^{2}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{K}^{2}_{\nu}(z)\Big]\Big\}, \tag{15.312}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(\nu+k)\,\mathrm{I}_{-\nu-k}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}(z)\Big[\mathrm{I}_{-\nu-k}(z)\,\mathrm{K}'_{\nu+k}(z)+\mathrm{I}'_{-\nu-k}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}(z)\Big]$$
$$=\frac{z}{4}\Big\{-\Big[\mathrm{I}^{2}_{-\nu-n-1}(z)\,\mathrm{K}^{2}_{\nu+n}(z)+\mathrm{I}^{2}_{-\nu-n}(z)\,\mathrm{K}^{2}_{\nu+n+1}(z)\Big]$$
$$+\Big[\mathrm{I}^{2}_{-\nu}(z)\,\mathrm{K}^{2}_{\nu-1}(z)+\mathrm{I}^{2}_{1-\nu}(z)\,\mathrm{K}^{2}_{\nu}(z)\Big]\Big\}, \tag{15.313}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\Big\{(\nu+k)^{2}\,\mathrm{I}^{2}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}^{2}_{\nu+k}(\zeta)+\frac{z^{2}\zeta^{2}}{z^{2}-\zeta^{2}}\Big[\mathrm{I}^{2}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}'^{2}_{\nu+k}(\zeta)-\mathrm{I}'^{2}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}^{2}_{\nu+k}(\zeta)\Big]\Big\}$$
$$=-\frac{1}{2}\frac{z^{2}\zeta^{2}}{z^{2}-\zeta^{2}}\Big\{\Big[\mathrm{I}^{2}_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{I}^{2}_{\nu+n}(\zeta)-\mathrm{I}^{2}_{\nu+n}(z)\,\mathrm{I}^{2}_{\nu+n+1}(\zeta)\Big]$$
$$-\Big[\mathrm{I}^{2}_{\nu}(z)\,\mathrm{I}^{2}_{\nu-1}(\zeta)-\mathrm{I}^{2}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{I}^{2}_{\nu}(\zeta)\Big]\Big\}, \tag{15.314}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\Big\{(\nu+k)^{2}\,\mathrm{I}^{2}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}^{2}_{\nu+k}(\zeta)+\frac{z^{2}\zeta^{2}}{z^{2}+\zeta^{2}}\Big[\mathrm{I}^{2}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}'^{2}_{\nu+k}(\zeta)+\mathrm{I}'^{2}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}^{2}_{\nu+k}(\zeta)\Big]\Big\}$$
$$=\frac{1}{2}\frac{z^{2}\zeta^{2}}{z^{2}+\zeta^{2}}\Big\{(-1)^{n}\Big[\mathrm{I}^{2}_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{I}^{2}_{\nu+n}(\zeta)+\mathrm{I}^{2}_{\nu+n}(z)\,\mathrm{I}^{2}_{\nu+n+1}(\zeta)\Big]$$
$$+\Big[\mathrm{I}^{2}_{\nu}(z)\,\mathrm{I}^{2}_{\nu-1}(\zeta)+\mathrm{I}^{2}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{I}^{2}_{\nu}(\zeta)\Big]\Big\}, \tag{15.315}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\left\{(\nu+k)^2\,\mathrm{I}^2_{-\nu-k}(z)\,\mathrm{I}^2_{-\nu-k}(\zeta)+\frac{z^2\zeta^2}{z^2-\zeta^2}\left[\mathrm{I}^2_{-\nu-k}(z)\,\mathrm{I}'^2_{-\nu-k}(\zeta)-\mathrm{I}'^2_{-\nu-k}(z)\,\mathrm{I}^2_{-\nu-k}(\zeta)\right]\right\}$$
$$=-\frac{1}{2}\frac{z^2\zeta^2}{z^2-\zeta^2}\left\{\left[\mathrm{I}^2_{-\nu-n-1}(z)\,\mathrm{I}^2_{-\nu-n}(\zeta)-\mathrm{I}^2_{-\nu-n}(z)\,\mathrm{I}^2_{-\nu-n-1}(\zeta)\right]\right.$$
$$\left.-\left[\mathrm{I}^2_{-\nu}(z)\,\mathrm{I}^2_{1-\nu-1}(\zeta)-\mathrm{I}^2_{1-\nu}(z)\,\mathrm{I}^2_{-\nu}(\zeta)\right]\right\}, \tag{15.316}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left\{(\nu+k)^2\,\mathrm{I}^2_{-\nu-k}(z)\,\mathrm{I}^2_{-\nu-k}(\zeta)\right.$$
$$\left.+\frac{z^2\zeta^2}{z^2+\zeta^2}\left[\mathrm{I}^2_{-\nu-k}(z)\,\mathrm{I}'^2_{-\nu-k}(\zeta)+\mathrm{I}'^2_{-\nu-k}(z)\,\mathrm{I}^2_{-\nu-k}(\zeta)\right]\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\frac{z^2\zeta^2}{z^2+\zeta^2}\left\{(-1)^n\left[\mathrm{I}^2_{-\nu-n-1}(z)\,\mathrm{I}^2_{-\nu-n}(\zeta)+\mathrm{I}^2_{-\nu-n}(z)\,\mathrm{I}^2_{-\nu-n-1}(\zeta)\right]\right.$$
$$\left.+\left[\mathrm{I}^2_{-\nu}(z)\,\mathrm{I}^2_{1-\nu-1}(\zeta)+\mathrm{I}^2_{1-\nu}(z)\,\mathrm{I}^2_{-\nu}(\zeta)\right]\right\}, \tag{15.317}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\left\{(\nu+k)^2\,\mathrm{I}^2_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}^2_{-\nu-k}(\zeta)+\frac{z^2\zeta^2}{z^2-\zeta^2}\left[\mathrm{I}^2_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}'^2_{-\nu-k}(\zeta)-\mathrm{I}'^2_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}^2_{-\nu-k}(\zeta)\right]\right\}$$
$$=-\frac{1}{2}\frac{z^2\zeta^2}{z^2-\zeta^2}\left\{\left[\mathrm{I}^2_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{I}^2_{-\nu-n}(\zeta)-\mathrm{I}^2_{\nu+n}(z)\,\mathrm{I}^2_{-\nu-n-1}(\zeta)\right]\right.$$
$$\left.-\left[\mathrm{I}^2_{\nu}(z)\,\mathrm{I}^2_{1-\nu-1}(\zeta)-\mathrm{I}^2_{\nu-1}(z)\,\mathrm{I}^2_{-\nu}(\zeta)\right]\right\}, \tag{15.318}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left\{(\nu+k)^2\,\mathrm{I}^2_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}^2_{-\nu-k}(\zeta)+\frac{z^2\zeta^2}{z^2+\zeta^2}\left[\mathrm{I}^2_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}'^2_{-\nu-k}(\zeta)+\mathrm{I}'^2_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}^2_{-\nu-k}(\zeta)\right]\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\frac{z^2\zeta^2}{z^2+\zeta^2}\left\{(-1)^n\left[\mathrm{I}^2_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{I}^2_{-\nu-n}(\zeta)+\mathrm{I}^2_{\nu+n}(z)\,\mathrm{I}^2_{-\nu-n-1}(\zeta)\right]\right.$$
$$\left.+\left[\mathrm{I}^2_{\nu}(z)\,\mathrm{I}^2_{1-\nu-1}(\zeta)+\mathrm{I}^2_{\nu-1}(z)\,\mathrm{I}^2_{-\nu}(\zeta)\right]\right\}, \tag{15.319}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\left\{(\nu+k)^2\,\mathrm{K}^2_{\nu+k}(z)\,\mathrm{K}^2_{\nu+k}(\zeta)+\frac{z^2\zeta^2}{z^2-\zeta^2}\left[\mathrm{K}^2_{\nu+k}(z)\,\mathrm{K}'^2_{\nu+k}(\zeta)-\mathrm{K}'^2_{\nu+k}(z)\,\mathrm{K}^2_{\nu+k}(\zeta)\right]\right\}$$
$$=-\frac{1}{2}\frac{z^2\zeta^2}{z^2-\zeta^2}\left\{\left[\mathrm{K}^2_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{K}^2_{\nu+n}(\zeta)-\mathrm{K}^2_{\nu+n}(z)\,\mathrm{K}^2_{\nu+n+1}(\zeta)\right]\right.$$
$$\left.-\left[\mathrm{K}^2_{\nu}(z)\,\mathrm{K}^2_{\nu-1}(\zeta)-\mathrm{K}^2_{\nu-1}(z)\,\mathrm{K}^2_{\nu}(\zeta)\right]\right\}, \tag{15.320}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left\{(\nu+k)^2\,\mathrm{K}^2_{\nu+k}(z)\,\mathrm{K}^2_{\nu+k}(\zeta)\right.$$
$$\left.+\frac{z^2\zeta^2}{z^2+\zeta^2}\left[\mathrm{K}^2_{\nu+k}(z)\,\mathrm{K}'^2_{\nu+k}(\zeta)+\mathrm{K}'^2_{\nu+k}(z)\,\mathrm{K}^2_{\nu+k}(\zeta)\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{z^2\zeta^2}{z^2+\zeta^2}\left\{\left[\mathrm{K}_{\nu+n+1}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu+n}^2(\zeta)+\mathrm{K}_{\nu+n}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu+n+1}^2(\zeta)\right]\right.$$
$$\left.+\left[\mathrm{K}_{\nu}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu-1}^2(\zeta)+\mathrm{K}_{\nu-1}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu}^2(\zeta)\right]\right\}, \tag{15.321}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\left\{(\nu+k)^2\,\mathrm{I}_{\nu+k}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}^2(\zeta)+\frac{z^2\zeta^2}{z^2-\zeta^2}\left[\mathrm{I}_{\nu+k}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}'^2(\zeta)-\mathrm{I}_{\nu+k}'^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}^2(\zeta)\right]\right\}$$
$$= -\frac{1}{2}\frac{z^2\zeta^2}{z^2-\zeta^2}\left\{\left[\mathrm{I}_{\nu+n+1}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu+n}^2(\zeta)-\mathrm{I}_{\nu+n}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu+n+1}^2(\zeta)\right]\right.$$
$$\left.-\left[\mathrm{I}_{\nu}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu-1}^2(\zeta)-\mathrm{I}_{\nu-1}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu}^2(\zeta)\right]\right\}, \tag{15.322}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left\{(\nu+k)^2\,\mathrm{I}_{\nu+k}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}^2(\zeta)+\frac{z^2\zeta^2}{z^2+\zeta^2}\left[\mathrm{I}_{\nu+k}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}'^2(\zeta)+\mathrm{I}_{\nu+k}'^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}^2(\zeta)\right]\right\}$$
$$= \frac{1}{2}\frac{z^2\zeta^2}{z^2+\zeta^2}\left\{(-1)^n\left[\mathrm{I}_{\nu+n+1}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu+n}^2(\zeta)+\mathrm{I}_{\nu+n}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu+n+1}^2(\zeta)\right]\right.$$
$$\left.+\left[\mathrm{I}_{\nu}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu-1}^2(\zeta)+\mathrm{I}_{\nu-1}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu}^2(\zeta)\right]\right\}, \tag{15.323}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\left\{(\nu+k)^2\,\mathrm{I}_{-\nu-k}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}^2(\zeta)+\frac{z^2\zeta^2}{z^2-\zeta^2}\left[\mathrm{I}_{-\nu-k}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}'^2(\zeta)-\mathrm{I}_{-\nu-k}'^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}^2(\zeta)\right]\right\}$$
$$= -\frac{1}{2}\frac{z^2\zeta^2}{z^2-\zeta^2}\left\{\left[\mathrm{I}_{-\nu-n-1}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu+n}^2(\zeta)-\mathrm{I}_{-\nu-n}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu+n+1}^2(\zeta)\right]\right.$$
$$\left.-\left[\mathrm{I}_{-\nu}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu-1}^2(\zeta)-\mathrm{I}_{1-\nu}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu}^2(\zeta)\right]\right\}, \tag{15.324}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left\{(\nu+k)^2\,\mathrm{I}_{-\nu-k}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}^2(\zeta)\right.$$
$$\left.+\frac{z^2\zeta^2}{z^2+\zeta^2}\left[\mathrm{I}_{-\nu-k}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}'^2(\zeta)+\mathrm{I}_{-\nu-k}'^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}^2(\zeta)\right]\right\}$$
$$= \frac{1}{2}\frac{z^2\zeta^2}{z^2+\zeta^2}\left\{(-1)^n\left[\mathrm{I}_{-\nu-n-1}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu+n}^2(\zeta)+\mathrm{I}_{-\nu-n}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu+n+1}^2(\zeta)\right]\right.$$
$$\left.+\left[\mathrm{I}_{-\nu}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu-1}^2(\zeta)+\mathrm{I}_{1-\nu}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu}^2(\zeta)\right]\right\}, \tag{15.325}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(\nu+k)^2\mathrm{I}_{\nu+k}^4(z)+z\sum_{k=0}^{n}\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\mathrm{I}_{\nu+k}'(z)\left\{z^2\mathrm{I}_{\nu+k}'^2(z)\right.$$
$$\left.+z\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\mathrm{I}_{\nu+k}'(z)-\left[z^2+(\nu+k)^2\right]\mathrm{I}_{\nu+k}^2(z)\right\}$$
$$= \frac{z^3}{2}\left\{\mathrm{I}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{I}_{\nu+n}(z)\left[\mathrm{I}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{I}_{\nu+n}'(z)-\mathrm{I}_{\nu+n+1}'(z)\mathrm{I}_{\nu+n}(z)\right]\right.$$

$$- \mathrm{I}_\nu(z)\mathrm{I}_{\nu-1}(z)\Big[\mathrm{I}_\nu(z)\mathrm{I}'_{\nu-1}(z) - \mathrm{I}'_\nu(z)\mathrm{I}_{\nu-1}(z)\Big]\Big\}, \tag{15.326}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\Big\{(\nu+k)^2\mathrm{I}^4_{\nu+k}(z) + z^2\,\mathrm{I}^2_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}'^2_{\nu+k}(z)\Big\}$$
$$= \frac{z^2}{2}\Big\{(-1)^n\,\mathrm{I}^2_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{I}^2_{\nu+n}(z) + \mathrm{I}^2_\nu(z)\,\mathrm{I}^2_{\nu-1}(z)\Big\}, \tag{15.327}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(\nu+k)^2\mathrm{I}^4_{-\nu-k}(z) + z\sum_{k=0}^{n}\mathrm{I}_{-\nu-k}(z)\mathrm{I}'_{-\nu-k}(z)\Big\{z^2\mathrm{I}'^2_{-\nu-k}(z)$$
$$+ z\mathrm{I}_{-\nu-k}(z)\mathrm{I}'_{-\nu-k}(z) - \Big[z^2 + (\nu+k)^2\Big]\mathrm{I}^2_{-\nu-k}(z)\Big\}$$
$$= \frac{z^3}{2}\Big\{\mathrm{I}_{-\nu-n-1}(z)\mathrm{I}_{-\nu-n}(z)\Big[\mathrm{I}_{-\nu-n-1}(z)\mathrm{I}'_{-\nu-n}(z) - \mathrm{I}'_{-\nu-n-1}(z)\mathrm{I}_{-\nu-n}(z)\Big]$$
$$- \mathrm{I}_{-\nu}(z)\mathrm{I}_{1-\nu}(z)\Big[\mathrm{I}_{-\nu}(z)\mathrm{I}'_{1-\nu}(z) - \mathrm{I}'_{-\nu}(z)\mathrm{I}_{1-\nu}(z)\Big]\Big\}, \tag{15.328}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\Big[(\nu+k)^2\,\mathrm{I}^4_{-\nu-k}(z) + z^2\,\mathrm{I}^2_{-\nu-k}(z)\,\mathrm{I}'^2_{-\nu-k}(z)\Big]$$
$$= \frac{z^2}{2}\Big\{(-1)^n\mathrm{I}^2_{-\nu-n-1}(z)\,\mathrm{I}^2_{-\nu-n}(z) + \Big[\mathrm{I}^2_{-\nu}(z)\,\mathrm{I}^2_{1-\nu-1}(z)\Big\}, \tag{15.329}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\Big\{(\nu+k)^2\,\mathrm{I}^2_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}^2_{-\nu-k}(z) + \frac{z^2}{2}\Big[\mathrm{I}^2_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}'^2_{-\nu-k}(z) + \mathrm{I}'^2_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}^2_{-\nu-k}(z)\Big]\Big\}$$
$$= \frac{z^2}{4}\Big\{(-1)^n\Big[\mathrm{I}^2_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{I}^2_{-\nu-n}(z) + \mathrm{I}^2_{\nu+n}(z)\,\mathrm{I}^2_{-\nu-n-1}(z)\Big]$$
$$+ \Big[\mathrm{I}^2_\nu(z)\,\mathrm{I}^2_{1-\nu-1}(z) + \mathrm{I}^2_{\nu-1}(z)\,\mathrm{I}^2_{-\nu}(z)\Big]\Big\}, \tag{15.330}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(\nu+k)^2\mathrm{K}^4_{\nu+k}(z) + z\sum_{k=0}^{n}\mathrm{K}_{\nu+k}(z)\mathrm{K}'_{\nu+k}(z)\Big\{z^2\mathrm{K}'^2_{\nu+k}(z)$$
$$+ z\mathrm{K}_{\nu+k}(z)\mathrm{K}'_{\nu+k}(z) - \Big[z^2 + (\nu+k)^2\Big]\mathrm{K}^2_{\nu+k}(z)\Big\}$$
$$= \frac{z^3}{2}\Big\{\mathrm{K}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{K}_{\nu+n}(z)\Big[\mathrm{K}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{K}'_{\nu+n}(z) - \mathrm{K}'_{\nu+n+1}(z)\mathrm{K}_{\nu+n}(z)\Big]$$
$$- \mathrm{K}_\nu(z)\mathrm{K}_{\nu-1}(z)\Big[\mathrm{K}_\nu(z)\mathrm{K}'_{\nu-1}(z) - \mathrm{K}'_\nu(z)\mathrm{K}_{\nu-1}(z)\Big]\Big\}, \tag{15.331}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\Big\{(\nu+k)^2\mathrm{K}^4_{\nu+k}(z) + z^2\,\mathrm{K}^2_{\nu+k}(z)\,\mathrm{K}'^2_{\nu+k}(z)\Big\}$$
$$= \frac{z^2}{2}\Big\{(-1)^n\,\mathrm{K}^2_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{K}^2_{\nu+n}(z) + \mathrm{K}^2_\nu(z)\,\mathrm{K}^2_{\nu-1}(z)\Big\}, \tag{15.332}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left\{(\nu+k)^2\,\mathrm{I}_{\nu+k}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}^2(z)+\frac{z^2}{2}\Big[\mathrm{I}_{\nu+k}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}'^2(z)+\mathrm{I}_{\nu+k}'^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}^2(z)\Big]\right\}$$
$$=\frac{z^2}{4}\left\{(-1)^n\Big[\mathrm{I}_{\nu+n+1}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu+n}^2(z)+\mathrm{I}_{\nu+n}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu+n+1}^2(z)\Big]\right.$$
$$\left.+\Big[\mathrm{I}_{\nu}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu-1}^2(z)+\mathrm{I}_{\nu-1}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu}^2(z)\Big]\right\},\tag{15.333}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left\{(\nu+k)^2\,\mathrm{I}_{-\nu-k}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}^2(z)\right.$$
$$\left.+\frac{z^2}{2}\Big[\mathrm{I}_{-\nu-k}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}'^2(z)+\mathrm{I}_{-\nu-k}'^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}^2(z)\Big]\right\}$$
$$=\frac{z^2}{4}\left\{(-1)^n\Big[\mathrm{I}_{-\nu-n-1}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu+n}^2(z)+\mathrm{I}_{-\nu-n}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu+n+1}^2(z)\Big]\right.$$
$$\left.+\Big[\mathrm{I}_{-\nu}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu-1}^2(z)+\mathrm{I}_{1-\nu}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu}^2(z)\Big]\right\}.\tag{15.334}$$

可以预料，还应当有更高次的求和公式，从略.

根据虚宗量柱函数与柱函数之间的关系

$$\mathrm{I}_\nu(z)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\nu/2}\,\mathrm{J}_\nu(z\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}), & -\pi<\arg z\leqslant\pi/2,\\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}3\pi\nu/2}\,\mathrm{J}_\nu(z\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}3\pi/2}), & \pi/2<\arg z\leqslant\pi,\end{cases}\tag{15.335}$$

$$\mathrm{K}_\nu(z)=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{i}\pi}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\nu/2}\,\mathrm{H}_\nu^{(1)}(z\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}), & -\pi<\arg z\leqslant\pi/2,\\ -\dfrac{\mathrm{i}\pi}{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\nu/2}\,\mathrm{H}_\nu^{(2)}(z\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2}), & -\pi/2<\arg z\leqslant\pi,\end{cases}\tag{15.336}$$

由柱函数在大 $|\nu|$ 时的渐近行为 (15.32) 就能导出虚宗量柱函数的渐近行为. 这样就可以看出，上面列出的求和公式中，至少在 $\nu>0$ 的条件下，有一部分许可取极限 $n\to\infty$. 这些结果是:

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\nu+k)\,\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}_{\nu+k}(\zeta)=\frac{1}{2}\frac{z\zeta}{z+\zeta}\Big[\mathrm{I}_\nu(z)\,\mathrm{I}_{\nu-1}(\zeta)+\mathrm{I}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{I}_\nu(\zeta)\Big],\tag{15.337}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\nu+k)\,\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}_{\nu+k}(\zeta)=\frac{1}{2}\frac{z\zeta}{z-\zeta}\Big[\mathrm{I}_\nu(z)\,\mathrm{I}_{\nu-1}(\zeta)-\mathrm{I}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{I}_\nu(\zeta)\Big],\tag{15.338}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\nu+k)\,\mathrm{I}_{\nu+k}^2(z)=\frac{z}{2}\mathrm{I}_\nu(z)\,\mathrm{I}_{\nu-1}(z),\tag{15.339}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\nu+k)\,\mathrm{I}_{\nu+k}^2(z)=-\frac{z^2}{2}\Big[\mathrm{I}_\nu(z)\,\mathrm{I}_{\nu-1}'(z)-\mathrm{I}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{I}_\nu'(z)\Big],\tag{15.340}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\Big[\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}'_{\nu+k}(\zeta)-\mathrm{I}'_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}_{\nu+k}(\zeta)\Big]=\frac{1}{2}\Big[\mathrm{I}_{\nu}(z)\,\mathrm{I}_{\nu-1}(\zeta)-\mathrm{I}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{I}_{\nu}(\zeta)\Big], \tag{15.341}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\Big[\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}'_{\nu+k}(\zeta)+\mathrm{I}'_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}_{\nu+k}(\zeta)\Big]=\frac{1}{2}\Big[\mathrm{I}_{\nu}(z)\,\mathrm{I}_{\nu-1}(\zeta)+\mathrm{I}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{I}_{\nu}(\zeta)\Big], \tag{15.342}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\Big\{\Big[z^2+(\nu+k)^2\Big]\mathrm{I}^2_{\nu+k}(z)-z^2\mathrm{I}'^2_{\nu+k}(\zeta)-z\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}'_{\nu+k}(z)\Big\}$$

$$=\frac{z^2}{2}\Big[\mathrm{I}_{\nu}(z)\,\mathrm{I}'_{\nu-1}(z)-\mathrm{I}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{I}'_{\nu}(z)\Big], \tag{15.343}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\mathrm{I}'_{\nu+k}(z)=\frac{1}{2}\,\mathrm{I}_{\nu}(z)\,\mathrm{I}_{\nu-1}(z)\Big], \tag{15.344}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\nu+k)^2\Big\{\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\mathrm{I}_{\nu+k}(\zeta)+\frac{z\zeta}{\zeta-z}\Big[\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\mathrm{I}'_{\nu+k}(\zeta)-\mathrm{I}'_{\nu+k}(z)\mathrm{I}_{\nu+k}(\zeta)\Big]\Big\}$$

$$=\frac{\nu(\nu-1)}{2}\,\frac{z\zeta}{\zeta-z}\Big[\mathrm{I}_{\nu}(z)\mathrm{I}_{\nu-1}(\zeta)-\mathrm{I}_{\nu-1}(z)\mathrm{I}_{\nu}(\zeta)\Big], \tag{15.345}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\nu+k)^2\Big\{\Big[1-(\nu+k)^2-z^2\Big]\mathrm{I}^2_{\nu+k}(z)-z\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\mathrm{I}'_{\nu+k}(z)-z^2\mathrm{I}'^2_{\nu+k}(z)\Big\}$$

$$=\frac{\nu(\nu-1)}{2}\,z^2\Big[\mathrm{I}_{\nu}(z)\mathrm{I}'_{\nu-1}(z)-\mathrm{I}_{\nu-1}(z)\mathrm{I}'_{\nu}(z)\Big], \tag{15.346}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\nu+k)^2\Big\{\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\mathrm{I}_{\nu+k}(\zeta)-\frac{z\zeta}{\zeta+z}\Big[\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\mathrm{I}'_{\nu+k}(\zeta)+\mathrm{I}'_{\nu+k}(z)\mathrm{I}_{\nu+k}(\zeta)\Big]\Big\}$$

$$=-\frac{\nu(\nu-1)}{2}\,\frac{z\zeta}{\zeta+z}\Big[\mathrm{I}_{\nu}(z)\mathrm{I}_{\nu-1}(\zeta)+\mathrm{I}_{\nu-1}(z)\mathrm{I}_{\nu}(\zeta)\Big], \tag{15.347}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\nu+k)^2\Big\{\mathrm{I}^2_{\nu+k}(z)-z\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\mathrm{I}'_{\nu+k}(z)\Big\}$$

$$=-\frac{\nu(\nu-1)}{2}z\,\mathrm{I}_{\nu}(z)\mathrm{I}_{\nu-1}(z), \tag{15.348}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\nu+k)\,\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}_{\nu+k}(\zeta)\Big[z\,\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}'_{\nu+k}(\zeta)+\zeta\,\mathrm{I}'_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}_{\nu+k}(\zeta)\Big]$$

$$=\frac{z\zeta}{4}\Big[\mathrm{I}^2_{\nu}(z)\,\mathrm{I}^2_{\nu-1}(\zeta)+\mathrm{I}^2_{\nu-1}(z)\,\mathrm{I}^2_{\nu}(\zeta)\Big], \tag{15.349}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\nu+k)\,\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}_{\nu+k}(\zeta)\Big[z\,\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}'_{\nu+k}(\zeta)-\zeta\,\mathrm{I}'_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}_{\nu+k}(\zeta)\Big]$$

$$=\frac{z\zeta}{4}\Big[\mathrm{I}^2_{\nu}(z)\,\mathrm{I}^2_{\nu-1}(\zeta)-\mathrm{I}^2_{\nu-1}(z)\,\mathrm{I}^2_{\nu}(\zeta)\Big], \tag{15.350}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\nu+k)\,\mathrm{I}_{\nu+k}^3(z)\,\mathrm{I}'_{\nu+k}(z)=\frac{z}{4}\,\mathrm{I}_\nu^2(z)\,\mathrm{I}_{\nu-1}^2(z), \tag{15.351}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\nu+k)\,\mathrm{I}_{\nu+k}^2(z)\left\{z^2\mathrm{I}'^2_{\nu+k}(z)+2z\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\mathrm{I}'_{\nu+k}(z)-\left[z^2+(\nu+k)^2\right]\mathrm{I}_{\nu+k}^2(z)\right\}$$
$$=-\frac{z^3}{2}\mathrm{I}_\nu(z)\,\mathrm{I}_{\nu-1}(z)\left[\mathrm{I}_\nu(z)\,\mathrm{I}'_{\nu-1}(z)-\mathrm{I}'_\nu(z)\,\mathrm{I}_{\nu-1}(z)\right], \tag{15.352}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left\{(\nu+k)^2\,\mathrm{I}_{\nu+k}^2(z)\,\mathrm{I}_{\nu+k}^2(\zeta)+\frac{z^2\zeta^2}{z^2-\zeta^2}\left[\mathrm{I}_{\nu+k}^2(z)\,\mathrm{I}'^2_{\nu+k}(\zeta)-\mathrm{I}'^2_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}_{\nu+k}^2(\zeta)\right]\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\frac{z^2\zeta^2}{z^2-\zeta^2}\left[\mathrm{I}_\nu^2(z)\,\mathrm{I}_{\nu-1}^2(\zeta)-\mathrm{I}_{\nu-1}^2(z)\,\mathrm{I}_\nu^2(\zeta)\right], \tag{15.353}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left\{(\nu+k)^2\,\mathrm{I}_{\nu+k}^2(z)\,\mathrm{I}_{\nu+k}^2(\zeta)+\frac{z^2\zeta^2}{z^2+\zeta^2}\left[\mathrm{I}_{\nu+k}^2(z)\,\mathrm{I}'^2_{\nu+k}(\zeta)+\mathrm{I}'^2_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}_{\nu+k}^2(\zeta)\right]\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\frac{z^2\zeta^2}{z^2+\zeta^2}\left[\mathrm{I}_\nu^2(z)\,\mathrm{I}_{\nu-1}^2(\zeta)+\mathrm{I}_{\nu-1}^2(z)\,\mathrm{I}_\nu^2(\zeta)\right], \tag{15.354}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\nu+k)^2\mathrm{I}_{\nu+k}^4(z)+z\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\mathrm{I}'_{\nu+k}(z)\left\{z^2\mathrm{I}'^2_{\nu+k}(z)\right.$$
$$\left.+z\,\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\mathrm{I}'_{\nu+k}(z)-\left[z^2+(\nu+k)^2\right]\mathrm{I}_{\nu+k}^2(z)\right\}$$
$$=-\frac{z^3}{2}\mathrm{I}_\nu(z)\mathrm{I}_{\nu-1}(z)\left[\mathrm{I}_\nu(z)\mathrm{I}'_{\nu-1}(z)-\mathrm{I}'_\nu(z)\mathrm{I}_{\nu-1}(z)\right], \tag{15.355}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left[(\nu+k)^2\mathrm{I}_{\nu+k}^4(z)+z^2\,\mathrm{I}_{\nu+k}^2(z)\,\mathrm{I}'^2_{\nu+k}(z)\right]=\frac{z^2}{2}\mathrm{I}_\nu^2(z)\,\mathrm{I}_{\nu-1}^2(z). \tag{15.356}$$

另有一些求和公式，在 $\nu>0$ 并且 $|z|<|\zeta|$ 的条件下，也可以取极限 $n\to\infty$. 这样得到的无穷级数有：

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\nu+k)\,\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-k}(\zeta)=\frac{1}{2}\frac{z\zeta}{z+\zeta}\left[\mathrm{I}_\nu(z)\,\mathrm{I}_{1-\nu}(\zeta)+\mathrm{I}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu}(\zeta)\right], \tag{15.357}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\nu+k)\,\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-k}(\zeta)=-\frac{z^2}{2}\left[\mathrm{I}_\nu(z)\,\mathrm{I}_{1-\nu}(\zeta)-\mathrm{I}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu}(\zeta)\right], \tag{15.358}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}'_{-\nu-k}(\zeta)-\mathrm{I}'_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-k}(\zeta)\right]=\frac{1}{2}\left[\mathrm{I}_\nu(z)\,\mathrm{I}_{1-\nu}(\zeta)-\mathrm{I}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu}(\zeta)\right], \tag{15.359}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left[\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}'_{-\nu-k}(\zeta)+\mathrm{I}'_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-k}(\zeta)\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[\mathrm{I}_\nu(z)\,\mathrm{I}_{1-\nu}(\zeta)+\mathrm{I}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu}(\zeta)\right], \tag{15.360}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\nu+k)\,\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}(\zeta)=-\frac{1}{2}\frac{z\zeta}{z-\zeta}\Big[\mathrm{I}_{\nu}(z)\,\mathrm{K}_{\nu-1}(\zeta)+\mathrm{I}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{K}_{\nu}(\zeta)\Big], \tag{15.361}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\nu+k)\,\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}(\zeta)=-\frac{1}{2}\frac{z\zeta}{z+\zeta}\Big[\mathrm{I}_{\nu}(z)\,\mathrm{K}_{\nu-1}(\zeta)-\mathrm{I}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{K}_{\nu}(\zeta)\Big], \tag{15.362}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\Big[\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\mathrm{K}'_{\nu+k}(\zeta)+\mathrm{I}'_{\nu+k}(z)\mathrm{K}_{\nu+k}(\zeta)\Big]=-\frac{1}{2}\Big[\mathrm{I}_{\nu}(z)\mathrm{K}_{\nu-1}(\zeta)-\mathrm{I}_{\nu-1}(z)\mathrm{K}_{\nu}(\zeta)\Big], \tag{15.363}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\Big[\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\mathrm{K}'_{\nu+k}(\zeta)-\mathrm{I}'_{\nu+k}(z)\mathrm{K}_{\nu+k}(\zeta)\Big]=\frac{1}{2}\Big[\mathrm{I}_{\nu}(z)\mathrm{K}_{\nu-1}(\zeta)+\mathrm{I}_{\nu-1}(z)\mathrm{K}_{\nu}(\zeta)\Big], \tag{15.364}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\nu+k)^2\Big\{\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\mathrm{I}_{-\nu-k}(\zeta)+\frac{z\zeta}{\zeta-z}\Big[\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\mathrm{I}'_{-\nu-k}(\zeta)-\mathrm{I}'_{\nu+k}(z)\mathrm{I}_{-\nu-k}(\zeta)\Big]\Big\}$$
$$=\frac{\nu(\nu-1)}{2}\frac{z\zeta}{\zeta-z}\Big[\mathrm{I}_{\nu}(z)\mathrm{I}_{1-\nu}(\zeta)-\mathrm{I}_{\nu-1}(z)\mathrm{I}_{-\nu}(\zeta)\Big], \tag{15.365}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\nu+k)^2\Big\{\mathrm{I}_{-\nu-k}(z)\mathrm{I}_{-\nu-k}(\zeta)+\frac{z\zeta}{\zeta-z}\Big[\mathrm{I}_{-\nu-k}(z)\mathrm{I}'_{-\nu-k}(\zeta)-\mathrm{I}'_{-\nu-k}(z)\mathrm{I}_{-\nu-k}(\zeta)\Big]\Big\}$$
$$=\frac{\nu(\nu-1)}{2}\frac{z\zeta}{\zeta-z}\Big[\mathrm{I}_{-\nu}(z)\mathrm{I}_{1-\nu}(\zeta)-\mathrm{I}_{1-\nu}(z)\mathrm{I}_{-\nu}(\zeta)\Big], \tag{15.366}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\nu+k)^2\Big\{\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\mathrm{K}_{\nu+k}(\zeta)-\frac{z\zeta}{\zeta+z}\Big[\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\mathrm{K}'_{\nu+k}(\zeta)+\mathrm{I}'_{\nu+k}(z)\mathrm{K}_{\nu+k}(\zeta)\Big]\Big\}$$
$$=\frac{\nu(\nu-1)}{2}\frac{z\zeta}{\zeta+z}\Big[\mathrm{I}_{\nu}(z)\mathrm{K}_{\nu-1}(\zeta)-\mathrm{I}_{\nu-1}(z)\mathrm{K}_{\nu}(\zeta)\Big], \tag{15.367}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\nu+k)^2\Big\{\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\mathrm{K}_{\nu+k}(z)-\frac{z}{2}\Big[\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\mathrm{K}'_{\nu+k}(z)+\mathrm{I}'_{\nu+k}(z)\mathrm{K}_{\nu+k}(z)\Big]\Big\}$$
$$=\frac{\nu(\nu-1)}{4}z\Big[\mathrm{I}_{\nu}(z)\mathrm{K}_{\nu-1}(z)-\mathrm{I}_{\nu-1}(z)\mathrm{K}_{\nu}(z)\Big], \tag{15.368}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\nu+k)\,\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-k}(\zeta)\Big[z\,\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}'_{-\nu-k}(\zeta)+\zeta\,\mathrm{I}'_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-k}(\zeta)\Big]$$
$$=\frac{z\zeta}{4}\Big[\mathrm{I}^2_{\nu}(z)\,\mathrm{I}^2_{1-\nu}(\zeta)+\mathrm{I}^2_{\nu-1}(z)\,\mathrm{I}^2_{-\nu}(\zeta)\Big], \tag{15.369}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\nu+k)\,\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-k}(\zeta)\Big[z\,\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}'_{-\nu-k}(\zeta)-\zeta\,\mathrm{I}'_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-k}(\zeta)\Big]$$
$$=\frac{z\zeta}{4}\Big[\mathrm{I}^2_{\nu}(z)\,\mathrm{I}^2_{1-\nu}(\zeta)-\mathrm{I}^2_{\nu-1}(z)\,\mathrm{I}^2_{-\nu}(\zeta)\Big], \tag{15.370}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\nu+k)\,\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}(\zeta)\Big[z\,\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{K}'_{\nu+k}(\zeta)+\zeta\,\mathrm{I}'_{\nu+k}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}(\zeta)\Big]$$
$$=\frac{z\zeta}{4}\Big[\mathrm{I}_{\nu}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu-1}^2(\zeta)+\mathrm{I}_{\nu-1}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu}^2(\zeta)\Big], \tag{15.371}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\nu+k)\,\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}(\zeta)\Big[z\,\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{K}'_{\nu+k}(\zeta)-\zeta\,\mathrm{I}'_{\nu+k}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}(\zeta)\Big]$$
$$=\frac{z\zeta}{4}\Big[\mathrm{I}_{\nu}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu-1}^2(\zeta)-\mathrm{I}_{\nu-1}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu}^2(\zeta)\Big]\Big\}, \tag{15.372}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left\{(\nu+k)^2\,\mathrm{I}_{\nu+k}^2(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-k}^2(\zeta)+\frac{z^2\zeta^2}{z^2-\zeta^2}\Big[\mathrm{I}_{\nu+k}^2(z)\,\mathrm{I'}_{-\nu-k}^2(\zeta)-\mathrm{I'}_{\nu+k}^2(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-k}^2(\zeta)\Big]\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\,\frac{z^2\zeta^2}{z^2-\zeta^2}\Big[\mathrm{I}_{\nu}^2(z)\,\mathrm{I}_{1-\nu-1}^2(\zeta)-\mathrm{I}_{\nu-1}^2(z)\,\mathrm{I}_{-\nu}^2(\zeta)\Big], \tag{15.373}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\bigg\{(\nu+k)^2\,\mathrm{I}_{\nu+k}^2(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-k}^2(\zeta)$$
$$+\frac{z^2\zeta^2}{z^2+\zeta^2}\Big[\mathrm{I}_{\nu+k}^2(z)\,\mathrm{I'}_{-\nu-k}^2(\zeta)+\mathrm{I'}_{\nu+k}^2(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-k}^2(\zeta)\Big]\bigg\}$$
$$=\frac{1}{2}\,\frac{z^2\zeta^2}{z^2+\zeta^2}\Big[\mathrm{I}_{\nu}^2(z)\,\mathrm{I}_{1-\nu-1}^2(\zeta)+\mathrm{I}_{\nu-1}^2(z)\,\mathrm{I}_{-\nu}^2(\zeta)\Big], \tag{15.374}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left\{(\nu+k)^2\,\mathrm{I}_{\nu+k}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}^2(\zeta)+\frac{z^2\zeta^2}{z^2-\zeta^2}\Big[\mathrm{I}_{\nu+k}^2(z)\,\mathrm{K'}_{\nu+k}^2(\zeta)-\mathrm{I'}_{\nu+k}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}^2(\zeta)\Big]\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\,\frac{z^2\zeta^2}{z^2-\zeta^2}\Big[\mathrm{I}_{\nu}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu-1}^2(\zeta)-\mathrm{I}_{\nu-1}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu}^2(\zeta)\Big], \tag{15.375}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left\{(\nu+k)^2\,\mathrm{I}_{\nu+k}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}^2(\zeta)+\frac{z^2\zeta^2}{z^2+\zeta^2}\Big[\mathrm{I}_{\nu+k}^2(z)\,\mathrm{K'}_{\nu+k}^2(\zeta)+\mathrm{I'}_{\nu+k}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}^2(\zeta)\Big]\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\,\frac{z^2\zeta^2}{z^2+\zeta^2}\Big[\mathrm{I}_{\nu}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu-1}^2(\zeta)+\mathrm{I}_{\nu-1}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu}^2(\zeta)\Big]. \tag{15.376}$$

§15.4 柱函数与虚宗量柱函数的混合求和公式

由于柱函数与虚宗量柱函数具有形式颇为类似的递推关系，所以它们之间也存在混合型的求和公式．下面列出二次型的求和公式：

$$\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{\nu+k}{z}\mathrm{I}_{\nu+k}(\zeta)-\mathrm{I}'_{\nu+k}(\zeta)\right]\mathrm{J}_{\nu+k}(z)$$
$$=\frac{1}{2}\bigg\{\Big[\mathrm{J}_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{I}_{\nu+n}(\zeta)-\mathrm{J}_{\nu+n}(z)\,\mathrm{I}_{\nu+n+1}(\zeta)\Big]$$
$$-\Big[\mathrm{J}_{\nu}(z)\,\mathrm{I}_{\nu-1}(\zeta)-\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{I}_{\nu}(\zeta)\Big]\bigg\}, \tag{15.377}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left[\frac{\nu+k}{z}\mathrm{I}_{\nu+k}(\zeta)+\mathrm{I}'_{\nu+k}(\zeta)\right]\mathrm{J}_{\nu+k}(z)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{(-1)^n\left[\mathrm{J}_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{I}_{\nu+n}(\zeta)+\mathrm{J}_{\nu+n}(z)\,\mathrm{I}_{\nu+n+1}(\zeta)\right]\right.$$
$$\left.+\left[\mathrm{J}_{\nu}(z)\,\mathrm{I}_{\nu-1}(\zeta)+\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{I}_{\nu}(\zeta)\right]\right\}, \tag{15.378}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{\nu+k}{z}\mathrm{I}_{-\nu-k}(\zeta)-\mathrm{I}'_{-\nu-k}(\zeta)\right]\mathrm{J}_{\nu+k}(z)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left[\mathrm{J}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{I}_{-\nu-n}(\zeta)-\mathrm{J}_{\nu+n}(z)\mathrm{I}_{-\nu-n-1}(\zeta)\right]\right.$$
$$\left.-\left[\mathrm{J}_{\nu}(z)\mathrm{I}_{1-\nu}(\zeta)-\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\mathrm{I}'_{-\nu}(\zeta)\right]\right\}, \tag{15.379}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left[\frac{\nu+k}{z}\mathrm{I}_{-\nu-k}(\zeta)+\mathrm{I}'_{-\nu-k}(\zeta)\right]\mathrm{J}_{\nu+k}(z)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{(-1)^n\left[\mathrm{J}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{I}_{-\nu-n}(\zeta)+\mathrm{J}_{\nu+n}(z)\mathrm{I}_{-\nu-n-1}(\zeta)\right]\right.$$
$$\left.+\left[\mathrm{J}_{\nu}(z)\mathrm{I}_{1-\nu}(\zeta)+\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\mathrm{I}_{-\nu}(\zeta)\right]\right\}, \tag{15.380}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{\nu+k}{z}\mathrm{I}_{\nu+k}(\zeta)+\mathrm{I}'_{\nu+k}(\zeta)\right]\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{-\left[\mathrm{J}_{-\nu-n-1}(z)\mathrm{I}_{\nu+n}(\zeta)-\mathrm{J}_{-\nu-n}(z)\mathrm{I}_{\nu+n+1}(\zeta)\right]\right.$$
$$\left.+\left[\mathrm{J}_{-\nu}(z)\mathrm{I}_{\nu-1}(\zeta)-\mathrm{J}_{1-\nu}(z)\mathrm{I}_{\nu}(\zeta)\right]\right\}, \tag{15.381}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left[\frac{\nu+k}{z}\mathrm{I}_{\nu+k}(\zeta)-\mathrm{I}'_{\nu+k}(\zeta)\right]\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{(-1)^{n+1}\left[\mathrm{J}_{-\nu-n-1}(z)\mathrm{I}_{\nu+n}(\zeta)+\mathrm{J}_{-\nu-n}(z)\mathrm{I}_{\nu+n+1}(\zeta)\right]\right.$$
$$\left.-\left[\mathrm{J}_{-\nu}(z)\mathrm{I}_{\nu-1}(\zeta)+\mathrm{J}_{1-\nu}(z)\mathrm{I}_{\nu}(\zeta)\right]\right\}, \tag{15.382}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{\nu+k}{z}\mathrm{I}_{-\nu-k}(\zeta)+\mathrm{I}'_{-\nu-k}(\zeta)\right]\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{-\left[\mathrm{J}_{-\nu-n-1}(z)\mathrm{I}_{-\nu-n}(\zeta)-\mathrm{J}_{-\nu-n}(z)\mathrm{I}_{-\nu-n-1}(\zeta)\right]\right.$$
$$\left.+\left[\mathrm{J}_{-\nu}(z)\mathrm{I}_{1-\nu}(\zeta)-\mathrm{J}_{1-\nu}(z)\mathrm{I}_{-\nu}(\zeta)\right]\right\}, \tag{15.383}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left[\frac{\nu+k}{z}\mathrm{I}_{-\nu-k}(\zeta)-\mathrm{I}'_{-\nu-k}(\zeta)\right]\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)\\&\quad=\frac{1}{2}\Big\{(-1)^{n+1}\Big[\mathrm{J}_{-\nu-n-1}(z)\mathrm{I}_{-\nu-n}(\zeta)+\mathrm{J}_{-\nu-n}(z)\mathrm{I}_{-\nu-n-1}(\zeta)\Big]\\&\qquad-\Big[\mathrm{J}_{-\nu}(z)\mathrm{I}_{1-\nu}(\zeta)+\mathrm{J}_{1-\nu}(z)\mathrm{I}_{-\nu}(\zeta)\Big]\Big\},\end{aligned}\tag{15.384}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{\nu+k}{z}\mathrm{I}_{\nu+k}(\zeta)-\mathrm{I}'_{\nu+k}(\zeta)\right]\mathrm{N}_{\nu+k}(z)\\&\quad=\frac{1}{2}\Big\{\Big[\mathrm{N}_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{I}_{\nu+n}(\zeta)-\mathrm{N}_{\nu+n}(z)\,\mathrm{I}_{\nu+n+1}(\zeta)\Big]\\&\qquad-\Big[\mathrm{N}_{\nu}(z)\,\mathrm{I}_{\nu-1}(\zeta)-\mathrm{N}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{I}_{\nu}(\zeta)\Big]\Big\},\end{aligned}\tag{15.385}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left[\frac{\nu+k}{z}\mathrm{I}_{\nu+k}(\zeta)+\mathrm{I}'_{\nu+k}(\zeta)\right]\mathrm{N}_{\nu+k}(z)\\&\quad=\frac{1}{2}\Big\{(-1)^{n}\Big[\mathrm{N}_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{I}_{\nu+n}(\zeta)+\mathrm{N}_{\nu+n}(z)\,\mathrm{I}_{\nu+n+1}(\zeta)\Big]\\&\qquad+\Big[\mathrm{N}_{\nu}(z)\,\mathrm{I}_{\nu-1}(\zeta)+\mathrm{N}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{I}_{\nu}(\zeta)\Big]\Big\},\end{aligned}\tag{15.386}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{\nu+k}{z}\mathrm{I}_{-\nu-k}(\zeta)-\mathrm{I}'_{-\nu-k}(\zeta)\right]\mathrm{N}_{\nu+k}(z)\\&\quad=\frac{1}{2}\Big\{\Big[\mathrm{N}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{I}_{-\nu-n}(\zeta)-\mathrm{N}_{\nu+n}(z)\mathrm{I}_{-\nu-n-1}(\zeta)\Big]\\&\qquad-\Big[\mathrm{N}_{\nu}(z)\mathrm{I}_{1-\nu}(\zeta)-\mathrm{N}_{\nu-1}(z)\mathrm{I}_{-\nu}(\zeta)\Big]\Big\},\end{aligned}\tag{15.387}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left\{\frac{\nu+k}{z}\mathrm{I}_{-\nu-k}(\zeta)+\mathrm{I}'_{-\nu-k}(\zeta)\right\}\mathrm{N}_{\nu+k}(z)\\&\quad=\frac{1}{2}\Big\{(-1)^{n}\Big[\mathrm{N}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{I}_{-\nu-n}(\zeta)+\mathrm{N}_{\nu+n}(z)\mathrm{I}_{-\nu-n-1}(\zeta)\Big]\\&\qquad+\Big[\mathrm{N}_{\nu}(z)\mathrm{I}_{1-\nu}(\zeta)+\mathrm{N}_{\nu-1}(z)\mathrm{I}_{-\nu}(\zeta)\Big]\Big\},\end{aligned}\tag{15.388}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{\nu+k}{z}\mathrm{K}_{\nu+k}(\zeta)+\mathrm{K}'_{\nu+k}(\zeta)\right]\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\\&\quad=\frac{1}{2}\Big\{\Big[\mathrm{J}_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+n}(\zeta)-\mathrm{J}_{\nu+n}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+n+1}(\zeta)\Big]\\&\qquad-\Big[\mathrm{J}_{\nu}(z)\,\mathrm{K}_{\nu-1}(\zeta)-\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{K}_{\nu}(\zeta)\Big]\Big\},\end{aligned}\tag{15.389}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left[\frac{\nu+k}{z}\mathrm{K}_{\nu+k}(\zeta)-\mathrm{K}'_{\nu+k}(\zeta)\right]\mathrm{J}_{\nu+k}(z)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{(-1)^n\left[\mathrm{J}_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+n}(\zeta)+\mathrm{J}_{\nu+n}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+n+1}(\zeta)\right]\right.$$
$$\left.+\left[\mathrm{J}_{\nu}(z)\,\mathrm{K}_{\nu-1}(\zeta)+\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{K}_{\nu}(\zeta)\right]\right\}, \tag{15.390}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{\nu+k}{z}\mathrm{K}_{\nu+k}(\zeta)+\mathrm{K}'_{\nu+k}(\zeta)\right]\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{-\left[\mathrm{J}_{-\nu-n-1}(z)\mathrm{K}_{\nu+n}(\zeta)-\mathrm{J}_{-\nu-n}(z)\mathrm{K}_{\nu+n+1}(\zeta)\right]\right.$$
$$\left.+\left[\mathrm{J}_{-\nu}(z)\mathrm{K}_{\nu-1}(\zeta)-\mathrm{J}_{1-\nu}(z)\mathrm{K}_{\nu}(\zeta)\right]\right\}, \tag{15.391}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left[\frac{\nu+k}{z}\mathrm{K}_{\nu+k}(\zeta)+\mathrm{K}'_{\nu+k}(\zeta)\right]\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{(-1)^{n+1}\left[\mathrm{J}_{-\nu-n-1}(z)\mathrm{K}_{\nu+n}(\zeta)+\mathrm{J}_{-\nu-n}(z)\mathrm{K}_{\nu+n+1}(\zeta)\right]\right.$$
$$\left.-\left[\mathrm{J}_{-\nu}(z)\mathrm{K}_{\nu-1}(\zeta)+\mathrm{J}_{1-\nu}(z)\mathrm{K}_{\nu}(\zeta)\right]\right\}, \tag{15.392}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{\nu+k}{z}\mathrm{K}_{\nu+k}(\zeta)+\mathrm{K}'_{\nu+k}(\zeta)\right]\mathrm{N}_{\nu+k}(z)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left[\mathrm{N}_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+n}(\zeta)-\mathrm{N}_{\nu+n}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+n+1}(\zeta)\right]\right.$$
$$\left.-\left[\mathrm{N}_{\nu}(z)\,\mathrm{K}_{\nu-1}(\zeta)-\mathrm{N}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{K}_{\nu}(\zeta)\right]\right\}. \tag{15.393}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left[\frac{\nu+k}{z}\mathrm{K}_{\nu+k}(\zeta)-\mathrm{K}'_{\nu+k}(\zeta)\right]\mathrm{N}_{\nu+k}(z)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{(-1)^n\left[\mathrm{N}_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+n}(\zeta)+\mathrm{N}_{\nu+n}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+n+1}(\zeta)\right]\right.$$
$$\left.+\left[\mathrm{N}_{\nu}(z)\,\mathrm{K}_{\nu-1}(\zeta)+\mathrm{N}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{K}_{\nu}(\zeta)\right]\right\}, \tag{15.394}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{\nu+k}{\zeta}\mathrm{J}_{\nu+k}(z)+\mathrm{J}'_{\nu+k}(z)\right]\mathrm{I}_{\nu+k}(\zeta)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{-\left[\mathrm{J}_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{I}_{\nu+n}(\zeta)+\mathrm{J}_{\nu+n}(z)\,\mathrm{I}_{\nu+n+1}(\zeta)\right]\right.$$
$$\left.+\left[\mathrm{J}_{\nu}(z)\,\mathrm{I}_{\nu-1}(\zeta)+\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{I}_{\nu}(\zeta)\right]\right\}, \tag{15.395}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\Big[\frac{\nu+k}{\zeta}\mathrm{J}_{\nu+k}(z)-\mathrm{J}'_{\nu+k}(z)\Big]\mathrm{I}_{\nu+k}(\zeta)$$
$$=\frac{1}{2}\Big\{(-1)^n\Big[\mathrm{J}_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{I}_{\nu+n}(\zeta)-\mathrm{J}_{\nu+n}(z)\,\mathrm{I}_{\nu+n+1}(\zeta)\Big]$$
$$+\Big[\mathrm{J}_{\nu}(z)\,\mathrm{I}_{\nu-1}(\zeta)-\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{I}_{\nu}(\zeta)\Big]\Big\}, \tag{15.396}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\Big[\frac{\nu+k}{\zeta}\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)-\mathrm{J}'_{-\nu-k}(z)\Big]\mathrm{I}_{\nu+k}(\zeta)$$
$$=\frac{1}{2}\Big\{-\Big[\mathrm{J}_{-\nu-n-1}(z)\mathrm{I}_{\nu+n}(\zeta)+\mathrm{J}_{-\nu-n}(z)\mathrm{I}_{\nu+n+1}(\zeta)\Big]$$
$$+\Big[\mathrm{J}_{-\nu}(z)\mathrm{I}_{\nu-1}(\zeta)+\mathrm{J}_{1-\nu}(z)\mathrm{I}_{\nu}(\zeta)\Big]\Big\}, \tag{15.397}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\Big[\frac{\nu+k}{\zeta}\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)+\mathrm{J}'_{-\nu-k}(z)\Big]\mathrm{I}_{\nu+k}(\zeta)$$
$$=\frac{1}{2}\Big\{(-1)^n\Big[\mathrm{J}_{-\nu-n-1}(z)\mathrm{I}_{\nu+n}(\zeta)-\mathrm{J}_{-\nu-n}(z)\mathrm{I}_{\nu+n+1}(\zeta)\Big]$$
$$+\Big[\mathrm{J}_{-\nu}(z)\mathrm{I}_{\nu-1}(\zeta)-\mathrm{J}_{1-\nu}(z)\mathrm{I}_{\nu}(\zeta)\Big]\Big\}, \tag{15.398}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\Big[\frac{\nu+k}{\zeta}\mathrm{J}_{\nu+k}(z)-\mathrm{J}'_{\nu+k}(z)\Big]\mathrm{I}_{-\nu-k}(z)$$
$$=\frac{1}{2}\Big\{-\Big[\mathrm{J}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{I}_{-\nu-n}(\zeta)+\mathrm{J}_{\nu+n}(z)\mathrm{I}_{-\nu-n-1}(\zeta)\Big]$$
$$+\Big[\mathrm{J}_{\nu}(z)\mathrm{I}_{1-\nu}(\zeta)+\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\mathrm{I}_{-\nu}(\zeta)\Big]\Big\}, \tag{15.399}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\Big[\frac{\nu+k}{\zeta}\mathrm{J}_{\nu+k}(z)+\mathrm{J}'_{\nu+k}(z)\Big]\mathrm{I}_{-\nu-k}(z)$$
$$=\frac{1}{2}\Big\{(-1)^n\Big[\mathrm{J}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{I}_{-\nu-n}(\zeta)-\mathrm{J}_{\nu+n}(z)\mathrm{I}_{-\nu-n-1}(\zeta)\Big]$$
$$+\Big[\mathrm{J}_{\nu}(z)\mathrm{I}_{1-\nu}(\zeta)+\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\mathrm{I}_{-\nu}(\zeta)\Big]\Big\}, \tag{15.400}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\Big[\frac{\nu+k}{\zeta}\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)+\mathrm{J}'_{-\nu-k}(z)\Big]\mathrm{I}_{-\nu-k}(\zeta)$$
$$=\frac{1}{2}\Big\{-\Big[\mathrm{J}_{-\nu-n-1}(z)\mathrm{I}_{-\nu-n}(\zeta)+\mathrm{J}_{-\nu-n}(z)\mathrm{I}_{-\nu-n-1}(\zeta)\Big]$$
$$+\Big[\mathrm{J}_{-\nu}(z)\mathrm{I}_{1-\nu}(\zeta)+\mathrm{J}_{1-\nu}(z)\mathrm{I}_{-\nu}(\zeta)\Big]\Big\}, \tag{15.401}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\Big[\frac{\nu+k}{\zeta}\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)-\mathrm{J}'_{-\nu-k}(z)\Big]\mathrm{I}_{-\nu-k}(\zeta)$$
$$=\frac{1}{2}\Big\{(-1)^n\Big[\mathrm{J}_{-\nu-n-1}(z)\mathrm{I}_{-\nu-n}(\zeta)-\mathrm{J}_{-\nu-n}(z)\mathrm{I}_{-\nu-n-1}(\zeta)\Big]$$
$$-\Big[\mathrm{J}_{-\nu}(z)\mathrm{I}_{1-\nu}(\zeta)-\mathrm{J}_{1-\nu}(z)\mathrm{I}_{-\nu}(\zeta)\Big]\Big\}, \tag{15.402}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\Big[\frac{\nu+k}{\zeta}\mathrm{N}_{\nu+k}(z)+\mathrm{N}'_{\nu+k}(z)\Big]\mathrm{I}_{\nu+k}(\zeta)$$
$$=\frac{1}{2}\Big\{-\Big[\mathrm{N}_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{I}_{\nu+n}(\zeta)+\mathrm{N}_{\nu+n}(z)\,\mathrm{I}_{\nu+n+1}(\zeta)\Big]$$
$$+\Big[\mathrm{N}_{\nu}(z)\,\mathrm{I}_{\nu-1}(\zeta)+\mathrm{N}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{I}_{\nu}(\zeta)\Big]\Big\}, \tag{15.403}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\Big[\frac{\nu+k}{\zeta}\mathrm{N}_{\nu+k}(z)-\mathrm{N}'_{\nu+k}(z)\Big]\mathrm{I}_{\nu+k}(\zeta)$$
$$=\frac{1}{2}\Big\{(-1)^n\Big[\mathrm{N}_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{I}_{\nu+n}(\zeta)-\mathrm{N}_{\nu+n}(z)\,\mathrm{I}_{\nu+n+1}(\zeta)\Big]$$
$$+\Big[\mathrm{N}_{\nu}(z)\,\mathrm{I}_{\nu-1}(\zeta)-\mathrm{N}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{I}_{\nu}(\zeta)\Big]\Big\}, \tag{15.404}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\Big[\frac{\nu+k}{\zeta}\mathrm{N}_{\nu+k}(z)-\mathrm{N}'_{\nu+k}(z)\Big]\mathrm{I}_{-\nu-k}(\zeta)$$
$$=\frac{1}{2}\Big\{-\Big[\mathrm{N}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{I}_{-\nu-n}(\zeta)+\mathrm{N}_{\nu+n}(z)\mathrm{I}_{-\nu-n-1}(\zeta)\Big]$$
$$+\Big[\mathrm{N}_{\nu}(z)\mathrm{I}_{1-\nu}(\zeta)+\mathrm{N}_{\nu-1}(z)\mathrm{I}_{-\nu}(\zeta)\Big]\Big\}, \tag{15.405}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\Big[\frac{\nu+k}{\zeta}\mathrm{N}_{\nu+k}(z)+\mathrm{N}'_{\nu+k}(z)\Big]\mathrm{I}_{-\nu-k}(\zeta)$$
$$=\frac{1}{2}\Big\{(-1)^n\Big[\mathrm{N}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{I}_{-\nu-n}(\zeta)-\mathrm{N}_{\nu+n}(z)\mathrm{I}_{-\nu-n-1}(\zeta)\Big]$$
$$+\Big[\mathrm{N}_{\nu}(z)\mathrm{I}_{1-\nu}(\zeta)-\mathrm{N}_{\nu-1}(z)\mathrm{I}_{-\nu}(\zeta)\Big]\Big\}, \tag{15.406}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\Big[\frac{\nu+k}{\zeta}\mathrm{J}_{\nu+k}(z)+\mathrm{J}'_{\nu+k}(z)\Big]\mathrm{K}_{\nu+k}(\zeta)$$
$$=\frac{1}{2}\Big\{\Big[\mathrm{J}_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+n}(\zeta)+\mathrm{J}_{\nu+n}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+n+1}(\zeta)\Big]$$
$$-\Big[\mathrm{J}_{\nu}(z)\,\mathrm{K}_{\nu-1}(\zeta)+\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{K}_{\nu}(\zeta)\Big]\Big\}, \tag{15.407}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left[\frac{\nu+k}{\zeta}\mathrm{J}_{\nu+k}(z)-\mathrm{J}'_{\nu+k}(z)\right]\mathrm{K}_{\nu+k}(\zeta)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{(-1)^{n+1}\left[\mathrm{J}_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+n}(\zeta)-\mathrm{J}_{\nu+n}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+n+1}(\zeta)\right]\right.$$
$$\left.-\left[\mathrm{J}_{\nu}(z)\,\mathrm{K}_{\nu-1}(\zeta)-\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{K}_{\nu}(\zeta)\right]\right\}, \tag{15.408}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{\nu+k}{\zeta}\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)-\mathrm{J}'_{-\nu-k}(z)\right]\mathrm{K}_{\nu+k}(\zeta)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left[\mathrm{J}_{-\nu-n-1}(z)\mathrm{K}_{\nu+n}(\zeta)+\mathrm{J}_{-\nu-n}(z)\mathrm{K}_{\nu+n+1}(\zeta)\right]\right.$$
$$\left.+\left[\mathrm{J}_{-\nu}(z)\mathrm{K}_{\nu-1}(\zeta)+\mathrm{J}_{1-\nu}z)\mathrm{K}_{\nu}(\zeta)\right]\right\}, \tag{15.409}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left[\frac{\nu+k}{\zeta}\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)+\mathrm{J}'_{-\nu-k}(z)\right]\mathrm{K}_{\nu+k}(\zeta)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{(-1)^{n+1}\left[\mathrm{J}_{-\nu-n-1}(z)\mathrm{K}_{\nu+n}(\zeta)-\mathrm{J}_{-\nu-n}(z)\mathrm{K}_{\nu+n+1}(\zeta)\right]\right.$$
$$\left.-\left[\mathrm{J}_{-\nu}(z)\mathrm{K}_{\nu-1}(\zeta)-\mathrm{J}_{1-\nu}(z)\mathrm{K}_{\nu}(\zeta)\right]\right\}, \tag{15.410}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{\nu+k}{\zeta}\mathrm{N}_{\nu+k}(z)+\mathrm{N}'_{\nu+k}(z)\right]\mathrm{K}_{\nu+k}(\zeta)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left[\mathrm{N}_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+n}(\zeta)+\mathrm{N}_{\nu+n}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+n+1}(\zeta)\right]\right.$$
$$\left.-\left[\mathrm{N}_{\nu}(z)\,\mathrm{K}_{\nu-1}(\zeta)+\mathrm{N}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{K}_{\nu}(\zeta)\right]\right\}, \tag{15.411}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left[\frac{\nu+k}{\zeta}\mathrm{N}_{\nu+k}(z)-\mathrm{N}'_{\nu+k}(z)\right]\mathrm{K}_{\nu+k}(\zeta)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{(-1)^{n+1}\left[\mathrm{N}_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+n}(\zeta)-\mathrm{N}_{\nu+n}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+n+1}(\zeta)\right]\right.$$
$$\left.-\left[\mathrm{N}_{\nu}(z)\,\mathrm{K}_{\nu-1}(\zeta)-\mathrm{N}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{K}_{\nu}(\zeta)\right]\right\}. \tag{15.412}$$

将上面列出的求和公式再加以组合，又能得到

$$\sum_{k=0}^{n}\left[z\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{I}'_{\nu+k}(\zeta)+\zeta\mathrm{J}'_{\nu+k}(z)\mathrm{I}_{\nu+k}(\zeta)\right]$$
$$=\frac{z+\zeta}{2}\left[-\mathrm{J}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{I}_{\nu+n}(\zeta)+\mathrm{J}_{\nu}(z)\mathrm{I}_{\nu-1}(\zeta)\right]$$
$$+\frac{z-\zeta}{2}\left[\mathrm{J}_{\nu+n}(z)\mathrm{I}_{\nu+n+1}(\zeta)-\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\mathrm{I}_{\nu}(\zeta)\right], \tag{15.413}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\Big[z\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{I}'_{\nu+k}(\zeta)+\zeta\mathrm{J}'_{\nu+k}(z)\mathrm{I}_{\nu+k}(\zeta)\Big]$$
$$=\frac{z+\zeta}{2}\Big[(-1)^n\mathrm{J}_{\nu+n}(z)\mathrm{I}_{\nu+n+}(\zeta)+\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\mathrm{I}_{\nu}(\zeta)\Big]$$
$$-\frac{z-\zeta}{2}\Big[(-1)^n\mathrm{J}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{I}_{\nu+n}(\zeta)+\mathrm{J}_{\nu}(z)\mathrm{I}_{\nu-1}(\zeta)\Big], \tag{15.414}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\Big[z\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{I}'_{-\nu-k}(\zeta)-\zeta\mathrm{J}'_{\nu+k}(z)\mathrm{I}_{-\nu-k}(\zeta)\Big]$$
$$=\frac{z+\zeta}{2}\Big[-\mathrm{J}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{I}_{-\nu-n}(\zeta)+\mathrm{J}_{\nu}(z)\mathrm{I}_{1-\nu}(\zeta)\Big]$$
$$+\frac{z-\zeta}{2}\Big[\mathrm{J}_{\nu+n}(z)\mathrm{I}_{-\nu-n-1}(\zeta)-\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\mathrm{I}_{-\nu}(\zeta)\Big], \tag{15.415}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\Big[z\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{I}'_{-\nu-k}(\zeta)-\zeta\mathrm{J}'_{\nu+k}(z)\mathrm{I}_{-\nu-k}(\zeta)\Big]$$
$$=\frac{z+\zeta}{2}\Big[(-1)^n\mathrm{J}_{\nu+n}(z)\mathrm{I}_{-\nu-n-1}(\zeta)+\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\mathrm{I}_{-\nu}(\zeta)\Big]$$
$$+\frac{z-\zeta}{2}\Big[(-1)^n\mathrm{J}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{I}_{-\nu-n}(\zeta)+\mathrm{J}_{\nu}(z)\mathrm{I}_{1-\nu}(\zeta)\Big], \tag{15.416}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\Big[z\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{K}'_{\nu+k}(\zeta)-\zeta\mathrm{J}'_{\nu+k}(z)\mathrm{K}_{\nu+k}(\zeta)\Big]$$
$$=\frac{z+\zeta}{2}\Big[-\mathrm{J}_{\nu+n}(z)\mathrm{K}_{\nu+n+1}(\zeta)+\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\mathrm{K}_{\nu}(\zeta)\Big]$$
$$+\frac{z-\zeta}{2}\Big[\mathrm{J}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{K}_{\nu+n}(\zeta)-\mathrm{J}_{\nu}(z)\mathrm{K}_{\nu-1}(\zeta)\Big], \tag{15.417}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\Big[z\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\mathrm{K}'_{\nu+k}(\zeta)-\zeta\mathrm{J}'_{\nu+k}(z)\mathrm{K}_{\nu+k}(\zeta)\Big]$$
$$=-\frac{z+\zeta}{2}\Big[(-1)^n\mathrm{J}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{K}_{\nu+n}(\zeta)+\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\mathrm{K}_{\nu}(\zeta)\Big]$$
$$-\frac{z-\zeta}{2}\Big[(-1)^n\mathrm{J}_{\nu+n}(z)\mathrm{K}_{\nu+n+1}(\zeta)+\mathrm{J}_{\nu-1}(z)\mathrm{K}_{\nu}(\zeta)\Big], \tag{15.418}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\Big[z\mathrm{N}_{\nu+k}(z)\mathrm{I}'_{\nu+k}(\zeta)-\zeta\mathrm{N}'_{\nu+k}(z)\mathrm{I}_{\nu+k}(\zeta)\Big]$$
$$=\frac{z+\zeta}{2}\Big[-\mathrm{N}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{I}_{\nu+n}(\zeta)+\mathrm{N}_{\nu}(z)\mathrm{I}_{\nu-1}(\zeta)\Big]$$
$$+\frac{z-\zeta}{2}\Big[-\mathrm{N}_{\nu+n}(z)\mathrm{I}_{\nu+n+1}(\zeta)+\mathrm{N}_{\nu-1}(z)\mathrm{I}_{\nu}(\zeta)\Big], \tag{15.419}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\Big[z\mathrm{N}_{\nu+k}(z)\mathrm{I}'_{\nu+k}(\zeta)-\zeta\mathrm{N}'_{\nu+k}(z)\mathrm{I}_{\nu+k}(\zeta)\Big]$$

$$= \frac{z+\zeta}{2}\Big[(-1)^n \mathrm{N}_{\nu+n}(z)\mathrm{I}_{\nu+n+1}(\zeta) + \mathrm{N}_{\nu-1}(z)\mathrm{I}_\nu(\zeta)\Big] + \frac{z-\zeta}{2}\Big[(-1)^n \mathrm{N}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{I}_{\nu+n}(\zeta) + \mathrm{N}_\nu(z)\mathrm{I}_{\nu-1}(\zeta)\Big], \tag{15.420}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\Big[z\mathrm{N}_{\nu+k}(z)\mathrm{I}'_{-\nu-k}(\zeta) - \zeta\mathrm{N}'_{\nu+k}(z)\mathrm{I}_{-\nu-k}(\zeta)\Big]$$
$$= \frac{z+\zeta}{2}\Big[-\mathrm{N}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{I}_{-\nu-n}(\zeta) + \mathrm{N}_\nu(z)\mathrm{I}_{1-\nu}(\zeta)\Big] + \frac{z-\zeta}{2}\Big[-\mathrm{N}_{\nu+n}(z)\mathrm{I}_{-\nu-n-1}(\zeta) + \mathrm{N}_{\nu-1}(z)\mathrm{I}_{-\nu}(\zeta)\Big], \tag{15.421}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\Big[z\mathrm{N}_{\nu+k}(z)\mathrm{I}'_{-\nu-k}(\zeta) - \zeta\mathrm{N}'_{\nu+k}(z)\mathrm{I}_{-\nu-k}(\zeta)\Big]$$
$$= \frac{z+\zeta}{2}\Big[(-1)^n \mathrm{N}_{\nu+n}(z)\mathrm{I}_{-\nu-n-1}(\zeta) + \mathrm{N}_{\nu-1}(z)\mathrm{I}_{-\nu}(\zeta)\Big] + \frac{z-\zeta}{2}\Big[(-1)^n \mathrm{N}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{I}_{-\nu-n}(\zeta) + \mathrm{N}_\nu(z)\mathrm{I}_{1-\nu}(\zeta)\Big], \tag{15.422}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\Big[z\mathrm{N}_{\nu+k}(z)\mathrm{K}'_{\nu+k}(\zeta) - \zeta\mathrm{N}'_{\nu+k}(z)\mathrm{K}_{\nu+k}(\zeta)\Big]$$
$$= \frac{z+\zeta}{2}\Big[-\mathrm{N}_{\nu+n}(z)\mathrm{K}_{\nu+n+1}(\zeta) + \mathrm{N}_{\nu-1}(z)\mathrm{K}_\nu(\zeta)\Big] + \frac{z-\zeta}{2}\Big[\mathrm{N}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{K}_{\nu+n}(\zeta) - \mathrm{N}_\nu(z)\mathrm{K}_{\nu-1}(\zeta)\Big], \tag{15.423}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\Big[z\mathrm{N}_{\nu+k}(z)\mathrm{K}'_{\nu+k}(\zeta) - \zeta\mathrm{N}'_{\nu+k}(z)\mathrm{K}_{\nu+k}(\zeta)\Big]$$
$$= -\frac{z+\zeta}{2}\Big[(-1)^n \mathrm{N}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{K}_{\nu+n}(\zeta) + \mathrm{N}_\nu(z)\mathrm{K}_{\nu-1}(\zeta)\Big] - \frac{z-\zeta}{2}\Big[(-1)^n \mathrm{N}_{\nu+n}(z)\mathrm{K}_{\nu+n+1}(\zeta) + \mathrm{N}_{\nu-1}(z)\mathrm{K}_\nu(\zeta)\Big], \tag{15.424}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\Big[z\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)\mathrm{I}'_{\nu+k}(\zeta) + \zeta\mathrm{J}'_{-\nu-k}(z)\mathrm{I}_{\nu+k}(\zeta)\Big]$$
$$= \frac{z+\zeta}{2}\Big[\mathrm{J}_{-\nu-n}(z)\mathrm{I}_{\nu+n+1}(\zeta) - \mathrm{J}_{1-\nu}(z)\mathrm{I}_\nu(\zeta)\Big] + \frac{z-\zeta}{2}\Big[-\mathrm{J}_{-\nu-n-1}(z)\mathrm{I}_{\nu+n}(\zeta) + \mathrm{J}_{-\nu}(z)\mathrm{I}_{\nu-1}(\zeta)\Big], \tag{15.425}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\Big[z\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)\mathrm{I}'_{\nu+k}(\zeta) + \zeta\mathrm{J}'_{-\nu-k}(z)\mathrm{I}_{\nu+k}(\zeta)\Big]$$
$$= \frac{z+\zeta}{2}\Big[(-1)^n \mathrm{J}_{-\nu-n-1}(z)\mathrm{I}_{\nu+n}(\zeta) + \mathrm{J}_{-\nu}(z)\mathrm{I}_{\nu-1}(\zeta)\Big] + \frac{z-\zeta}{2}\Big[(-1)^n \mathrm{J}_{-\nu-n}(z)\mathrm{I}_{\nu+n+1}(\zeta) + \mathrm{J}_{1-\nu}(z)\mathrm{I}_\nu(\zeta)\Big], \tag{15.426}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\Big[z\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)\mathrm{I}'_{-\nu-k}(\zeta)-\zeta\mathrm{J}'_{-\nu-k}(z)\mathrm{I}_{-\nu-k}(\zeta)\Big]$$
$$=\frac{z+\zeta}{2}\Big[\mathrm{J}_{-\nu-n}(z)\mathrm{I}_{-\nu-n-1}(\zeta)-\mathrm{J}_{1-\nu}(z)\mathrm{I}_{-\nu}(\zeta)\Big]$$
$$+\frac{z-\zeta}{2}\Big[-\mathrm{J}_{-\nu-n-1}(z)\mathrm{I}_{-\nu-n}(\zeta)+\mathrm{J}_{-\nu}(z)\mathrm{I}_{1-\nu}(\zeta)\Big], \tag{15.427}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\Big[z\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)\mathrm{I}'_{-\nu-k}(\zeta)-\zeta\mathrm{J}'_{-\nu-k}(z)\mathrm{I}_{-\nu-k}(\zeta)\Big]$$
$$=\frac{z+\zeta}{2}\Big[(-1)^n\mathrm{J}_{-\nu-n-1}(z)\mathrm{I}_{-\nu-n}(\zeta)+\mathrm{J}_{-\nu}(z)\mathrm{I}_{1-\nu}(\zeta)\Big]$$
$$+\frac{z-\zeta}{2}\Big[(-1)^n\mathrm{J}_{-\nu-n}(z)\mathrm{I}_{-\nu-n-1}(\zeta)+\mathrm{J}_{1-\nu}(z)\mathrm{I}_{-\nu}(\zeta)\Big], \tag{15.428}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\Big[z\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)\mathrm{K}'_{\nu+k}(\zeta)-\zeta\mathrm{J}'_{-\nu-k}(z)\mathrm{K}_{\nu+k}(\zeta)\Big]$$
$$=\frac{z+\zeta}{2}\Big[\mathrm{J}_{-\nu-n-1}(z)\mathrm{K}_{\nu+n}(\zeta)-\mathrm{J}_{-\nu}(z)\mathrm{K}_{\nu-1}(\zeta)\Big]$$
$$+\frac{z-\zeta}{2}\Big[-\mathrm{J}_{-\nu-n}(z)\mathrm{K}_{\nu+n+1}(\zeta)+\mathrm{J}_{1-\nu}(z)\mathrm{K}_{\nu}(\zeta)\Big], \tag{15.429}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\Big[z\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)\mathrm{K}'_{\nu+k}(\zeta)-\zeta\mathrm{J}'_{-\nu-k}(z)\mathrm{K}_{\nu+k}(\zeta)\Big]$$
$$=\frac{z+\zeta}{2}\Big[(-1)^{n+1}\mathrm{J}_{-\nu-n}(z)\mathrm{K}_{\nu+n+1}(\zeta)-\mathrm{J}_{1-\nu}(z)\mathrm{K}_{\nu}(\zeta)\Big]$$
$$+\frac{z-\zeta}{2}\Big[(-1)^{n+1}\mathrm{J}_{-\nu-n-1}(z)\mathrm{K}_{\nu+n}(\zeta)-\mathrm{J}_{-\nu}(z)\mathrm{K}_{\nu-1}(\zeta)\Big]. \tag{15.430}$$

以上得到的 (15.377) — (15.430) 诸式中，均可代入 $\zeta=z$.

比较递推关系 (15.291)，(15.292) 及 (15.96)，可见它们的数学形式完全一样. 因此，可以预料，在虚宗量柱函数与柱函数之间也存在着下列形式的双二次型或四次型的求和公式：

$$\sum_{k=0}^{n}(\nu+k)\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}_{\nu+k}(\zeta)\Big[z\,\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}'_{\nu+k}(\zeta)+\zeta\,\mathrm{J}'_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}_{\nu+k}(\zeta)\Big]$$
$$=\frac{z\zeta}{4}\Big\{-\Big[\mathrm{J}^2_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{I}^2_{\nu+n}(\zeta)+\mathrm{J}^2_{\nu+n}(z)\,\mathrm{I}^2_{\nu+n+1}(\zeta)\Big]$$
$$+\Big[\mathrm{J}^2_{\nu}(z)\,\mathrm{I}^2_{\nu-1}(\zeta)+\mathrm{J}^2_{\nu-1}(z)\,\mathrm{I}^2_{\nu}(\zeta)\Big]\Big\}, \tag{15.431}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(\nu+k)\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\Big[\mathrm{J}'_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}_{\nu+k}(z)+\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}'_{\nu+k}(z)\Big]$$
$$=\frac{z}{4}\Big\{-\Big[\mathrm{J}^2_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{I}^2_{\nu+n}(z)+\mathrm{J}^2_{\nu+n}(z)\,\mathrm{I}^2_{\nu+n+1}(z)\Big]$$
$$+\Big[\mathrm{J}^2_{\nu}(z)\,\mathrm{I}^2_{\nu-1}(z)+\mathrm{J}^2_{\nu-1}(z)\,\mathrm{I}^2_{\nu}(z)\Big]\Big\}, \tag{15.432}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\nu+k)\,\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}_{\nu+k}(\zeta)\Big[z\,\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}'_{\nu+k}(\zeta)-\zeta\,\mathrm{J}'_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}_{\nu+k}(\zeta)\Big]$$
$$=\frac{z\zeta}{4}\Big\{(-1)^n\Big[\mathrm{J}^2_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{I}^2_{\nu+n}(\zeta)-\mathrm{J}^2_{\nu+n}(z)\,\mathrm{I}^2_{\nu+n+1}(\zeta)\Big]$$
$$+\Big[\mathrm{J}^2_{\nu}(z)\,\mathrm{I}^2_{\nu-1}(\zeta)-\mathrm{J}^2_{\nu-1}(z)\,\mathrm{I}^2_{\nu}(\zeta)\Big]\Big\},\tag{15.433}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\nu+k)\,\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\Big[\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}'_{\nu+k}(z)-\mathrm{J}'_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\Big]$$
$$=\frac{z}{4}\Big\{(-1)^n\Big[\mathrm{J}^2_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{I}^2_{\nu+n}(\zeta)-\mathrm{J}^2_{\nu+n}(z)\,\mathrm{I}^2_{\nu+n+1}(\zeta)\Big]$$
$$+\Big[\mathrm{J}^2_{\nu}(z)\,\mathrm{I}^2_{\nu-1}(\zeta)-\mathrm{J}^2_{\nu-1}(z)\,\mathrm{I}^2_{\nu}(\zeta)\Big]\Big\},\tag{15.434}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(\nu+k)\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-k}(\zeta)\Big[z\,\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}'_{-\nu-k}(\zeta)+\zeta\,\mathrm{J}'_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-k}(\zeta)\Big]$$
$$=\frac{z\zeta}{4}\Big\{-\Big[\mathrm{J}^2_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{I}^2_{-\nu-n}(\zeta)+\mathrm{J}^2_{\nu+n}(z)\,\mathrm{I}^2_{-\nu-n-1}(\zeta)\Big]$$
$$+\Big[\mathrm{J}^2_{\nu}(z)\,\mathrm{I}^2_{1-\nu}(\zeta)+\mathrm{J}^2_{\nu-1}(z)\,\mathrm{I}^2_{-\nu}(\zeta)\Big]\Big\},\tag{15.435}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(\nu+k)\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-k}(z)\Big[\mathrm{J}'_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-k}(z)+\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}'_{-\nu-k}(z)\Big]$$
$$=\frac{z}{4}\Big\{-\Big[\mathrm{J}^2_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{I}^2_{-\nu-n}(z)+\mathrm{J}^2_{\nu+n}(z)\,\mathrm{I}^2_{-\nu-n-1}(z)\Big]$$
$$+\Big[\mathrm{J}^2_{\nu}(z)\,\mathrm{I}^2_{1-\nu}(z)+\mathrm{J}^2_{\nu-1}(z)\,\mathrm{I}^2_{-\nu}(z)\Big]\Big\},\tag{15.436}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\nu+k)\,\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-k}(\zeta)\Big[z\,\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}'_{-\nu-k}(\zeta)-\zeta\,\mathrm{J}'_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-k}(\zeta)\Big]$$
$$=\frac{z\zeta}{4}\Big\{(-1)^n\Big[\mathrm{J}^2_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{I}^2_{-\nu-n}(\zeta)-\mathrm{J}^2_{\nu+n}(z)\,\mathrm{I}^2_{-\nu-n-1}(\zeta)\Big]$$
$$+\Big[\mathrm{J}^2_{\nu}(z)\,\mathrm{I}^2_{1-\nu}(\zeta)-\mathrm{J}^2_{\nu-1}(z)\,\mathrm{I}^2_{-\nu}(\zeta)\Big]\Big\},\tag{15.437}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\nu+k)\,\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-k}(z)\Big[\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}'_{-\nu-k}(z)-\mathrm{J}'_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-k}(z)\Big]$$
$$=\frac{z}{4}\Big\{(-1)^n\Big[\mathrm{J}^2_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{I}^2_{-\nu-n}(\zeta)-\mathrm{J}^2_{\nu+n}(z)\,\mathrm{I}^2_{-\nu-n-1}(\zeta)\Big]$$
$$+\Big[\mathrm{J}^2_{\nu}(z)\,\mathrm{I}^2_{1-\nu}(\zeta)-\mathrm{J}^2_{\nu-1}(z)\,\mathrm{I}^2_{-\nu}(\zeta)\Big]\Big\},\tag{15.438}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(\nu+k)\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)\,\mathrm{I}_{\nu+k}(\zeta)\Big[z\,\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)\,\mathrm{I}'_{\nu+k}(\zeta)+\zeta\,\mathrm{J}'_{-\nu-k}(z)\,\mathrm{I}_{\nu+k}(\zeta)\Big]$$

$$=\frac{z\zeta}{4}\bigg\{-\Big[\mathrm{J}^2_{-\nu-n-1}(z)\,\mathrm{I}^2_{\nu+n}(\zeta)+\mathrm{J}^2_{-\nu-n}(z)\,\mathrm{I}^2_{\nu+n+1}(\zeta)\Big]$$

$$+\Big[\mathrm{J}^2_{\nu}(z)\,\mathrm{I}^2_{\nu-1}(\zeta)+\mathrm{J}^2_{1-\nu}(z)\,\mathrm{I}^2_{\nu}(\zeta)\Big]\bigg\},\tag{15.439}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(\nu+k)\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)\,\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\Big[\mathrm{J}'_{-\nu-k}(z)\,\mathrm{I}_{\nu+k}(z)+\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)\,\mathrm{I}'_{\nu+k}(z)\Big]$$

$$=\frac{z}{4}\bigg\{-\Big[\mathrm{J}^2_{-\nu-n-1}(z)\,\mathrm{I}^2_{\nu+n}(z)+\mathrm{J}^2_{-\nu-n}(z)\,\mathrm{I}^2_{\nu+n+1}(z)\Big]$$

$$+\Big[\mathrm{J}^2_{\nu}(z)\,\mathrm{I}^2_{\nu-1}(z)+\mathrm{J}^2_{1-\nu}(z)\,\mathrm{I}^2_{\nu}(z)\Big]\bigg\},\tag{15.440}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\nu+k)\,\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)\,\mathrm{I}_{\nu+k}(\zeta)\Big[z\,\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)\,\mathrm{I}'_{\nu+k}(\zeta)-\zeta\,\mathrm{J}'_{-\nu-k}(z)\,\mathrm{I}_{\nu+k}(\zeta)\Big]$$

$$=\frac{z\zeta}{4}\bigg\{(-1)^n\Big[\mathrm{J}^2_{-\nu-n-1}(z)\,\mathrm{I}^2_{\nu+n}(\zeta)-\mathrm{J}^2_{-\nu-n}(z)\,\mathrm{I}^2_{\nu+n+1}(\zeta)\Big]$$

$$+\Big[\mathrm{J}^2_{\nu}(z)\,\mathrm{I}^2_{\nu-1}(\zeta)-\mathrm{J}^2_{1-\nu}(z)\,\mathrm{I}^2_{\nu}(\zeta)\Big]\bigg\},\tag{15.441}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\nu+k)\,\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)\,\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\Big[\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)\,\mathrm{I}'_{\nu+k}(z)-\mathrm{J}'_{-\nu-k}(z)\,\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\Big]$$

$$=\frac{z}{4}\bigg\{(-1)^n\Big[\mathrm{J}^2_{-\nu-n-1}(z)\,\mathrm{I}^2_{\nu+n}(\zeta)-\mathrm{J}^2_{-\nu-n}(z)\,\mathrm{I}^2_{\nu+n+1}(\zeta)\Big]$$

$$+\Big[\mathrm{J}^2_{\nu}(z)\,\mathrm{I}^2_{\nu-1}(\zeta)-\mathrm{J}^2_{1-\nu}(z)\,\mathrm{I}^2_{\nu}(\zeta)\Big]\bigg\},\tag{15.442}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(\nu+k)\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-k}(\zeta)\Big[z\,\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)\,\mathrm{I}'_{-\nu-k}(\zeta)+\zeta\,\mathrm{J}'_{-\nu-k}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-k}(\zeta)\Big]$$

$$=\frac{z\zeta}{4}\bigg\{-\Big[\mathrm{J}^2_{-\nu-n-1}(z)\,\mathrm{I}^2_{-\nu-n}(\zeta)+\mathrm{J}^2_{-\nu-n}(z)\,\mathrm{I}^2_{-\nu-n-1}(\zeta)\Big]$$

$$+\Big[\mathrm{J}^2_{\nu}(z)\,\mathrm{I}^2_{1-\nu}(\zeta)+\mathrm{J}^2_{1-\nu}(z)\,\mathrm{I}^2_{-\nu}(\zeta)\Big]\bigg\},\tag{15.443}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(\nu+k)\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-k}(z)\Big[\mathrm{J}'_{-\nu-k}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-k}(z)+\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)\,\mathrm{I}'_{-\nu-k}(z)\Big]$$

$$=\frac{z}{4}\bigg\{-\Big[\mathrm{J}^2_{-\nu-n-1}(z)\,\mathrm{I}^2_{-\nu-n}(z)+\mathrm{J}^2_{-\nu-n}(z)\,\mathrm{I}^2_{-\nu-n-1}(z)\Big]$$

$$+\Big[\mathrm{J}^2_{\nu}(z)\,\mathrm{I}^2_{1-\nu}(z)+\mathrm{J}^2_{1-\nu}(z)\,\mathrm{I}^2_{-\nu}(z)\Big]\bigg\},\tag{15.444}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\nu+k)\,\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-k}(\zeta)\Big[z\,\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)\,\mathrm{I}'_{-\nu-k}(\zeta)-\zeta\,\mathrm{J}'_{-\nu-k}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-k}(\zeta)\Big]$$
$$=\frac{z\zeta}{4}\Big\{(-1)^n\Big[\mathrm{J}^2_{-\nu-n-1}(z)\,\mathrm{I}^2_{-\nu-n}(\zeta)-\mathrm{J}^2_{-\nu-n}(z)\,\mathrm{I}^2_{-\nu-n-1}(\zeta)\Big]$$
$$+\Big[\mathrm{J}^2_{\nu}(z)\,\mathrm{I}^2_{1-\nu}(\zeta)-\mathrm{J}^2_{1-\nu}(z)\,\mathrm{I}^2_{-\nu}(\zeta)\Big]\Big\},\tag{15.445}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\nu+k)\,\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-k}(z)\Big[\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)\,\mathrm{I}'_{-\nu-k}(z)-\mathrm{J}'_{-\nu-k}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-k}(z)\Big]$$
$$=\frac{z}{4}\Big\{(-1)^n\Big[\mathrm{J}^2_{-\nu-n-1}(z)\,\mathrm{I}^2_{-\nu-n}(\zeta)-\mathrm{J}^2_{-\nu-n}(z)\,\mathrm{I}^2_{-\nu-n-1}(\zeta)\Big]$$
$$+\Big[\mathrm{J}^2_{\nu}(z)\,\mathrm{I}^2_{1-\nu}(\zeta)-\mathrm{J}^2_{1-\nu}(z)\,\mathrm{I}^2_{-\nu}(\zeta)\Big]\Big\},\tag{15.446}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(\nu+k)\mathrm{N}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}_{\nu+k}(\zeta)\Big[z\,\mathrm{N}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}'_{\nu+k}(\zeta)+\zeta\,\mathrm{N}'_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}_{\nu+k}(\zeta)\Big]$$
$$=\frac{z\zeta}{4}\Big\{-\Big[\mathrm{N}^2_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{I}^2_{\nu+n}(\zeta)+\mathrm{N}^2_{\nu+n}(z)\,\mathrm{I}^2_{\nu+n+1}(\zeta)\Big]$$
$$+\Big[\mathrm{N}^2_{\nu}(z)\,\mathrm{I}^2_{\nu-1}(\zeta)+\mathrm{N}^2_{\nu-1}(z)\,\mathrm{I}^2_{\nu}(\zeta)\Big]\Big\},\tag{15.447}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(\nu+k)\mathrm{N}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\Big[\mathrm{N}'_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}_{\nu+k}(z)+\mathrm{N}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}'_{\nu+k}(z)\Big]$$
$$=\frac{z}{4}\Big\{-\Big[\mathrm{N}^2_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{I}^2_{\nu+n}(z)+\mathrm{N}^2_{\nu+n}(z)\,\mathrm{I}^2_{\nu+n+1}(z)\Big]$$
$$+\Big[\mathrm{N}^2_{\nu}(z)\,\mathrm{I}^2_{\nu-1}(z)+\mathrm{N}^2_{\nu-1}(z)\,\mathrm{I}^2_{\nu}(z)\Big]\Big\},\tag{15.448}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\nu+k)\,\mathrm{N}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}_{\nu+k}(\zeta)\Big[z\,\mathrm{N}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}'_{\nu+k}(\zeta)-\zeta\,\mathrm{N}'_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}_{\nu+k}(\zeta)\Big]$$
$$=\frac{z\zeta}{4}\Big\{(-1)^n\Big[\mathrm{N}^2_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{I}^2_{\nu+n}(\zeta)-\mathrm{N}^2_{\nu+n}(z)\,\mathrm{I}^2_{\nu+n+1}(\zeta)\Big]$$
$$+\Big[\mathrm{N}^2_{\nu}(z)\,\mathrm{I}^2_{\nu-1}(\zeta)-\mathrm{N}^2_{\nu-1}(z)\,\mathrm{I}^2_{\nu}(\zeta)\Big]\Big\},\tag{15.449}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\nu+k)\,\mathrm{N}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\Big[\mathrm{N}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}'_{\nu+k}(z)-\mathrm{N}'_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}_{\nu+k}(z)\Big]$$
$$=\frac{z}{4}\Big\{(-1)^n\Big[\mathrm{N}^2_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{I}^2_{\nu+n}(\zeta)-\mathrm{N}^2_{\nu+n}(z)\,\mathrm{I}^2_{\nu+n+1}(\zeta)\Big]$$
$$+\Big[\mathrm{N}^2_{\nu}(z)\,\mathrm{I}^2_{\nu-1}(\zeta)-\mathrm{N}^2_{\nu-1}(z)\,\mathrm{I}^2_{\nu}(\zeta)\Big]\Big\},\tag{15.450}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(\nu+k)\mathrm{N}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-k}(\zeta)\Big[z\,\mathrm{N}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}'_{-\nu-k}(\zeta)+\zeta\,\mathrm{N}'_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-k}(\zeta)\Big]$$
$$=\frac{z\zeta}{4}\Big\{-\Big[\mathrm{N}^2_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{I}^2_{-\nu-n}(\zeta)+\mathrm{N}^2_{\nu+n}(z)\,\mathrm{I}^2_{-\nu-n-1}(\zeta)\Big]$$
$$+\Big[\mathrm{N}^2_{\nu}(z)\,\mathrm{I}^2_{1-\nu}(\zeta)+\mathrm{N}^2_{\nu-1}(z)\,\mathrm{I}^2_{-\nu}(\zeta)\Big]\Big\},\tag{15.451}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(\nu+k)\mathrm{N}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-k}(z)\Big[\mathrm{N}'_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-k}(z)+\mathrm{N}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}'_{-\nu-k}(z)\Big]$$
$$=\frac{z}{4}\Big\{-\Big[\mathrm{N}^2_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{I}^2_{-\nu-n}(z)+\mathrm{N}^2_{\nu+n}(z)\,\mathrm{I}^2_{-\nu-n-1}(z)\Big]$$
$$+\Big[\mathrm{N}^2_{\nu}(z)\,\mathrm{I}^2_{1-\nu}(z)+\mathrm{N}^2_{\nu-1}(z)\,\mathrm{I}^2_{-\nu}(z)\Big]\Big\},\tag{15.452}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\nu+k)\,\mathrm{N}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-k}(\zeta)\Big[z\,\mathrm{N}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}'_{-\nu-k}(\zeta)-\zeta\,\mathrm{N}'_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-k}(\zeta)\Big]$$
$$=\frac{z\zeta}{4}\Big\{(-1)^n\Big[\mathrm{N}^2_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{I}^2_{-\nu-n}(\zeta)-\mathrm{N}^2_{\nu+n}(z)\,\mathrm{I}^2_{-\nu-n-1}(\zeta)\Big]$$
$$+\Big[\mathrm{N}^2_{\nu}(z)\,\mathrm{I}^2_{1-\nu}(\zeta)-\mathrm{N}^2_{\nu-1}(z)\,\mathrm{I}^2_{-\nu}(\zeta)\Big]\Big\},\tag{15.453}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\nu+k)\,\mathrm{N}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-k}(z)\Big[\mathrm{N}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}'_{-\nu-k}(z)-\mathrm{N}'_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-k}(z)\Big]$$
$$=\frac{z}{4}\Big\{(-1)^n\Big[\mathrm{N}^2_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{I}^2_{-\nu-n}(\zeta)-\mathrm{N}^2_{\nu+n}(z)\,\mathrm{I}^2_{-\nu-n-1}(\zeta)\Big]$$
$$+\Big[\mathrm{N}^2_{\nu}(z)\,\mathrm{I}^2_{1-\nu}(\zeta)-\mathrm{N}^2_{\nu-1}(z)\,\mathrm{I}^2_{-\nu}(\zeta)\Big]\Big\},\tag{15.454}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(\nu+k)\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}(\zeta)\Big[z\,\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{K}'_{\nu+k}(\zeta)+\zeta\,\mathrm{J}'_{\nu+k}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}(\zeta)\Big]$$
$$=\frac{z\zeta}{4}\Big\{-\Big[\mathrm{J}^2_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{K}^2_{\nu+n}(\zeta)+\mathrm{J}^2_{\nu+n}(z)\,\mathrm{K}^2_{\nu+n+1}(\zeta)\Big]$$
$$+\Big[\mathrm{J}^2_{\nu}(z)\,\mathrm{K}^2_{\nu-1}(\zeta)+\mathrm{J}^2_{\nu-1}(z)\,\mathrm{K}^2_{\nu}(\zeta)\Big]\Big\},\tag{15.455}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(\nu+k)\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}(z)\Big[\mathrm{J}'_{\nu+k}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}(z)+\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{K}'_{\nu+k}(z)\Big]$$
$$=\frac{z}{4}\Big\{-\Big[\mathrm{J}^2_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{K}^2_{\nu+n}(z)+\mathrm{J}^2_{\nu+n}(z)\,\mathrm{K}^2_{\nu+n+1}(z)\Big]$$
$$+\Big[\mathrm{J}^2_{\nu}(z)\,\mathrm{K}^2_{\nu-1}(z)+\mathrm{J}^2_{\nu-1}(z)\,\mathrm{K}^2_{\nu}(z)\Big]\Big\},\tag{15.456}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\nu+k)\,\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}(\zeta)\Big[z\,\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{K}'_{\nu+k}(\zeta)-\zeta\,\mathrm{J}'_{\nu+k}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}(\zeta)\Big]$$
$$=\frac{z\zeta}{4}\Big\{(-1)^n\Big[\mathrm{J}^2_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{K}^2_{\nu+n}(\zeta)-\mathrm{J}^2_{\nu+n}(z)\,\mathrm{K}^2_{\nu+n+1}(\zeta)\Big]$$
$$+\Big[\mathrm{J}^2_{\nu}(z)\,\mathrm{K}^2_{\nu-1}(\zeta)-\mathrm{J}^2_{\nu-1}(z)\,\mathrm{K}^2_{\nu}(\zeta)\Big]\Big\}, \tag{15.457}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\nu+k)\,\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}(z)\Big[\mathrm{J}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{K}'_{\nu+k}(z)-\mathrm{J}'_{\nu+k}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}(z)\Big]$$
$$=\frac{z}{4}\Big\{(-1)^n\Big[\mathrm{J}^2_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{K}^2_{\nu+n}(\zeta)-\mathrm{J}^2_{\nu+n}(z)\,\mathrm{K}^2_{\nu+n+1}(\zeta)\Big]$$
$$+\Big[\mathrm{J}^2_{\nu}(z)\,\mathrm{K}^2_{\nu-1}(\zeta)-\mathrm{J}^2_{\nu-1}(z)\,\mathrm{K}^2_{\nu}(\zeta)\Big]\Big\}, \tag{15.458}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(\nu+k)\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}(\zeta)\Big[z\,\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)\,\mathrm{K}'_{\nu+k}(\zeta)+\zeta\,\mathrm{J}'_{-\nu-k}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}(\zeta)\Big]$$
$$=\frac{z\zeta}{4}\Big\{-\Big[\mathrm{J}^2_{-\nu-n-1}(z)\,\mathrm{K}^2_{\nu+n}(\zeta)+\mathrm{J}^2_{-\nu-n}(z)\,\mathrm{K}^2_{\nu+n+1}(\zeta)\Big]$$
$$+\Big[\mathrm{J}^2_{-\nu}(z)\,\mathrm{K}^2_{\nu-1}(\zeta)+\mathrm{J}^2_{1-\nu}(z)\,\mathrm{K}^2_{\nu}(\zeta)\Big]\Big\}, \tag{15.459}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(\nu+k)\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}(z)\Big[\mathrm{J}'_{-\nu-k}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}(z)+\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)\,\mathrm{K}'_{\nu+k}(z)\Big]$$
$$=\frac{z}{4}\Big\{-\Big[\mathrm{J}^2_{-\nu-n-1}(z)\,\mathrm{K}^2_{\nu+n}(z)+\mathrm{J}^2_{-\nu-n}(z)\,\mathrm{K}^2_{\nu+n+1}(z)\Big]$$
$$+\Big[\mathrm{J}^2_{-\nu}(z)\,\mathrm{K}^2_{\nu-1}(z)+\mathrm{J}^2_{1-\nu}(z)\,\mathrm{K}^2_{\nu}(z)\Big]\Big\}, \tag{15.460}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\nu+k)\,\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}(\zeta)\Big[z\,\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)\,\mathrm{K}'_{\nu+k}(\zeta)-\zeta\,\mathrm{J}'_{-\nu-k}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}(\zeta)\Big]$$
$$=\frac{z\zeta}{4}\Big\{(-1)^n\Big[\mathrm{J}^2_{-\nu-n-1}(z)\,\mathrm{K}^2_{\nu+n}(\zeta)-\mathrm{J}^2_{-\nu-n}(z)\,\mathrm{K}^2_{\nu+n+1}(\zeta)\Big]$$
$$+\Big[\mathrm{J}^2_{-\nu}(z)\,\mathrm{K}^2_{\nu-1}(\zeta)-\mathrm{J}^2_{1-\nu}(z)\,\mathrm{K}^2_{\nu}(\zeta)\Big]\Big\}, \tag{15.461}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\nu+k)\,\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}(z)\Big[\mathrm{J}_{-\nu-k}(z)\,\mathrm{K}'_{\nu+k}(z)-\mathrm{J}'_{-\nu-k}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}(z)\Big]$$
$$=\frac{z}{4}\Big\{(-1)^n\Big[\mathrm{J}^2_{-\nu-n-1}(z)\,\mathrm{K}^2_{\nu+n}(\zeta)-\mathrm{J}^2_{-\nu-n}(z)\,\mathrm{K}^2_{\nu+n+1}(\zeta)\Big]$$
$$+\Big[\mathrm{J}^2_{-\nu}(z)\,\mathrm{K}^2_{\nu-1}(\zeta)-\mathrm{J}^2_{1-\nu}(z)\,\mathrm{K}^2_{\nu}(\zeta)\Big]\Big\}, \tag{15.462}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(\nu+k)\mathrm{N}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}(\zeta)\Big[z\,\mathrm{N}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}'(\zeta)+\zeta\,\mathrm{N}_{\nu+k}'(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}(\zeta)\Big]$$
$$=\frac{z\zeta}{4}\bigg\{-\Big[\mathrm{N}_{\nu+n+1}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu+n}^2(\zeta)+\mathrm{N}_{\nu+n}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu+n+1}^2(\zeta)\Big]$$
$$+\Big[\mathrm{N}_{\nu}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu-1}^2(\zeta)+\mathrm{N}_{\nu-1}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu}^2(\zeta)\Big]\bigg\}, \tag{15.463}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(\nu+k)\mathrm{N}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}(z)\Big[\mathrm{N}_{\nu+k}'(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}(z)+\mathrm{N}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}'(z)\Big]$$
$$=\frac{z}{4}\bigg\{-\Big[\mathrm{N}_{\nu+n+1}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu+n}^2(z)+\mathrm{N}_{\nu+n}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu+n+1}^2(z)\Big]$$
$$+\Big[\mathrm{N}_{\nu}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu-1}^2(z)-\mathrm{N}_{\nu-1}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu}^2(z)\Big]\bigg\}, \tag{15.464}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\nu+k)\,\mathrm{N}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}(\zeta)\Big[z\,\mathrm{N}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}'(\zeta)-\zeta\,\mathrm{N}_{\nu+k}'(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}(\zeta)\Big]$$
$$=\frac{z\zeta}{4}\bigg\{(-1)^n\Big[\mathrm{N}_{\nu+n+1}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu+n}^2(\zeta)-\mathrm{N}_{\nu+n}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu+n+1}^2(\zeta)\Big]$$
$$+\Big[\mathrm{N}_{\nu}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu-1}^2(\zeta)-\mathrm{N}_{\nu-1}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu}^2(\zeta)\Big]\bigg\}, \tag{15.465}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\nu+k)\,\mathrm{N}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}(z)\Big[\mathrm{N}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}'(z)-\mathrm{N}_{\nu+k}'(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}(z)\Big]$$
$$=\frac{z}{4}\bigg\{(-1)^n\Big[\mathrm{N}_{\nu+n+1}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu+n}^2(\zeta)-\mathrm{N}_{\nu+n}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu+n+1}^2(\zeta)\Big]$$
$$+\Big[\mathrm{N}_{\nu}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu-1}^2(\zeta)-\mathrm{N}_{\nu-1}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu}^2(\zeta)\Big]\bigg\}, \tag{15.466}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\bigg\{(\nu+k)^2\,\mathrm{J}_{\nu+k}^2(z)\,\mathrm{I}_{\nu+k}^2(\zeta)+\frac{z^2\zeta^2}{z^2-\zeta^2}\Big[\mathrm{J}_{\nu+k}^2(z)\,\mathrm{I}_{\nu+k}'^2(\zeta)-\mathrm{J}_{\nu+k}'^2(z)\,\mathrm{I}_{\nu+k}^2(\zeta)\Big]\bigg\}$$
$$=-\frac{1}{2}\,\frac{z^2\zeta^2}{z^2-\zeta^2}\bigg\{\Big[\mathrm{J}_{\nu+n+1}^2(z)\,\mathrm{I}_{\nu+n}^2(\zeta)-\mathrm{J}_{\nu+n}^2(z)\,\mathrm{I}_{\nu+n+1}^2(\zeta)\Big]$$
$$-\Big[\mathrm{J}_{\nu}^2(z)\,\mathrm{I}_{\nu-1}^2(\zeta)-\mathrm{J}_{\nu-1}^2(z)\,\mathrm{I}_{\nu}^2(\zeta)\Big]\bigg\}, \tag{15.467}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\Big[\mathrm{J}_{\nu+k}^2(z)\,\mathrm{I}_{\nu+k}'^2(z)-\mathrm{J}_{\nu+k}'^2(z)\,\mathrm{I}_{\nu+k}^2(z)\Big]$$
$$=\frac{1}{2}\bigg\{-\Big[\mathrm{J}_{\nu+n+1}^2(z)\,\mathrm{I}_{\nu+n}^2(z)-\mathrm{J}_{\nu+n}^2(z)\,\mathrm{I}_{\nu+n+1}^2(z)\Big]$$
$$+\Big[\mathrm{J}_{\nu}^2(z)\,\mathrm{I}_{\nu-1}^2(z)-\mathrm{J}_{\nu-1}^2(z)\,\mathrm{I}_{\nu}^2(z)\Big]\bigg\}, \tag{15.468}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left\{(\nu+k)^2\,\mathrm{J}_{\nu+k}^2(z)\,\mathrm{I}_{\nu+k}^2(\zeta)+\frac{z^2\zeta^2}{z^2+\zeta^2}\left[\mathrm{J}_{\nu+k}^2(z)\,\mathrm{I}_{\nu+k}'^2(\zeta)+\mathrm{J}_{\nu+k}'^2(z)\,\mathrm{I}_{\nu+k}^2(\zeta)\right]\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\frac{z^2\zeta^2}{z^2+\zeta^2}\left\{(-1)^n\left[\mathrm{J}_{\nu+n+1}^2(z)\,\mathrm{I}_{\nu+n}^2(\zeta)+\mathrm{J}_{\nu+n}^2(z)\,\mathrm{I}_{\nu+n+1}^2(\zeta)\right]\right.$$
$$\left.+\left[\mathrm{J}_{\nu}^2(z)\,\mathrm{I}_{\nu-1}^2(\zeta)+\mathrm{J}_{\nu-1}^2(z)\,\mathrm{I}_{\nu}^2(\zeta)\right]\right\}, \tag{15.469}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left\{(\nu+k)^2\,\mathrm{J}_{\nu+k}^2(z)\,\mathrm{I}_{\nu+k}^2(z)+\frac{z^2}{2}\left[\mathrm{J}_{\nu+k}^2(z)\,\mathrm{I}_{\nu+k}'^2(z)+\mathrm{J}_{\nu+k}'^2(z)\,\mathrm{I}_{\nu+k}^2(z)\right]\right\}$$
$$=\frac{z^2}{4}\left\{(-1)^n\left[\mathrm{J}_{\nu+n+1}^2(z)\,\mathrm{I}_{\nu+n}^2(z)+\mathrm{J}_{\nu+n}^2(z)\,\mathrm{I}_{\nu+n+1}^2(z)\right]\right.$$
$$\left.+\left[\mathrm{J}_{\nu}^2(z)\,\mathrm{I}_{\nu-1}^2(z)+\mathrm{J}_{\nu-1}^2(z)\,\mathrm{I}_{\nu}^2(z)\right]\right\}, \tag{15.470}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\left\{(\nu+k)^2\,\mathrm{J}_{-\nu-k}^2(z)\,\mathrm{I}_{\nu+k}^2(\zeta)+\frac{z^2\zeta^2}{z^2-\zeta^2}\left[\mathrm{J}_{-\nu-k}^2(z)\,\mathrm{I}_{\nu+k}'^2(\zeta)-\mathrm{J}_{-\nu-k}'^2(z)\,\mathrm{I}_{\nu+k}^2(\zeta)\right]\right\}$$
$$=-\frac{1}{2}\frac{z^2\zeta^2}{z^2-\zeta^2}\left\{\left[\mathrm{J}_{-\nu-n-1}^2(z)\,\mathrm{I}_{\nu+n}^2(\zeta)-\mathrm{J}_{-\nu-n}^2(z)\,\mathrm{I}_{\nu+n+1}^2(\zeta)\right]\right.$$
$$\left.-\left[\mathrm{J}_{-\nu}^2(z)\,\mathrm{I}_{\nu-1}^2(\zeta)-\mathrm{J}_{1-\nu}^2(z)\,\mathrm{I}_{\nu}^2(\zeta)\right]\right\}, \tag{15.471}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\left[\mathrm{J}_{-\nu-k}^2(z)\,\mathrm{I}_{\nu+k}'^2(z)-\mathrm{J}_{-\nu-k}'^2(z)\,\mathrm{I}_{\nu+k}^2(z)\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left\{-\left[\mathrm{J}_{-\nu-n-1}^2(z)\,\mathrm{I}_{\nu+n}^2(z)-\mathrm{J}_{-\nu-n}^2(z)\,\mathrm{I}_{\nu+n+1}^2(z)\right]\right.$$
$$\left.+\left[\mathrm{J}_{-\nu}^2(z)\,\mathrm{I}_{\nu-1}^2(z)-\mathrm{J}_{1-\nu}^2(z)\,\mathrm{I}_{\nu}^2(z)\right]\right\}, \tag{15.472}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left\{(\nu+k)^2\,\mathrm{J}_{-\nu-k}^2(z)\,\mathrm{I}_{\nu+k}^2(\zeta)\right.$$
$$\left.+\frac{z^2\zeta^2}{z^2+\zeta^2}\left[\mathrm{J}_{-\nu-k}^2(z)\,\mathrm{I}_{\nu+k}'^2(\zeta)+\mathrm{J}_{-\nu-k}'^2(z)\,\mathrm{I}_{\nu+k}^2(\zeta)\right]\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\frac{z^2\zeta^2}{z^2+\zeta^2}\left\{(-1)^n\left[\mathrm{J}_{-\nu-n-1}^2(z)\,\mathrm{I}_{\nu+n}^2(\zeta)+\mathrm{J}_{-\nu-n}^2(z)\,\mathrm{I}_{\nu+n+1}^2(\zeta)\right]\right.$$
$$\left.+\left[\mathrm{J}_{-\nu}^2(z)\,\mathrm{I}_{\nu-1}^2(\zeta)+\mathrm{J}_{1-\nu}^2(z)\,\mathrm{I}_{\nu}^2(\zeta)\right]\right\}, \tag{15.473}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left\{(\nu+k)^2\,\mathrm{J}_{-\nu-k}^2(z)\,\mathrm{I}_{\nu+k}^2(z)+\frac{z^2}{2}\left[\mathrm{J}_{-\nu-k}^2(z)\,\mathrm{I}_{\nu+k}'^2(z)+\mathrm{J}_{-\nu-k}'^2(z)\,\mathrm{I}_{\nu+k}^2(z)\right]\right\}$$
$$=\frac{z^2}{4}\left\{(-1)^n\left[\mathrm{J}_{-\nu-n-1}^2(z)\,\mathrm{I}_{\nu+n}^2(z)+\mathrm{J}_{-\nu-n}^2(z)\,\mathrm{I}_{\nu+n+1}^2(z)\right]\right.$$

$$+\Big[\mathrm{J}^2_{-\nu}(z)\,\mathrm{I}^2_{\nu-1}(z)+\mathrm{J}^2_{1-\nu}(z)\,\mathrm{I}^2_{\nu}(z)\Big]\Big\},\tag{15.474}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n}\Big\{(\nu+k)^2\,\mathrm{J}^2_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}^2_{-\nu-k}(\zeta)+\frac{z^2\zeta^2}{z^2-\zeta^2}\Big[\mathrm{J}^2_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}'^2_{-\nu-k}(\zeta)-\mathrm{J}'^2_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}^2_{-\nu-k}(\zeta)\Big]\Big\}\\&\quad=-\frac{1}{2}\frac{z^2\zeta^2}{z^2-\zeta^2}\Big\{\Big[\mathrm{J}^2_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{I}^2_{-\nu-n}(\zeta)-\mathrm{J}^2_{\nu+n}(z)\,\mathrm{I}^2_{-\nu-n-1}(\zeta)\Big]\\&\qquad-\Big[\mathrm{J}^2_{\nu}(z)\,\mathrm{I}^2_{1-\nu}(\zeta)-\mathrm{J}^2_{\nu-1}(z)\,\mathrm{I}^2_{-\nu}(\zeta)\Big]\Big\},\end{aligned}\tag{15.475}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n}\Big[\mathrm{J}^2_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}'^2_{-\nu-k}(z)-\mathrm{J}'^2_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}^2_{-\nu-k}(z)\Big]\\&\quad=\frac{1}{2}\Big\{-\Big[\mathrm{J}^2_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{I}^2_{-\nu-n}(z)-\mathrm{J}^2_{\nu+n}(z)\,\mathrm{I}^2_{-\nu-n-1}(z)\Big]\\&\qquad+\Big[\mathrm{J}^2_{\nu}(z)\,\mathrm{I}^2_{1-\nu-1}(z)-\mathrm{J}^2_{\nu-1}(z)\,\mathrm{I}^2_{-\nu}(z)\Big]\Big\},\end{aligned}\tag{15.476}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\Big\{(\nu+k)^2\,\mathrm{J}^2_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}^2_{-\nu-k}(\zeta)\\&\qquad+\frac{z^2\zeta^2}{z^2+\zeta^2}\Big[\mathrm{J}^2_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}'^2_{-\nu-k}(\zeta)+\mathrm{J}'^2_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}^2_{-\nu-k}(\zeta)\Big]\Big\}\\&\quad=\frac{1}{2}\frac{z^2\zeta^2}{z^2+\zeta^2}\Big\{(-1)^n\Big[\mathrm{J}^2_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{I}^2_{-\nu-n}(\zeta)+\mathrm{J}^2_{\nu+n}(z)\,\mathrm{I}^2_{-\nu-n-1}(\zeta)\Big]\\&\qquad+\Big[\mathrm{J}^2_{\nu}(z)\,\mathrm{I}^2_{1-\nu}(\zeta)+\mathrm{J}^2_{\nu-1}(z)\,\mathrm{I}^2_{-\nu}(\zeta)\Big]\Big\},\end{aligned}\tag{15.477}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\Big\{(\nu+k)^2\,\mathrm{J}^2_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}^2_{-\nu-k}(z)+\frac{z^2}{2}\Big[\mathrm{J}^2_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}'^2_{-\nu-k}(z)+\mathrm{J}'^2_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}^2_{-\nu-k}(z)\Big]\Big\}\\&\quad=\frac{z^2}{4}\Big\{(-1)^n\Big[\mathrm{J}^2_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{I}^2_{-\nu-n}(z)+\mathrm{J}^2_{\nu+n}(z)\,\mathrm{I}^2_{-\nu-n-1}(z)\Big]\\&\qquad+\Big[\mathrm{J}^2_{\nu}(z)\,\mathrm{I}^2_{1-\nu}(z)+\mathrm{J}^2_{\nu-1}(z)\,\mathrm{I}^2_{-\nu}(z)\Big]\Big\},\end{aligned}\tag{15.478}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n}\Big\{(\nu+k)^2\,\mathrm{J}^2_{-\nu-k}(z)\,\mathrm{I}^2_{-\nu-k}(\zeta)\\&\qquad+\frac{z^2\zeta^2}{z^2-\zeta^2}\Big[\mathrm{J}^2_{-\nu-k}(z)\,\mathrm{I}'^2_{-\nu-k}(\zeta)-\mathrm{J}'^2_{-\nu-k}(z)\,\mathrm{I}^2_{-\nu-k}(\zeta)\Big]\Big\}\\&\quad=-\frac{1}{2}\frac{z^2\zeta^2}{z^2-\zeta^2}\Big\{\Big[\mathrm{J}^2_{-\nu-n-1}(z)\,\mathrm{I}^2_{-\nu-n}(\zeta)-\mathrm{J}^2_{-\nu-n}(z)\,\mathrm{I}^2_{-\nu-n-1}(\zeta)\Big]\\&\qquad-\Big[\mathrm{J}^2_{-\nu}(z)\,\mathrm{I}^2_{1-\nu}(\zeta)-\mathrm{J}^2_{1-\nu}(z)\,\mathrm{I}^2_{-\nu}(\zeta)\Big]\Big\},\end{aligned}\tag{15.479}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\left[\mathrm{J}_{-\nu-k}^{2}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-k}^{\prime 2}(z)-\mathrm{J}_{-\nu-k}^{\prime 2}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-k}^{2}(z)\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left\{-\left[\mathrm{J}_{-\nu-n-1}^{2}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-n}^{2}(z)-\mathrm{J}_{-\nu-n}^{2}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-n-1}^{2}(z)\right]\right.$$
$$\left.+\left[\mathrm{J}_{-\nu}^{2}(z)\,\mathrm{I}_{1-\nu}^{2}(z)-\mathrm{J}_{1-\nu}^{2}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu}^{2}(z)\right]\right\}, \tag{15.480}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\left\{(\nu+k)^{2}\,\mathrm{J}_{-\nu-k}^{2}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-k}^{2}(\zeta)\right.$$
$$\left.+\frac{z^{2}\zeta^{2}}{z^{2}+\zeta^{2}}\left[\mathrm{J}_{-\nu-k}^{2}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-k}^{\prime 2}(\zeta)+\mathrm{J}_{-\nu-k}^{\prime 2}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-k}^{2}(\zeta)\right]\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\frac{z^{2}\zeta^{2}}{z^{2}+\zeta^{2}}\left\{(-1)^{n}\left[\mathrm{J}_{-\nu-n-1}^{2}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-n}^{2}(\zeta)+\mathrm{J}_{-\nu-n}^{2}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-n-1}^{2}(\zeta)\right]\right.$$
$$\left.+\left[\mathrm{J}_{-\nu}^{2}(z)\,\mathrm{I}_{1-\nu}^{2}(\zeta)+\mathrm{J}_{1-\nu}^{2}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu}^{2}(\zeta)\right]\right\}, \tag{15.481}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\left\{(\nu+k)^{2}\,\mathrm{J}_{-\nu-k}^{2}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-k}^{2}(z)\right.$$
$$\left.+\frac{z^{2}}{2}\left[\mathrm{J}_{-\nu-k}^{2}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-k}^{\prime 2}(z)+\mathrm{J}_{-\nu-k}^{\prime 2}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-k}^{2}(z)\right]\right\}$$
$$=\frac{z^{2}}{4}\left\{(-1)^{n}\left[\mathrm{J}_{-\nu-n-1}^{2}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-n}^{2}(z)+\mathrm{J}_{-\nu-n}^{2}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-n-1}^{2}(z)\right]\right.$$
$$\left.+\left[\mathrm{J}_{-\nu}^{2}(z)\,\mathrm{I}_{1-\nu}^{2}(z)+\mathrm{J}_{1-\nu}^{2}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu}^{2}(z)\right]\right\}, \tag{15.482}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\left\{(\nu+k)^{2}\,\mathrm{J}_{\nu+k}^{2}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}^{2}(\zeta)+\frac{z^{2}\zeta^{2}}{z^{2}-\zeta^{2}}\left[\mathrm{J}_{\nu+k}^{2}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}^{\prime 2}(\zeta)-\mathrm{J}_{\nu+k}^{\prime 2}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}^{2}(\zeta)\right]\right\}$$
$$=-\frac{1}{2}\frac{z^{2}\zeta^{2}}{z^{2}-\zeta^{2}}\left\{\left[\mathrm{J}_{\nu+n+1}^{2}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+n}^{2}(\zeta)-\mathrm{J}_{\nu+n}^{2}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+n+1}^{2}(\zeta)\right]\right.$$
$$\left.-\left[\mathrm{J}_{\nu}^{2}(z)\,\mathrm{K}_{\nu-1}^{2}(\zeta)-\mathrm{J}_{\nu-1}^{2}(z)\,\mathrm{K}_{\nu}^{2}(\zeta)\right]\right\}, \tag{15.483}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\left[\mathrm{J}_{\nu+k}^{2}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}^{\prime 2}(z)-\mathrm{J}_{\nu+k}^{\prime 2}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}^{2}(z)\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left\{-\left[\mathrm{J}_{\nu+n+1}^{2}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+n}^{2}(z)-\mathrm{J}_{\nu+n}^{2}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+n+1}^{2}(z)\right]\right.$$
$$\left.+\left[\mathrm{J}_{\nu}^{2}(z)\,\mathrm{K}_{\nu-1}^{2}(z)-\mathrm{J}_{\nu-1}^{2}(z)\,\mathrm{K}_{\nu}^{2}(z)\right]\right\}, \tag{15.484}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\bigg\{(\nu+k)^2\,\mathrm{J}_{\nu+k}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}^2(\zeta)$$
$$+\frac{z^2\zeta^2}{z^2+\zeta^2}\Big[\mathrm{J}_{\nu+k}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}'^2(\zeta)+\mathrm{J}_{\nu+k}'^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}^2(\zeta)\Big]\bigg\}$$
$$=\frac{1}{2}\frac{z^2\zeta^2}{z^2+\zeta^2}\bigg\{(-1)^n\Big[\mathrm{J}_{\nu+n+1}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu+n}^2(\zeta)+\mathrm{J}_{\nu+n}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu+n+1}^2(\zeta)\Big]$$
$$+\Big[\mathrm{J}_{\nu}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu-1}^2(\zeta)+\mathrm{J}_{\nu-1}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu}^2(\zeta)\Big]\bigg\}, \tag{15.485}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\bigg\{(\nu+k)^2\,\mathrm{J}_{\nu+k}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}^2(z)+\frac{z^2}{2}\Big[\mathrm{J}_{\nu+k}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}'^2(z)+\mathrm{J}_{\nu+k}'^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}^2(z)\Big]\bigg\}$$
$$=\frac{z^2}{4}\bigg\{(-1)^n\Big[\mathrm{J}_{\nu+n+1}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu+n}^2(z)+\mathrm{J}_{\nu+n}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu+n+1}^2(z)\Big]$$
$$+\Big[\mathrm{J}_{\nu}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu-1}^2(z)+\mathrm{J}_{\nu-1}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu}^2(z)\Big]\bigg\}, \tag{15.486}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\bigg\{(\nu+k)^2\,\mathrm{J}_{-\nu-k}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}^2(\zeta)$$
$$+\frac{z^2\zeta^2}{z^2-\zeta^2}\Big[\mathrm{J}_{-\nu-k}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}'^2(\zeta)-\mathrm{J}_{-\nu-k}'^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}^2(\zeta)\Big]\bigg\}$$
$$=-\frac{1}{2}\frac{z^2\zeta^2}{z^2-\zeta^2}\bigg\{\Big[\mathrm{J}_{-\nu-n-1}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu+n}^2(\zeta)-\mathrm{J}_{-\nu-n}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu+n+1}^2(\zeta)\Big]$$
$$-\Big[\mathrm{J}_{-\nu}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu-1}^2(\zeta)-\mathrm{J}_{1-\nu}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu}^2(\zeta)\Big]\bigg\}, \tag{15.487}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\Big[\mathrm{J}_{-\nu-k}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}'^2(z)-\mathrm{J}_{-\nu-k}'^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}^2(z)\Big]$$
$$=\frac{1}{2}\bigg\{-\Big[\mathrm{J}_{-\nu-n-1}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu+n}^2(z)-\mathrm{J}_{-\nu-n}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu+n+1}^2(z)\Big]$$
$$+\Big[\mathrm{J}_{-\nu}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu-1}^2(z)-\mathrm{J}_{1-\nu}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu}^2(z)\Big]\bigg\}, \tag{15.488}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\bigg\{(\nu+k)^2\,\mathrm{J}_{-\nu-k}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}^2(\zeta)$$
$$+\frac{z^2\zeta^2}{z^2+\zeta^2}\Big[\mathrm{J}_{-\nu-k}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}'^2(\zeta)+\mathrm{J}_{-\nu-k}'^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}^2(\zeta)\Big]\bigg\}$$
$$=\frac{1}{2}\frac{z^2\zeta^2}{z^2+\zeta^2}\bigg\{(-1)^n\Big[\mathrm{J}_{-\nu-n-1}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu+n}^2(\zeta)+\mathrm{J}_{-\nu-n}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu+n+1}^2(\zeta)\Big]$$
$$+\Big[\mathrm{J}_{-\nu}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu-1}^2(\zeta)+\mathrm{J}_{1-\nu}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu}^2(\zeta)\Big]\bigg\}, \tag{15.489}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left\{(\nu+k)^2\,\mathrm{J}^2_{-\nu-k}(z)\,\mathrm{K}^2_{\nu+k}(z)\right.$$
$$\left.+\frac{z^2}{2}\left[\mathrm{J}^2_{-\nu-k}(z)\,\mathrm{K}'^2_{\nu+k}(z)+\mathrm{J}'^2_{-\nu-k}(z)\,\mathrm{K}^2_{\nu+k}(z)\right]\right\}$$
$$=\frac{z^2}{4}\left\{(-1)^n\left[\mathrm{J}^2_{-\nu-n-1}(z)\,\mathrm{K}^2_{\nu+n}(z)+\mathrm{J}^2_{-\nu-n}(z)\,\mathrm{K}^2_{\nu+n+1}(z)\right]\right.$$
$$\left.+\left[\mathrm{J}^2_{\nu}(z)\,\mathrm{K}^2_{\nu-1}(z)+\mathrm{J}^2_{1-\nu}(z)\,\mathrm{K}^2_{\nu}(z)\right]\right\},\tag{15.490}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\left\{(\nu+k)^2\,\mathrm{N}^2_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}^2_{\nu+k}(\zeta)+\frac{z^2\zeta^2}{z^2-\zeta^2}\left[\mathrm{N}^2_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}'^2_{\nu+k}(\zeta)-\mathrm{N}'^2_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}^2_{\nu+k}(\zeta)\right]\right\}$$
$$=-\frac{1}{2}\frac{z^2\zeta^2}{z^2-\zeta^2}\left\{\left[\mathrm{N}^2_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{I}^2_{\nu+n}(\zeta)-\mathrm{N}^2_{\nu+n}(z)\,\mathrm{I}^2_{\nu+n+1}(\zeta)\right]\right.$$
$$\left.-\left[\mathrm{N}^2_{\nu}(z)\,\mathrm{I}^2_{\nu-1}(\zeta)-\mathrm{N}^2_{\nu-1}(z)\,\mathrm{I}^2_{\nu}(\zeta)\right]\right\},\tag{15.491}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\left[\mathrm{N}^2_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}'^2_{\nu+k}(z)-\mathrm{N}'^2_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}^2_{\nu+k}(z)\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left\{-\left[\mathrm{N}^2_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{I}^2_{\nu+n}(z)-\mathrm{N}^2_{\nu+n}(z)\,\mathrm{I}^2_{\nu+n+1}(z)\right]\right.$$
$$\left.-\left[\mathrm{N}^2_{\nu}(z)\,\mathrm{I}^2_{\nu-1}(z)-\mathrm{N}^2_{\nu-1}(z)\,\mathrm{I}^2_{\nu}(z)\right]\right\},\tag{15.492}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left\{(\nu+k)^2\,\mathrm{N}^2_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}^2_{\nu+k}(\zeta)\right.$$
$$\left.+\frac{z^2\zeta^2}{z^2+\zeta^2}\left[\mathrm{N}^2_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}'^2_{\nu+k}(\zeta)+\mathrm{N}'^2_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}^2_{\nu+k}(\zeta)\right]\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\frac{z^2\zeta^2}{z^2+\zeta^2}\left\{(-1)^n\left[\mathrm{N}^2_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{I}^2_{\nu+n}(\zeta)+\mathrm{N}^2_{\nu+n}(z)\,\mathrm{I}^2_{\nu+n+1}(\zeta)\right]\right.$$
$$\left.+\left[\mathrm{N}^2_{\nu}(z)\,\mathrm{I}^2_{\nu-1}(\zeta)+\mathrm{N}^2_{\nu-1}(z)\,\mathrm{I}^2_{\nu}(\zeta)\right]\right\},\tag{15.493}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left\{(\nu+k)^2\,\mathrm{N}^2_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}^2_{\nu+k}(z)+\frac{z^2}{2}\left[\mathrm{N}^2_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}'^2_{\nu+k}(z)+\mathrm{N}'^2_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}^2_{\nu+k}(z)\right]\right\}$$
$$=\frac{z^2}{4}\left\{(-1)^n\left[\mathrm{N}^2_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{I}^2_{\nu+n}(z)+\mathrm{N}^2_{\nu+n}(z)\,\mathrm{I}^2_{\nu+n+1}(z)\right]\right.$$
$$\left.+\left[\mathrm{N}^2_{\nu}(z)\,\mathrm{I}^2_{\nu-1}(z)+\mathrm{N}^2_{\nu-1}(z)\,\mathrm{I}^2_{\nu}(z)\right]\right\},\tag{15.494}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\left\{(\nu+k)^2\,\mathrm{N}_{\nu+k}^2(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-k}^2(\zeta)+\frac{z^2\zeta^2}{z^2-\zeta^2}\left[\mathrm{N}_{\nu+k}^2(z)\,\mathrm{I}'^2_{-\nu-k}(\zeta)-\mathrm{N}'^2_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-k}^2(\zeta)\right]\right\}$$
$$=-\frac{1}{2}\frac{z^2\zeta^2}{z^2-\zeta^2}\left\{\left[\mathrm{N}_{\nu+n+1}^2(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-n}^2(\zeta)-\mathrm{N}_{\nu+n}^2(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-n-1}^2(\zeta)\right]-\left[\mathrm{N}_{\nu}^2(z)\,\mathrm{I}_{1-\nu}^2(\zeta)-\mathrm{N}_{\nu-1}^2(z)\,\mathrm{I}_{-\nu}^2(\zeta)\right]\right\}, \tag{15.495}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\left[\mathrm{N}_{\nu+k}^2(z)\,\mathrm{I}'^2_{-\nu-k}(z)-\mathrm{N}'^2_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-k}^2(z)\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left\{-\left[\mathrm{N}_{\nu+n+1}^2(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-n}^2(z)-\mathrm{N}_{\nu+n}^2(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-n-1}^2(z)\right]-\left[\mathrm{N}_{\nu}^2(z)\,\mathrm{I}_{1-\nu}^2(z)-\mathrm{N}_{\nu-1}^2(z)\,\mathrm{I}_{-\nu}^2(z)\right]\right\}, \tag{15.496}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left\{(\nu+k)^2\,\mathrm{N}_{\nu+k}^2(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-k}^2(\zeta)+\frac{z^2\zeta^2}{z^2+\zeta^2}\left[\mathrm{N}_{\nu+k}^2(z)\,\mathrm{I}'^2_{-\nu-k}(\zeta)+\mathrm{N}'^2_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-k}^2(\zeta)\right]\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\frac{z^2\zeta^2}{z^2+\zeta^2}\left\{(-1)^n\left[\mathrm{N}_{\nu+n+1}^2(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-n}^2(\zeta)+\mathrm{N}_{\nu+n}^2(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-n-1}^2(\zeta)\right]+\left[\mathrm{N}_{\nu}^2(z)\,\mathrm{I}_{1-\nu}^2(\zeta)+\mathrm{N}_{\nu-1}^2(z)\,\mathrm{I}_{-\nu}^2(\zeta)\right]\right\}, \tag{15.497}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left\{(\nu+k)^2\,\mathrm{N}_{\nu+k}^2(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-k}^2(z)+\frac{z^2}{2}\left[\mathrm{N}_{\nu+k}^2(z)\,\mathrm{I}'^2_{-\nu-k}(z)+\mathrm{N}'^2_{\nu+k}(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-k}^2(z)\right]\right\}$$
$$=\frac{z^2}{4}\left\{(-1)^n\left[\mathrm{N}_{\nu+n+1}^2(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-n}^2(z)+\mathrm{N}_{\nu+n}^2(z)\,\mathrm{I}_{-\nu-n-1}^2(z)\right]+\left[\mathrm{N}_{\nu}^2(z)\,\mathrm{I}_{1-\nu}^2(z)+\mathrm{N}_{\nu-1}^2(z)\,\mathrm{I}_{-\nu}^2(z)\right]\right\}, \tag{15.498}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\left\{(\nu+k)^2\,\mathrm{N}_{\nu+k}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}^2(\zeta)+\frac{z^2\zeta^2}{z^2-\zeta^2}\left[\mathrm{N}_{\nu+k}^2(z)\,\mathrm{K}'^2_{\nu+k}(\zeta)-\mathrm{N}'^2_{\nu+k}(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}^2(\zeta)\right]\right\}$$
$$=-\frac{1}{2}\frac{z^2\zeta^2}{z^2-\zeta^2}\left\{\left[\mathrm{N}_{\nu+n+1}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu+n}^2(\zeta)-\mathrm{N}_{\nu+n}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu+n+1}^2(\zeta)\right]-\left[\mathrm{N}_{\nu}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu-1}^2(\zeta)-\mathrm{N}_{\nu-1}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu}^2(\zeta)\right]\right\}, \tag{15.499}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\Big[\mathrm{N}_{\nu+k}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}'^2(z)-\mathrm{N}_{\nu+k}'^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}^2(z)\Big]$$
$$=-\Big[\mathrm{N}_{\nu+n+1}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu+n}^2(z)-\mathrm{N}_{\nu+n}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu+n+1}^2(z)\Big]$$
$$+\Big[\mathrm{N}_{\nu}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu-1}^2(z)-\mathrm{N}_{\nu-1}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu}^2(z)\Big], \tag{15.500}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\bigg\{(\nu+k)^2\,\mathrm{N}_{\nu+k}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}^2(\zeta)$$
$$+\frac{z^2\zeta^2}{z^2+\zeta^2}\Big[\mathrm{N}_{\nu+k}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}'^2(\zeta)+\mathrm{N}_{\nu+k}'^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}^2(\zeta)\Big]\bigg\}$$
$$=\frac{1}{2}\frac{z^2\zeta^2}{z^2-\zeta^2}\bigg\{(-1)^n\Big[\mathrm{N}_{\nu+n+1}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu+n}^2(\zeta)+\mathrm{N}_{\nu+n}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu+n+1}^2(\zeta)\Big]$$
$$+\Big[\mathrm{N}_{\nu}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu-1}^2(\zeta)+\mathrm{N}_{\nu-1}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu}^2(\zeta)\Big]\bigg\}, \tag{15.501}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\bigg\{(\nu+k)^2\,\mathrm{N}_{\nu+k}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}^2(z)+\frac{z^2}{2}\Big[\mathrm{N}_{\nu+k}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}'^2(z)+\mathrm{N}_{\nu+k}'^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu+k}^2(z)\Big]\bigg\}$$
$$=\frac{z^2}{4}\bigg\{(-1)^n\Big[\mathrm{N}_{\nu+n+1}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu+n}^2(z)+\mathrm{N}_{\nu+n}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu+n+1}^2(z)\Big]$$
$$+\Big[\mathrm{N}_{\nu}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu-1}^2(z)+\mathrm{N}_{\nu-1}^2(z)\,\mathrm{K}_{\nu}^2(z)\Big]\bigg\}. \tag{15.502}$$

§15.5 合流超几何函数的求和公式

柱函数和虚宗量柱函数，都属于合流超几何函数. 作为一般情形，合流超几何函数 $\mathrm{F}(\alpha;\gamma;z)$ 与 $\mathrm{U}(\alpha;\gamma;z)$ 也具有递推关系

$$(z+2\alpha-\gamma)\mathrm{F}(\alpha;\gamma;z)=\alpha\mathrm{F}(\alpha+1;\gamma;z)+(\alpha-\gamma)\mathrm{F}(\alpha-1;\gamma;z), \tag{15.503a}$$
$$\gamma(\gamma-1+z)\mathrm{F}(\alpha;\gamma;z)=(\gamma-\alpha)z\mathrm{F}(\alpha;\gamma+1;z)+\gamma(\gamma-1)\mathrm{F}(\alpha;\gamma-1;z), \tag{15.503b}$$
$$\gamma(\gamma-z-1)\mathrm{F}(\alpha;\gamma;z)=-\alpha z\mathrm{F}(\alpha+1;\gamma+1;z)+\gamma(\gamma-1)\mathrm{F}(\alpha-1;\gamma-1;z) \tag{15.503c}$$

及

$$(z+2\alpha-\gamma)\mathrm{U}(\alpha;\gamma;z)=\alpha(\alpha-\gamma+1)\mathrm{U}(\alpha+1;\gamma;z)+\mathrm{U}(\alpha-1;\gamma;z), \tag{15.504a}$$
$$(\gamma-1+z)\mathrm{U}(\alpha;\gamma;z)=z\mathrm{U}(\alpha;\gamma+1;z)+(\gamma-\alpha-1)\mathrm{U}(\alpha;\gamma-1;z). \tag{15.504b}$$

自然由此也可导出一系列求和公式，此处从略. 但或许值得提到几个特殊的合流超几何函数，特别是常用的正交多项式，如 Laguerre 多项式 $\mathrm{L}_k^{\alpha}(z)$ 和 Hermite 多项式 $\mathrm{H}_k(z)$，根据它们的递推关系

$$(2k+\alpha+1-z)\mathrm{L}_k^{\alpha}(z)=(k+1)\mathrm{L}_{k+1}^{\alpha}(z)+(k+\alpha)\mathrm{L}_{k-1}^{\alpha}(z), \tag{15.505a}$$

$$2z\mathrm{H}_k(z)=\mathrm{H}_{k+1}(z)+2k\mathrm{H}_{k-1}(z), \tag{15.505b}$$

同样也可以能得到求和公式：

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{k!}{\Gamma(k+\alpha+1)}\mathrm{L}_k^{\alpha}(z)\,\mathrm{L}_k^{\alpha}(\zeta)=\frac{(n+1)!}{\Gamma(n+\alpha+1)}\frac{1}{z-\zeta}\Big[\mathrm{L}_{n+1}^{\alpha}(z)\,\mathrm{L}_n^{\alpha}(\zeta)-\mathrm{L}_n^{\alpha}(z)\,\mathrm{L}_{n+1}^{\alpha}(\zeta)\Big], \tag{15.506}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{k!}{\Gamma(k+\alpha+1)}\Big[\mathrm{L}_k^{\alpha}(z)\Big]^2=-\frac{(n+1)!}{\Gamma(n+\alpha+1)}\Big[\mathrm{L}_{n+1}^{\alpha}(z)\,dz\mathrm{L}_n^{\alpha}(z)-\mathrm{L}_n^{\alpha}(z)\,dz\mathrm{L}_{n+1}^{\alpha}(z)\Big], \tag{15.507}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{k!}{\Gamma(k+\alpha+1)}(4k+2\alpha+2-z-\zeta)\mathrm{L}_k^{\alpha}(z)\,\mathrm{L}_k^{\alpha}(\zeta)=(-1)^n\frac{(n+1)!}{\Gamma(n+\alpha+1)}\Big[\mathrm{L}_{n+1}^{\alpha}(z)\,\mathrm{L}_n^{\alpha}(\zeta)+\mathrm{L}_n^{\alpha}(z)\,\mathrm{L}_{n+1}^{\alpha}(\zeta)\Big], \tag{15.508}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(2k+\alpha+1-z)\frac{k!}{\Gamma(k+\alpha+1)}\Big[\mathrm{L}_k^{\alpha}(z)\Big]^2=(-1)^n\frac{(n+1)!}{\Gamma(n+\alpha+1)}\mathrm{L}_{n+1}^{\alpha}(z)\,\mathrm{L}_n^{\alpha}(z), \tag{15.509}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k k!}\mathrm{H}_k(z)\,\mathrm{H}_k(\zeta)=\frac{1}{2^{n+1}n!}\frac{1}{z-\zeta}\Big[\mathrm{H}_{n+1}(z)\,\mathrm{H}_n(\zeta)-\mathrm{H}_n(z)\,\mathrm{H}_{n+1}(\zeta)\Big], \tag{15.510}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k k!}\mathrm{H}_k^2(z)=-\frac{1}{2^{n+1}n!}\Big[\mathrm{H}_{n+1}(z)\,\mathrm{H}_n'(z)-\mathrm{H}_n(z)\,\mathrm{H}_{n+1}'(z)\Big], \tag{15.511}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2^k k!}\mathrm{H}_k(z)\,\mathrm{H}_k(\zeta)=\frac{(-1)^n}{2^{n+1}n!}\frac{1}{z+\zeta}\Big[\mathrm{H}_{n+1}(z)\,\mathrm{H}_n(\zeta)+\mathrm{H}_n(z)\,\mathrm{H}_{n+1}(\zeta)\Big], \tag{15.512}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2^k k!}\mathrm{H}_k^2(z)=\frac{(-1)^n}{2^{n+1}n!}\frac{1}{z}\mathrm{H}_{n+1}(z)\,\mathrm{H}_n(z). \tag{15.513}$$

为了得到上面的结果，还需用到

$$\mathrm{L}_0^{\alpha}(z)=1, \qquad \mathrm{H}_0(z)=1,$$
$$\mathrm{L}_0^{\alpha}(z)=\alpha+1-\alpha, \qquad \mathrm{H}_0(z)=z.$$

还可以提到与 Hermite 多项式 $\mathrm{H}_k(z)$ 密切相关的抛物线柱函数 $\mathrm{D}_\nu(z)$，它的递推关系是

$$zD_\nu(z) = D_{\nu+1}(z) + \nu D_{\nu-1}(z), \tag{15.514a}$$

$$2D'_\nu(z) = -D_{\nu+1}(z) + \nu D_{\nu-1}(z), \tag{15.514b}$$

从而也可以写出下列求和公式:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} &\frac{1}{\Gamma(\nu+k+1)} D_{\nu+k}(z)\, D_{\nu+k}(\zeta) \\ &= \frac{1}{z-\zeta}\left\{\frac{1}{\Gamma(\nu+n+1)}\Big[D_{\nu+n+1}(z)\, D_{\nu+n}(\zeta) - D_{\nu+n}(z)\, D_{\nu+n+1}(\zeta)\Big]\right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\Gamma(\nu)}\Big[D_\nu(z)\, D_{\nu-1}(\zeta) - D_{\nu-1}(z)\, D_\nu(\zeta)\Big]\right\},\end{aligned} \tag{15.515}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} &\frac{1}{\Gamma(\nu+k+1)} D^2_{\nu+k}(z) \\ &= -\frac{1}{\Gamma(\nu+n+1)}\Big[D_{\nu+n+1}(z)\, D'_{\nu+n}(z) - D_{\nu+n}(z)\, D'_{\nu+n+1}(z)\Big] \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\nu)}\Big[D_\nu(z)\, D'_{\nu-1}(z) - D_{\nu-1}(z)\, D'_\nu(z)\Big],\end{aligned} \tag{15.516}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} &\frac{(-1)^k}{\Gamma(\nu+k+1)} D_{\nu+k}(z)\, D_{\nu+k}(\zeta) \\ &= \frac{1}{z+\zeta}\left\{\frac{(-1)^n}{\Gamma(\nu+n+1)}\Big[D_{\nu+n+1}(z)\, D_{\nu+n}(\zeta) + D_{\nu+n}(z)\, D_{\nu+n+1}(\zeta)\Big]\right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\Gamma(\nu)}\Big[D_\nu(z)\, D_{\nu-1}(\zeta) + D_{\nu-1}(z)\, D_\nu(\zeta)\Big]\right\},\end{aligned} \tag{15.517}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} &\frac{(-1)^k}{\Gamma(\nu+k+1)} D^2_{\nu+k}(z) \\ &= \frac{1}{z}\left\{\frac{(-1)^n}{\Gamma(\nu+n+1)} D_{\nu+n+1}(z)\, D_{\nu+n}(z) + \frac{1}{\Gamma(\nu)} D_\nu(z)\, D_{\nu-1}(z)\right\},\end{aligned} \tag{15.518}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} &\frac{1}{\Gamma(\nu+k+1)}\Big[D_{\nu+k}(z)\, D'_{\nu+k}(\zeta) + D'_{\nu+k}(z)\, D_{\nu+k}(\zeta)\Big] \\ &= \frac{1}{2}\left\{-\frac{1}{\Gamma(\nu+n+1)}\Big[D_{\nu+n+1}(z)\, D_{\nu+n}(\zeta) + D_{\nu+n}(z)\, D_{\nu+n+1}(\zeta)\Big]\right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\Gamma(\nu)}\Big[D_\nu(z)\, D_{\nu-1}(\zeta) + D_{\nu-1}(z)\, D_\nu(\zeta)\Big]\right\},\end{aligned} \tag{15.519}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} &\frac{1}{\Gamma(\nu+k+1)} D_{\nu+k}(z)\, D'_{\nu+k}(z) \\ &= \frac{1}{2}\Big[-\frac{1}{\Gamma(\nu+n+1)} D_{\nu+n+1}(z)\, D_{\nu+n}(z) + \frac{1}{\Gamma(\nu)} D_\nu(z)\,(z)\Big],\end{aligned} \tag{15.520}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{\Gamma(\nu+k+1)}\Big[\mathrm{D}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{D}'_{\nu+k}(\zeta)-\mathrm{D}'_{\nu+k}(z)\,\mathrm{D}_{\nu+k}(\zeta)\Big]$$
$$=\frac{1}{2}\bigg\{\frac{(-1)^n}{\Gamma(\nu+n+1)}\Big[\mathrm{D}_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{D}_{\nu+n}(\zeta)-\mathrm{D}_{\nu+n}(z)\,\mathrm{D}_{\nu+n+1}(\zeta)\Big]$$
$$+\frac{1}{\Gamma(\nu)}\Big[\mathrm{D}_{\nu}(z)\,\mathrm{D}_{\nu-1}(\zeta)-\mathrm{D}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{D}_{\nu}(\zeta)\Big]\bigg\},\tag{15.521}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{\Gamma(\nu+k+1)}\bigg[\Big(\nu+k+\frac{1}{2}-\frac{z^2}{4}\Big)\mathrm{D}^2_{\nu+k}(z)+\mathrm{D}'^2_{\nu+k}(z)\bigg]$$
$$=\frac{1}{2}\bigg\{\frac{(-1)^{n+1}}{\Gamma(\nu+n+1)}\Big[\mathrm{D}_{\nu+n+1}(z)\,\mathrm{D}'_{\nu+n}(z)-\mathrm{D}_{\nu+n}(z)\,\mathrm{D}'_{\nu+n+1}(z)\Big]$$
$$-\frac{1}{\Gamma(\nu)}\Big[\mathrm{D}_{\nu}(z)\,\mathrm{D}'_{\nu-1}(z)-\mathrm{D}'_{\nu}(z)\,\mathrm{D}_{\nu-1}(z)\Big]\bigg\}.\tag{15.522}$$

在得到 (15.522) 时需要用到函数 $\mathrm{D}_{\nu}(z)$ 所满足的微分方程

$$\mathrm{D}''_{\nu}(z)+\Big(\nu+k+\frac{1}{2}-\frac{z^2}{4}\Big)\mathrm{D}_{\nu}(z)=0.$$

由递推关系 (15.514) 还能进一步导出关于 $\mathrm{D}_{\nu}(z)$ 的二次递推关系

$$2z\mathrm{D}_{\nu}(z)\mathrm{D}'_{\nu}(z)=-\mathrm{D}^2_{\nu+1}(z)+\nu^2\mathrm{D}^2_{\nu-1}(z),\tag{15.523a}$$
$$z^2\mathrm{D}^2_{\nu}(z)+4\mathrm{D}'^2_{\nu}(z)=2\mathrm{D}^2_{\nu+1}(z)+2\nu^2\mathrm{D}^2_{\nu-1}(z),\tag{15.523b}$$

从而又能得到下列求和公式:

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\Gamma^2(\nu+k+1)}\mathrm{D}_{\nu+k}(z)\mathrm{D}_{\nu+k}(\zeta)\Big[\zeta\,\mathrm{D}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{D}'_{\nu+k}(\zeta)+z\,\mathrm{D}'_{\nu+k}(z)\,\mathrm{D}_{\nu+k}(\zeta)\Big]$$
$$=\frac{1}{2}\bigg\{-\frac{1}{\Gamma^2(\nu+n+1)}\Big[\mathrm{D}^2_{\nu+n+1}(z)\mathrm{D}^2_{\nu+n}(\zeta)+\mathrm{D}^2_{\nu+n}(z)\mathrm{D}^2_{\nu+n+1}(\zeta)\Big]$$
$$+\frac{1}{\Gamma^2(\nu)}\Big[\mathrm{D}^2_{\nu}(z)\mathrm{D}^2_{\nu-1}(\zeta)+\mathrm{D}^2_{\nu-1}(z)\mathrm{D}^2_{\nu}(\zeta)\Big]\bigg\},\tag{15.524}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\Gamma^2(\nu+k+1)}\mathrm{D}^3_{\nu+k}(z)\,\mathrm{D}'_{\nu+k}(z)$$
$$=\frac{1}{2z}\Big[-\frac{1}{\Gamma^2(\nu+n+1)}\mathrm{D}^2_{\nu+n+1}(z)\mathrm{D}^2_{\nu+n}(z)+\frac{1}{\Gamma^2(\nu)}\mathrm{D}^2_{\nu}(z)\mathrm{D}^2_{\nu-1}(z)\Big].\tag{15.525}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{\Gamma^2(\nu+k+1)}\mathrm{D}_{\nu+k}(z)\mathrm{D}_{\nu+k}(\zeta)\Big[\zeta\,\mathrm{D}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{D}'_{\nu+k}(\zeta)-z\,\mathrm{D}'_{\nu+k}(z)\,\mathrm{D}_{\nu+k}(\zeta)\Big]$$
$$=\frac{1}{2}\bigg\{\frac{(-1)^n}{\Gamma^2(\nu+n+1)}\Big[\mathrm{D}^2_{\nu+n+1}(z)\mathrm{D}^2_{\nu+n}(\zeta)-\mathrm{D}^2_{\nu+n}(z)\mathrm{D}^2_{\nu+n+1}(\zeta)\Big]$$

$$+\frac{1}{\Gamma^2(\nu)}\left[\mathrm{D}_\nu^2(z)\mathrm{D}_{\nu-1}^2(\zeta)-\mathrm{D}_{\nu-1}^2(z)\mathrm{D}_\nu^2(\zeta)\right]\Bigg\}, \tag{15.526}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{\Gamma^2(\nu+k+1)}\mathrm{D}_{\nu+k}^2(z)$$
$$\times\left[z\left(\nu+k+\frac{1}{2}-\frac{z^2}{4}\right)\mathrm{D}_{\nu+k}^2(z)-\mathrm{D}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{D}'_{\nu+k}(z)+z\,\mathrm{D}'^2_{\nu+k}(z)\right]$$
$$=\frac{(-1)^{n+1}}{\Gamma^2(\nu+n+1)}\mathrm{D}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{D}_{\nu+n}(z)\left[\mathrm{D}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{D}'_{\nu+n}(z)-\mathrm{D}'_{\nu+n+1}(z)\mathrm{D}_{\nu+n}(z)\right]$$
$$-\frac{1}{\Gamma^2(\nu)}\mathrm{D}_\nu(z)\mathrm{D}_{\nu-1}(z)\left[\mathrm{D}_\nu(z)\mathrm{D}'_{\nu-1}(z)-\mathrm{D}'_\nu(z)\mathrm{D}_{\nu-1}(z)\right]\Bigg\}, \tag{15.527}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\Gamma^2(\nu+k+1)}\Bigg\{\mathrm{D}_{\nu+k}^2(z)\mathrm{D}_{\nu+k}^2(\zeta)$$
$$-\frac{4}{z^2-\zeta^2}\left[\mathrm{D}_{\nu+k}^2(z)\,\mathrm{D}'^2_{\nu+k}(\zeta)-\mathrm{D}'^2_{\nu+k}(z)\,\mathrm{D}_{\nu+k}^2(\zeta)\right]\Bigg\}$$
$$=\frac{2}{z^2-\zeta^2}\Bigg\{\frac{1}{\Gamma^2(\nu+n+1)}\left[\mathrm{D}_{\nu+n+1}^2(z)\mathrm{D}_{\nu+n}^2(\zeta)-\mathrm{D}_{\nu+n}^2(z)\mathrm{D}_{\nu+n+1}^2(\zeta)\right]$$
$$-\frac{1}{\Gamma^2(\nu)}\left[\mathrm{D}_\nu^2(z)\mathrm{D}_{\nu-1}^2(\zeta)-\mathrm{D}_{\nu-1}^2(z)\mathrm{D}_\nu^2(\zeta)\right]\Bigg\}, \tag{15.528}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\Gamma^2(\nu+k+1)}\Bigg\{\mathrm{D}_{\nu+k}^4(z)$$
$$-\frac{4}{z}\mathrm{D}_{\nu+k}(z)\,\mathrm{D}'_{\nu+k}(z)\left[\left(\nu+k+\frac{1}{2}-\frac{z^2}{4}\right)\mathrm{D}_{\nu+k}^2(z)+\mathrm{D}'^2_{\nu+k}(z)\right]\Bigg\}$$
$$=\frac{2}{z}\Bigg\{-\frac{1}{\Gamma^2(\nu+n+1)}\mathrm{D}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{D}_{\nu+n}(z)$$
$$\times\left[\mathrm{D}_{\nu+n+1}(z)\mathrm{D}'_{\nu+n}(z)-\mathrm{D}'_{\nu+n+1}(z)\mathrm{D}_{\nu+n}(z)\right]$$
$$+\frac{1}{\Gamma^2(\nu)}\mathrm{D}_\nu(z)\mathrm{D}_{\nu-1}(z)\left[\mathrm{D}_\nu(z)\mathrm{D}'_{\nu-1}(z)-\mathrm{D}'_\nu(z)\mathrm{D}_{\nu-1}(z)\right]\Bigg\}, \tag{15.529}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{\Gamma^2(\nu+k+1)}\Bigg\{\mathrm{D}_{\nu+k}^2(z)\mathrm{D}_{\nu+k}^2(\zeta)$$
$$+\frac{4}{z^2+\zeta^2}\left[\mathrm{D}_{\nu+k}^2(z)\,\mathrm{D}'^2_{\nu+k}(\zeta)+\mathrm{D}'^2_{\nu+k}(z)\,\mathrm{D}_{\nu+k}^2(\zeta)\right]\Bigg\}$$
$$=\frac{2}{z^2+\zeta^2}\Bigg\{\frac{(-1)^n}{\Gamma^2(\nu+n+1)}\left[\mathrm{D}_{\nu+n+1}^2(z)\mathrm{D}_{\nu+n}^2(\zeta)+\mathrm{D}_{\nu+n}^2(z)\mathrm{D}_{\nu+n+1}^2(\zeta)\right]$$
$$+\frac{1}{\Gamma^2(\nu)}\left[\mathrm{D}_\nu^2(z)\mathrm{D}_{\nu-1}^2(\zeta)+\mathrm{D}_{\nu-1}^2(z)\mathrm{D}_\nu^2(\zeta)\right]\Bigg\}, \tag{15.530}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{\Gamma^2(\nu+k+1)}\mathrm{D}_{\nu+k}^2(z)\Big[z^2\,\mathrm{D}_{\nu+k}^2(z)+4\,\mathrm{D}_{\nu+k}'^2(z)\Big]$$
$$=2\Big[\frac{(-1)^n}{\Gamma^2(\nu+n+1)}\,\mathrm{D}_{\nu+n+1}^2(z)\mathrm{D}_{\nu+n}^2(z)+\frac{1}{\Gamma^2(\nu)}\,\mathrm{D}_{\nu}^2(z)\mathrm{D}_{\nu-1}^2(z)\Big]. \tag{15.531}$$

至于其他一些与合流超几何函数有关的特殊函数，如 Anger 函数 $\mathbb{J}_\nu(z)$，Weber 函数 $\mathbb{E}_\nu(z)$，Struve 函数 $\mathbb{H}_\nu(z)$，Lommel 函数 $\mathrm{s}_{\mu,\nu}(z)$，Neumann 多项式 $\mathrm{O}_k(z)$ 和 Schläfli 多项式 $\mathrm{S}_k(z)$，它们的递推关系及由此导出的求和公式，不再一一列出.

参 考 文 献

1. 王竹溪，郭敦仁．特殊函数概论．北京：科学出版社，1965.
2. Whittaker E T, Watson G N. *A Course of Modern Analysis.* Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1927.
3. Erdélyi A, et al. *Higher Transcendental Functions.* New York: McGraw-Hill, 1953.
   爱尔台里．高级超越函数．张致中，译．上海：科学技术出版社，1957.
4. Hobson E W. *The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics.* Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1931.
5. Watson G N. *A Treatise on the Theory of Bessel Functions.* Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1944.
6. Abramowitz M, Stegun I A. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables.* Washington, D C: U. S. National Bureau of Standards, 1965.
7. Gradshteyn I S, Ryzhik I M. *Table of Integrals, Series, and Products.* Singapore: Elsvier, 2007.
8. Courant R, Hilbert D. *Methods of Methematical Physics.* Vol. I. New York: Interscience Publishers, 1962.
   柯朗，希尔伯特．数学物理方法．第一卷．钱敏，郭敦仁，译，北京：科学出版社，1958.
9. Courant R, Hilbert D. *Methods of Methematical Physics.* Vol. II. New York: Interscience Publishers, 1962.
   柯朗，希尔伯特．数学物理方法．第二卷．振翔，杨应辰，译，北京：科学出版社，1977.
10. Morse P M, Feshbach H. *Methods of Theoretical Physics.* New York: McGraw-Hill, 1953.
11. Churchill R V. *Fourier Series and Boundary Value Problems.* New York: McGraw-Hill, 1941.
12. Bradbury T C. *Mathematical Methods with Applications to Problems in the Physical Sciences.* New York: Wiley, 1984.
13. Mathews J, Walker R L. *Mathematical Methods of Physics.* New York: Benjamin, 1970.

14. Boas M L. *Mathematical Methods in the Physical Sciences.* New York: Wiey, 1983.
15. 吉洪诺夫，萨马尔斯基. 数学物理方程. 黄克欧等，译. 北京：人民教育出版社，1961.
16. Croxton C A. *Introductory Eigenphysics.* New York: Wiley, 1974.
克罗克斯顿. 数学物理方程导论. 戴安英，钱伯初，译. 北京：高等教育出版社，1982.
17. Rainville E D. *Special Functions.* New York: Macmillan, 1960.
18. 莫叶. 勒襄特函数论. 济南：山东大学出版社，1988.

索　引

E

F

G

H

J

L

N

P

Q

R

S

W

X

Y

Z

[General Information]
书名=数学物理方法专题：数理方程与特殊函数
作者=吴崇试编著
页数=508
SS号=13225414
DX号=
出版日期=2012.12
出版社=北京大学出版社